

## DODATEK NR 1. ALGEBRA MACIERZY

W dodatku tym podamy najważniejsze definicje rachunku macierzowego i omówimy niektóre funkcje i transformacje macierzy najbardziej przydatne w zastosowaniach numerycznych, a w szczególności w metodzie elementów skończonych.

### D1.1. DEFINICJE

- ♦ Skalar - jest wielkością określoną tylko przez swoją wartość, która może wyrażać się liczbą rzeczywistą. Typowymi przykładami wielkości skalarnych są: masa, temperatura, czas, długość itp. Skalary będziemy oznaczać literami, pisanymi czcionką pochyłą.
- ♦ Wektor - jest wielkością określoną przez swój moduł oraz kierunek i zwrot. Przykładami wielkości wektorowych są: siła, przemieszczenie, prędkość, obrót. Wektory będziemy oznaczali małymi literami, pisanymi czcionką prostą, pogrubioną.
- ♦ Macierz - jest tablicą zawierającą najczęściej skalary, ale może też zawierać wektory lub inne macierze. Elementy macierzy nazywamy jej składowymi. Jest to bardzo wygodna forma prezentacji dużej ilości jednolitych danych, z którymi mamy do czynienia w metodach numerycznych. Przykładowy zapis macierzy, którymi posługujemy się w tej książce wygląda następująco:

$$\mathbf{A} = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}.$$

Macierze kwadratowe (mają równą liczbę kolumn i wierszy) i prostokątne (mają różną liczbę kolumn i wierszy) oznaczać będziemy dużymi literami, pisanymi czcionką prostą i pogrubioną.

- ♦ Macierz kolumnowa - nazywać ją będziemy też wektorem, zawiera tylko jedną kolumnę składowych. Oznaczać ją będziemy tak jak wektory.
- ♦ Macierz jednostkowa - jest macierzą kwadratową, której składowe są równe zero, poza tymi, które leżą na głównej przekątnej (elementy diagonalne). Elementy diagonalne równe są jedności. Macierz jednostkową oznaczymy dużą literą **I** oraz w niektórych przypadkach indeksem wskazującym rozmiary tej macierzy:

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

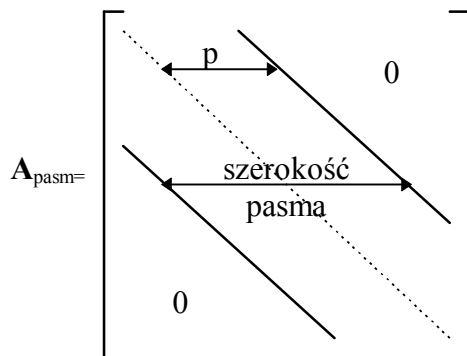
Składowe macierzy jednostkowej można zapisać przy pomocy delty Kroneckera  $\mathbf{I} = [\delta_{ij}]$ , gdzie  $\delta_{ii} = 1$ ,  $\delta_{ij} = 0$ , gdy  $i \neq j$ .

- ♦ Macierz trójkątna - jest macierzą zawierającą składowe zerowe ponad główną przekątną (**L**-macierz trójkątna dolna) lub poniżej (**U**-macierz trójkątna górna)

$$\mathbf{L} = [L_{ij}] = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U} = [U_{ij}] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{bmatrix}.$$

- ♦ Macierz pasmowa - jest macierzą zawierającą różne od zera składowe tylko w pobliżu głównej przekątnej



$p$  - szerokość półpasma

W metodzie elementów skończonych, po odpowiednim przegrupowaniu równań równowagi, macierzami pasmowymi są macierze sztywności.

- ♦ Macierz symetryczna - jest macierzą o składowych spełniających równanie

$$\mathbf{A}_{\text{sym}} \rightarrow [A_{ij}] = [A_{ji}]$$

W metodzie elementów skończonych macierzami symetrycznymi są macierze sztywności.

