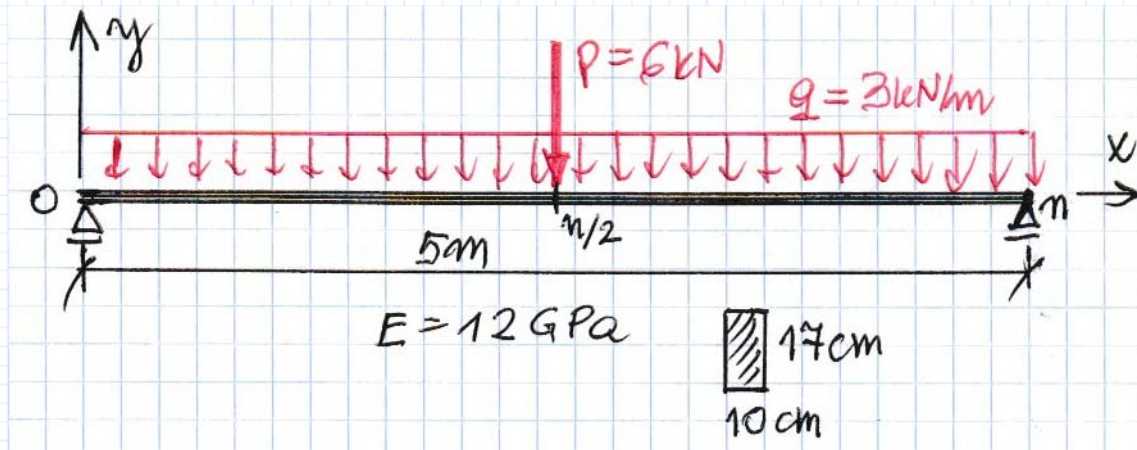


Ugięcie belki obliczone metodą różnic skończonych



ORIGIN := 0

$E := 12 \cdot \text{GPa}$ - moduł Younga drewna

$b := 10 \cdot \text{cm}$ - szerokość przekroju poprzecznego

$h := 17 \cdot \text{cm}$ - wysokość przekroju poprzecznego

$J := b \cdot \frac{h^3}{12}$ $J = 4094.167 \text{ cm}^4$ - moment bezwładności przekroju poprzecznego

$P := 6 \cdot \text{kN}$ $q := 3 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ $L1 := 2.5 \cdot \text{m}$ $L := 5 \cdot \text{m}$ - oznaczenia sił i odległości

Reakcje podpór

$$R0 := \frac{P + q \cdot L}{2} = 10.500 \text{ kN}$$

$$\Delta := 50 \cdot \text{cm} \quad \alpha := \frac{\Delta^2}{E \cdot J} = 508.854 \frac{1}{\text{GN}}$$

- parametr równania różnicowego - "podatność belki"

$$n := \frac{L}{\Delta} = 10 \quad n1 := \frac{L1}{\Delta} = 5$$

Definicja funkcji momentów zginających

$$M1(x) := R0 \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} \quad x \in (0, L1)$$

$$M2(x) := M1(x) - P \cdot (x - L1) \quad x \in (L1, L)$$

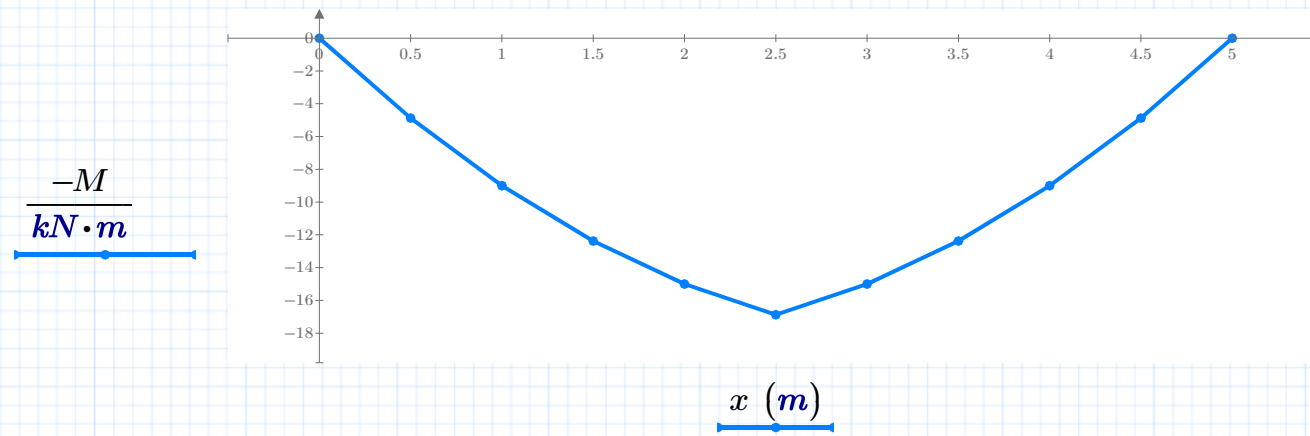
Współrzędne X punktów węzłowych

$$i := 0 \dots n \quad x_i := i \cdot \Delta$$

Obliczanie wartości momentów zginających

$$i := 0 \dots n1 \quad M_i := M1(x_i) \quad i := n1 + 1 \dots n \quad M_i := M2(x_i)$$