- ♦ Macierz transponowana - jest macierzą, w której przegrupowano składowe tak, że kolumny stały się wierszami:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \rightarrow [B_{ij}] = [A_{ji}].$$

Transpozycję macierzy oznaczać będziemy dużą, prostą literą T, pisaną jako indeks górny.

- ♦ Główna przekątna macierzy jest tą przekątną, która przebiega od składowej  $A_{11}$  przez pozostałe składowe o równych indeksach wiersza i kolumny, tzn.  $A_{22} \dots A_{ii} \dots A_{nn}$ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{główna przekątna}$$

## D1.2. DODAWANIE I ODEJMOWANIE MACIERZY

Operację dodawania macierzy definiujemy następująco:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \rightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij},$$

czyli składowe macierzy  $\mathbf{C}$ , która jest wynikiem dodawania macierzy  $\mathbf{A}$  oraz macierzy  $\mathbf{B}$  są sumami odpowiednich składowych  $\mathbf{A}$  oraz  $\mathbf{B}$ . Dodawanie macierzy możliwe jest tylko wtedy, gdy oba składniki ( $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$ ) mają jednakową liczbę wierszy i kolumn. Dodawanie jest operacją przemienną:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$

Analogicznie definiujemy odejmowanie macierzy:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \rightarrow D_{ij} = A_{ij} - B_{ij}.$$

*Przykład nr 1.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (1+0) & (3+2) & (8+1) & (2+0) \\ (2+3) & (4+2) & (1+5) & (-2+1) \\ (-1+0) & (0+2) & (3+1) & (4+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (1-0) & (3-2) & (8-1) & (2-0) \\ (2-3) & (4-2) & (1-5) & (-2-1) \\ (-1-0) & (0-2) & (3-1) & (4-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & -3 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

### D1.3. MNOŻENIE MACIERZY PRZEZ SKALAR (SKALOWANIE MACIERZY)

Skalowaniem macierzy nazywamy operację na jej składowych zdefiniowaną następująco:

$$\mathbf{E} = \alpha \mathbf{A} \rightarrow E_{ij} = \alpha A_{ij},$$

czyli składowe macierzy  $\mathbf{E}$ , które powstają w wyniku pomnożenia macierzy  $\mathbf{A}$  przez skalar  $\alpha$  są iloczynami składowych macierzy  $\mathbf{A}$  i liczby  $\alpha$ .

*Przykład nr 2.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \alpha=3.5,$$

$$\mathbf{E} = 3.5\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3.5 & 10.5 & 28.0 & 7.0 \\ 7.0 & 14.0 & 3.5 & -7.0 \\ -3.5 & 0.0 & 10.5 & 14.0 \end{bmatrix}.$$

Powstała w wyniku skalowania macierz  $\mathbf{E}$  ma oczywiście taką samą liczbę wierszy i kolumn jak macierz  $\mathbf{A}$ .

### D1.4. MNOŻENIE MACIERZY

Niech  $\mathbf{C}$  będzie wynikiem mnożenia macierzy  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B},$$

wtedy składowe macierzy  $\mathbf{C}$  powstają jako wynik mnożenia wierszy macierzy  $\mathbf{A}$  przez kolumny macierzy  $\mathbf{B}$ , co zapisać można następująco:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj},$$

gdzie  $n$  - ilością kolumn macierzy  $\mathbf{A}$ . Jak widać mnożenie macierzy  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  tylko wtedy jest wykonywalne, gdy ilość kolumn macierzy  $\mathbf{A}$  jest taka sama jak ilość wierszy macierzy  $\mathbf{B}$ . Macierz  $\mathbf{C}$ , która powstaje w wyniku mnożenia ma ilość wierszy równą ilości wierszy macierzy  $\mathbf{A}$  a liczbę kolumn równą liczbie kolumn macierzy  $\mathbf{B}$ .