Wykres momentów zginających



$$M = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 4.875 \\ 9.000 \\ 12.375 \\ 15.000 \\ 16.875 \\ 15.000 \\ 12.375 \\ 9.000 \\ 4.875 \\ 0.000 \end{bmatrix} \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$x = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.5 \\ 1.0 \\ 1.5 \\ 2.0 \\ 2.5 \\ 3.0 \\ 3.5 \\ 4.0 \\ 4.5 \\ 5.0 \end{bmatrix} \text{ m}$$

Tworzenie macierzy różnic skończonych

$$i := 0 \dots n \quad A_{i,i} := -2 \quad i := 1 \dots n \quad A_{i,i-1} := 1 \quad i := 0 \dots n-1 \quad A_{i,i+1} := 1$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.875 \\ 9 \\ 12.375 \\ 15 \\ 16.875 \\ 15 \\ 12.375 \\ 9 \\ 4.875 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN}\cdot\text{m}$$

Warunki brzegowe: $y_0 = 0$ $y_n = 0$

$i := 0 \dots n$ $A_{0,i} := 0$ <-----modyfikacja wiersza 0 , warunek brzegowy $y_0 = 0$ $A_{0,0} := 1$

$i := 0 \dots n$ $A_{n,i} := 0$ <-----modyfikacja wiersza n , warunek brzegowy $y_n = 0$ $A_{n,n} := 1$

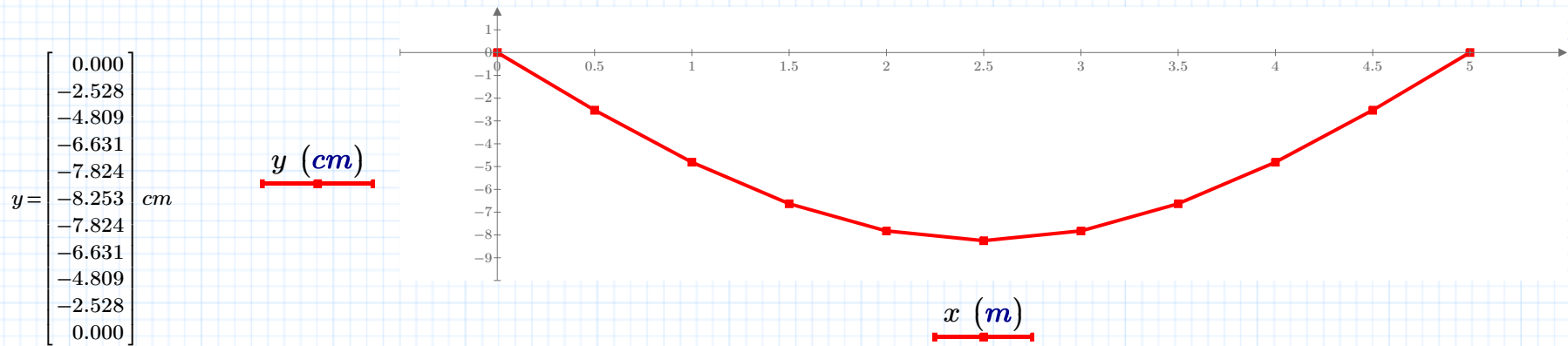
$$A \cdot y = \alpha M$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 4.875 \\ 9.000 \\ 12.375 \\ 15.000 \\ 16.875 \\ 15.000 \\ 12.375 \\ 9.000 \\ 4.875 \\ 0.000 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

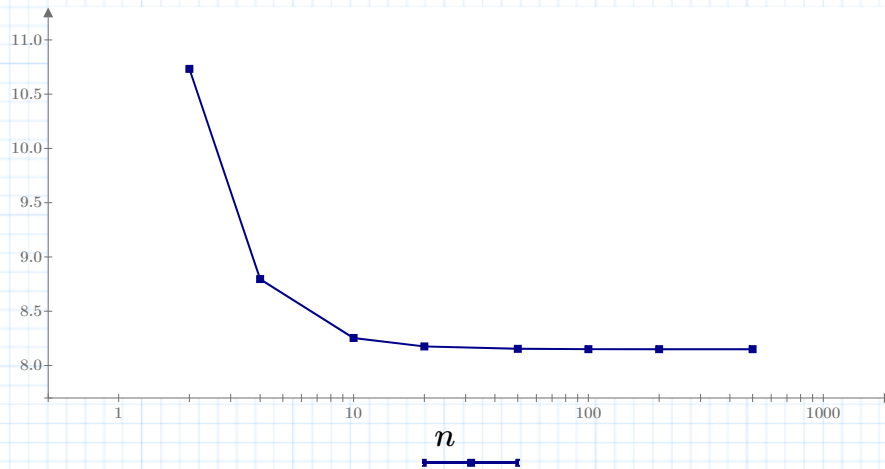
Metoda implicit - należy rozwiązać układ równań $y := \text{lsolve}(A, \alpha \cdot M)$

Ugięcie belki



$$n = 10 \quad \min(y) = -8.252977 \text{ cm}$$

sprawdzenie zbieżności rozwiązania numerycznego



$$n := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \\ 20 \\ 50 \\ 100 \\ 200 \\ 500 \end{bmatrix} \quad u := \begin{bmatrix} 10.73364 \\ 8.795622 \\ 8.252977 \\ 8.175456 \\ 8.153750 \\ 8.150649 \\ 8.149874 \\ 8.149657 \end{bmatrix} \cdot \text{cm}$$

ugięcie obliczone analitycznie:

$$y_{\max} := \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot L^4}{E \cdot J} + \frac{1}{48} \cdot \frac{P \cdot L^3}{E \cdot J} = 8.149616 \text{ cm}$$