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1j} & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2j} & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nj} & B_{nm} \end{bmatrix}$$

Przykład nr 3.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}^T$$

				0	3	0	
				2	2	2	
				1	5	1	
				0	1	3	
$\mathbf{A}\mathbf{B}^T =$	1	3	8	2	$1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 2 \cdot 0 =$ $= 14$	$1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 5 + 2 \cdot 1 =$ $= 51$	$1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 8 \cdot 1 + 2 \cdot 3 =$ $= 20$
	2	4	1	-2	$2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 =$ $= 9$	$2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 5 - 2 \cdot 1 =$ $= 17$	$2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 =$ $= 3$
	-1	0	3	4	$-1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 =$ $= 3$	$-1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 =$ $= 16$	$-1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 =$ $= 15$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 14 & 51 & 20 \\ 9 & 17 & 3 \\ 3 & 16 & 15 \end{bmatrix}.$$

Przykład nr 4.

Ciekawy wynik daje mnożenie macierzy wierszowej przez macierz kolumnową:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b},$$

$$\mathbf{c} = [1 \ 2 \ 3 \ 4] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2)) = 2,$$

Wynikiem jest macierz  $\mathbf{c}$  o wymiarach  $1 \times 1$  czyli skalar.

Mnożenie wektorów  $\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}$  nazywa się więc mnożeniem skalarnym.

Mnożenie macierzy nie jest na ogół operacją przemienną, tzn.  $\mathbf{A} \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \mathbf{A}$ , nawet, gdy uda się je wykonać (możliwe jest to dla macierzy kwadratowych).

Podamy jeszcze niektóre warte zapamiętania definicje, dotyczące mnożenia macierzy:

$$(\mathbf{A} \mathbf{B}) \mathbf{C} = \mathbf{A} (\mathbf{B} \mathbf{C}),$$

$$\mathbf{A} (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{A} \mathbf{C},$$

$$\mathbf{A} \mathbf{I} = \mathbf{I} \mathbf{A} = \mathbf{A},$$

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T.$$

## D1.5. WYZNACZNIK MACIERZY

Wyznacznik jest skalarną funkcją macierzy kwadratowej, którą zapisujemy następująco:

$$\det \mathbf{A} = |A_{ij}|.$$

Obliczenie wartości wyznacznika polega na sumowaniu iloczynów utworzonych ze wszystkich permutacji składowych macierzy  $\mathbf{A}$ :

$$\det \mathbf{A} = \sum_p (-1)^{I_p} A_{1\alpha_1} A_{2\alpha_2} A_{3\alpha_3} \dots A_{n\alpha_n},$$

gdzie  $p$  oznacza wszystkie permutacje,  $I_p$  - ilość inwersji w permutacjach.

Wartość wyznacznika obliczyć też można stosując tzw. rozwinięcie Laplace'a względem wyrazów dowolnego wiersza lub kolumny:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^n A_{mk} \bar{A}_{mk} - \text{rozwinięcie wiersza } m \ (1 \leq m \leq n)$$

lub

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^n A_{km} \bar{A}_{km} - \text{rozwinięcie kolumny } m \ (1 \leq m \leq n).$$

$\bar{A}_{ij}$  oznacza tu dopełnienie algebraiczne elementu  $A_{ij}$  macierzy:

$$\bar{A}_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}^*|,$$

gdzie  $|A_{ij}^*|$  jest minorem macierzy  $\mathbf{A}^* = [A_{ij}^*]$  czyli wyznacznikiem macierzy powstałej przez usunięcie z macierzy  $\mathbf{A}$  wiersza  $i$  oraz kolumny  $j$ .

Rozwinięcie Laplace'a należy prowadzić tak długo, aż otrzymamy macierze 2x2, których wyznaczniki można obliczyć bezpośrednio:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}.$$

Znany jest też sposób (reguła Sarrusa) obliczenia wyznaczników 3x3:

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= B_{11}B_{22}B_{33} + B_{21}B_{32}B_{13} + B_{31}B_{12}B_{23} - B_{31}B_{22}B_{13} - B_{21}B_{12}B_{33} - B_{11}B_{32}B_{23}.$$

Nie należy go jednak stosować dla macierzy o większej ilości wierszy i kolumn.

Warto też zapamiętać użyteczną zależność:

$$\det(\mathbf{A} \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B},$$

która pomoże nam efektywnie wyznaczać wyznaczniki iloczynów macierzy.

Gdy wyznacznik macierzy jest równy zeru, macierz taką nazywamy macierzą osobliwą.

## D1.6. MACIERZ ODWROTNA

Macierzą odwrotną do macierzy  $\mathbf{A}$  nazywamy macierz spełniającą warunek:

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Składowe macierzy odwrotnej można wyznaczyć przez skalowanie transponowanej macierzy dopełnień algebraicznych:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \overline{\mathbf{A}}^T = \frac{1}{|A_{ij}|} [\overline{A_{ij}}]^T = \frac{\left[ (-1)^{i+j} |A_{ij}^*| \right]^T}{|A_{ij}|},$$

gdzie  $\overline{\mathbf{A}} = [\overline{A_{ij}}]$  jest macierzą dopełnień algebraicznych:  $\overline{\mathbf{A}} = \left[ (-1)^{i+j} |A_{ij}^*| \right]$ ,

$|A_{ij}^*|$  - minorem czyli wyznacznikiem macierzy, która powstaje przez usunięcie z macierzy  $\mathbf{A}$  wiersza  $i$  i kolumny  $j$ .

Jak łatwo zauważyć, nie można znaleźć macierzy odwrotnej do macierzy osobliwej, gdyż wymagałoby to dzielenia przez zero.

Macierz  $\overline{\mathbf{A}}^T$  nazywana jest macierzą dołączoną macierzy  $\mathbf{A}$ . Macierz dołączoną można utworzyć dla dowolnej (nawet osobliwej) macierzy.

*Przykład nr 5.*

Poszukujemy macierzy odwrotnej do macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Obliczymy najpierw wyznacznik, aby przekonać się czy operacja odwrócenia macierzy będzie możliwa. Wyznacznik macierzy  $\mathbf{A}$  obliczymy, korzystając z reguły Sarrusa:

$$\det \mathbf{A} = (9 \cdot 9 \cdot 3) + (1 \cdot 5 \cdot 2) + (7 \cdot 6 \cdot 3) - (7 \cdot 9 \cdot 2) - (1 \cdot 6 \cdot 3) - (9 \cdot 5 \cdot 3) = 100.$$

Obliczamy kolejne dopełnienia algebraiczne:

$$\begin{aligned} \overline{A}_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 12, & \overline{A}_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 18, \\ \overline{A}_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -58, & \overline{A}_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -8, \\ \overline{A}_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 13, & \overline{A}_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -3, \\ \overline{A}_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 0, & \overline{A}_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -25, \end{aligned}$$



$$\bar{A}_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 75,$$

a stąd mamy

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.12 & -0.08 & 0.0 \\ 0.18 & 0.13 & -0.25 \\ -0.58 & -0.03 & 0.75 \end{bmatrix}.$$

## D1.7. ROZKŁAD NA MACIERZE TRÓJKĄTNE

Macierz nieosobliwą  $\mathbf{A}$  rozłożyć można na iloczyn macierzy trójkątnych:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{U},$$

gdzie  $\mathbf{L}$  jest macierzą trójkątną dolną, a  $\mathbf{U}$  macierzą trójkątną górną. Proces taki nazywamy triangularyzacją, dekompozycją lub faktoryzacją macierzy.

Metoda dekompozycji macierzy zapoczątkowana została przez M.H.Doolittle'a (1878) a później odkrywana była jeszcze kilkakrotnie przez: Cholesky'ego (ok.1916), A.C.Aitkena (1932), T.Banachewicza (1938) oraz P.D.Crouta (1941). Metodę Cholesky'ego opisał Benoit w 1924 r.

Składowe macierzy trójkątnych  $\mathbf{L}$  i  $\mathbf{U}$  obliczyć można, korzystając z procedur zaproponowanych przez Crouta lub Banachewicza:

$$L_{ii} = 1, i = 1 \dots n,$$

$$U_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj}, j = i \dots n,$$

$$L_{ij} = \frac{1}{U_{jj}} \left( A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} U_{kj} \right), i = j \dots n.$$

Obliczanie składowych wykonuje się na zmianę wierszami dla macierzy  $\mathbf{U}$  i kolumnami dla macierzy  $\mathbf{L}$  (metoda Crouta) lub kolejno wiersz macierzy  $\mathbf{U}$ , wiersz macierzy  $\mathbf{L}$  (metoda Banachewicza [15]).

Rozkład na macierze trójkątne ma bardzo duże znaczenie praktyczne, gdyż jest używany jako efektywna metoda rozwiązywania układów równań liniowych.

Rozwiązanie układu równań

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

można uzyskać dwuetapowo. W etapie pierwszym stosujemy podstawienia  $\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{U} \mathbf{x} = \mathbf{z}$ , które upraszczają nam układ równań do postaci:

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}\mathbf{x}) = \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{L}\mathbf{z} = \mathbf{y},$$

która ułatwia rozwiązanie:

$$z_1 = \frac{y_1}{L_{11}},$$

$$z_2 = (y_2 - L_{21}z_1) \frac{1}{L_{22}}, \text{ itd.},$$

$$z_i = \left( y_i - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}z_k \right) \frac{1}{L_{ii}}.$$

Procedura zastosowana tutaj nazywa się podstawieniem w przód, gdyż sekwencyjnie wyliczamy niewiadome  $z_1, z_2 \dots z_i \dots z_n$ .

Etap drugi polega na wyznaczeniu wartości niewiadomych z równania

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{z},$$

co robimy podobną metodą, tyle że stosujemy podstawienie wstecz, zaczynając od ostatniej składowej:

$$x_n = \frac{z_{nn}}{U_{nn}},$$

$$x_{n-1} = (z_{n-1} - U_{n-1n}x_n) \frac{1}{U_{n-1n-1}}, \text{ itd.},$$

$$x_i = \left( z_i - \sum_{k=i+1}^n U_{ik}x_k \right) \frac{1}{L_{ii}}.$$

Czas rozwiązania układu równań tą metodą proporcjonalny jest do  $n^3/3$ , gdzie  $n$  jest ilością równań. Liczba  $T_D = n^3/3$  nazywana jest kosztem metody Doolittle'a, i jest szacunkową ilością mnożeń i dzieleni, które trzeba wykonać aby rozwiązać układ równań.

## D1.8. TRIANGULARYZACJA MACIERZY SYMETRYCZNYCH

Gdy macierz kwadratowa jest symetryczna (i oczywiście nieosobliwa) można podany w poprzednim punkcie rozkład jeszcze uprościć zauważając, że:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \text{ lub } \mathbf{A} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}.$$

Algorytm rozkładu macierzy symetrycznej  $\mathbf{A}$  na macierze trójkątne podał jako pierwszy Cholesky (w 1916), a niezależnie od niego Banachewicz (w 1938). Metoda zwykle nazywana jest metodą Cholesky'ego. W Polsce używana jest nazwa metoda Banachewicza-Cholesky'ego.

Składowe macierzy trójkątnej dolnej wyznaczonej tą metodą są równe:

$$L_{ij} = 0 \text{ dla } j > i,$$

$$L_{ii} = \sqrt{A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2},$$

$$L_{ij} = \left( A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk} \right) \frac{1}{L_{jj}} \text{ dla } j < i.$$

W równaniach określających składowe leżące na głównej przekątnej macierzy  $\mathbf{L}$  występuje pierwiastek kwadratowy. Wyrażenie pod pierwiastkiem może być oczywiście ujemne, wtedy wyrazy macierzy  $\mathbf{L}$  są zespolone. Można jednak udowodnić [5], że dla macierzy symetrycznych, dodatnio określonych składowe  $L_{ii}$  są zawsze liczbami rzeczywistymi.

Czas dekompozycji macierzy symetrycznej metodą Banachewicza-Cholesky'ego jest proporcjonalny do  $T_{B-CH} = n^3/6$ .

*Przykład nr 6.*

Znaleźć macierz trójkątną dolną  $\mathbf{L}$  taką, że  $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ . Należy wykorzystać metodę Banachewicza-Cholesky'ego

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 15 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 13 & 4 \\ -1 & -3 & 4 & 12 \end{bmatrix}.$$

Wyznamy kolejne, różne od zera składowe macierzy trójkątnej dolnej  $\mathbf{L}$ :

$$L_{11} = \sqrt{A_{11}} = \sqrt{10} = 3.16228,$$

$$L_{21} = A_{21} \frac{1}{L_{11}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0.32623,$$

$$L_{22} = \sqrt{A_{22} - L_{12}^2} = \sqrt{15 - \left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} = 3.86005,$$

$$L_{31} = A_{31} \frac{1}{L_{11}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = 0.63246,$$

$$L_{32} = \left( A_{32} - L_{31} L_{21} \right) \frac{1}{L_{22}} = \left( 2 - \frac{2}{\sqrt{10}} \frac{1}{\sqrt{10}} \right) \frac{1}{\sqrt{14.9}} = 0.46631,$$

$$L_{33} = \sqrt{A_{33} - (L_{31}^2 + L_{32}^2)} = \sqrt{13 - \left( \left( \frac{2}{\sqrt{10}} \right)^2 + \left( \frac{1.8}{\sqrt{14.9}} \right)^2 \right)} = 3.51888,$$

$$L_{41} = A_{41} \frac{1}{L_{11}} = -0.31623,$$

$$L_{42} = (A_{42} - L_{41}L_{21}) \frac{1}{L_{22}} = -0.75129,$$

$$L_{43} = (A_{43} - (L_{41}L_{31} + L_{42}L_{32})) \frac{1}{L_{33}} = 1.29312,$$

$$L_{44} = \sqrt{A_{44} - (L_{41}^2 + L_{42}^2 + L_{43}^2)} = 3.10860.$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 3.16228 & 0 & 0 & 0 \\ 0.31623 & 3.86005 & 0 & 0 \\ 0.63246 & 0.46631 & 3.51888 & 0 \\ -0.31623 & -0.75129 & 1.29312 & 3.10860 \end{bmatrix}$$

## D1.9. MACIERZE ORTOGONALNE

Istnieje grupa macierzy mająca własność:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T,$$

która niezwykle uprasza rozwiązywanie układu równań. O macierzach tych mówimy, że są macierzami ortogonalnymi. Własność tą wykazują macierze obrotów wektorów:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix},$$

gdzie  $c = \cos \alpha$ ,  $s = \sin \alpha$ , a  $\alpha$  jest kątem obrotu.

Sprawdzimy ortogonalność tej macierzy równaniem  $\mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ :

$$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 + s^2 & cs - sc \\ sc - cs & c^2 + s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tą własność macierzy obrotu wykorzystujemy w wielu rozdziałach książki.

DODATEK NR 1. ALGEBRA MACIERZY .....	135
D1.1. DEFINICJE .....	135
D1.2. DODAWANIE I ODEJMOWANIE MACIERZY.....	137
D1.3. MNOŻENIE MACIERZY PRZEZ SKALAR (SKALOWANIE MACIERZY).....	138
D1.4. MNOŻENIE MACIERZY .....	138
D1.5. WYZNACZNIK MACIERZY .....	140
D1.6. MACIERZ ODWROTNA.....	141
D1.7. ROZKŁAD NA MACIERZE TRÓJKĄTNE.....	143
D1.8. TRIANGULARYZACJA MACIERZY SYMETRYCZNYCH .....	144
D1.9. MACIERZE ORTOGONALNE .....	146