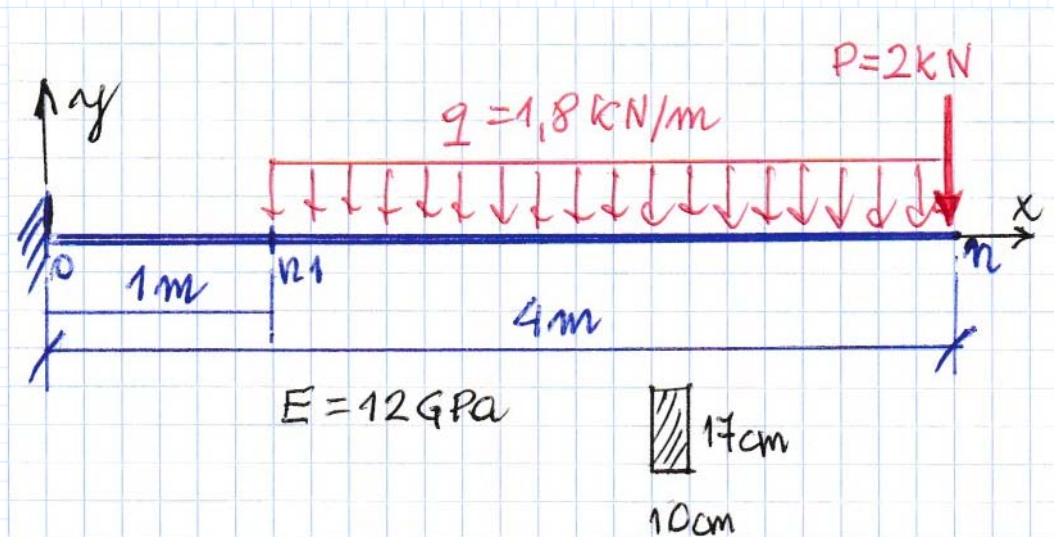


Ugięcie belki obliczone metodą różnic skończonych



ORIGIN := 0

$E := 12 \cdot \text{GPa}$ - moduł Younga drewna

$b := 10 \cdot \text{cm}$ - szerokość przekroju poprzecznego

$h := 17 \cdot \text{cm}$ - wysokość przekroju poprzecznego

$J := b \cdot \frac{h^3}{12}$ $J = 4094.167 \text{ cm}^4$ - moment bezwładności przekroju poprzecznego

$P := 2 \cdot \text{kN}$ $q := 1.8 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ $L1 := 1 \cdot \text{m}$ $L := 4 \cdot \text{m}$ - oznaczenia sił i odległości

Reakcje podpór

$$R0 := P + q \cdot (L - L1) = 7.400 \text{ kN}$$

$$\Delta := 50 \cdot \text{cm} \quad \alpha := \frac{\Delta^2}{E \cdot J} = 508.854 \frac{1}{\text{GN}} \quad - \text{ parametr równania różnicowego - "podatność belki"}$$

$$n := \frac{L}{\Delta} = 8 \quad n1 := \frac{L1}{\Delta} = 2$$

Definicja funkcji momentów zginających

$$M2(x) := -P \cdot (L - x) - q \cdot \frac{(L - x)^2}{2} \quad x \in (L1, L)$$

$$M1(x) := M2(x) + q \cdot \frac{(L1 - x)^2}{2} \quad x \in (0, L1)$$

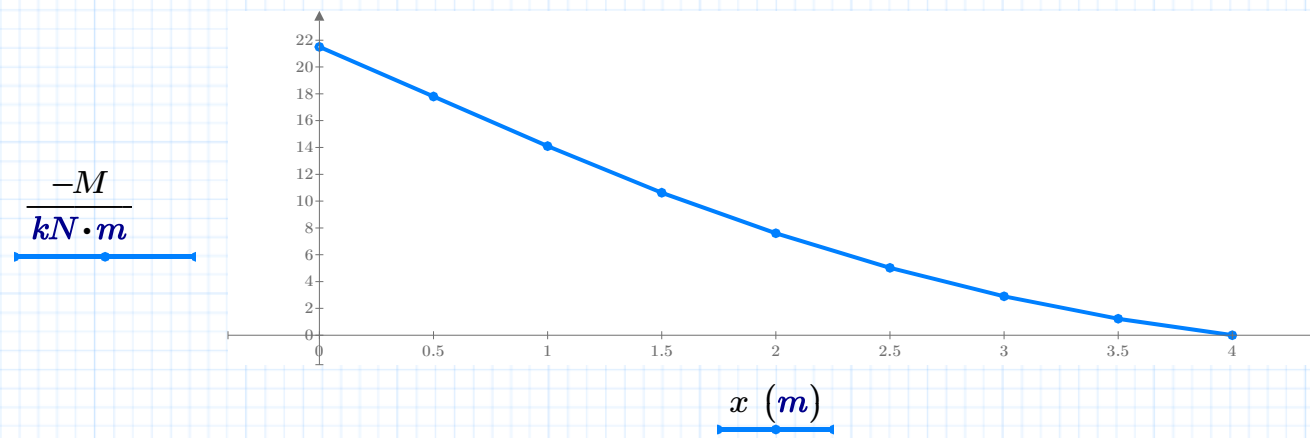
Współrzędne X punktów węzłowych

$$i := 0 \dots n \quad x_i := i \cdot \Delta$$

Obliczanie wartości momentów zginających

$$i := 0 \dots n1 \quad M_i := M1(x_i) \quad i := n1 + 1 \dots n \quad M_i := M2(x_i)$$

Wykres momentów zginających



$$M = \begin{bmatrix} -21.500 \\ -17.800 \\ -14.100 \\ -10.625 \\ -7.600 \\ -5.025 \\ -2.900 \\ -1.225 \\ 0.000 \end{bmatrix} kN \cdot m$$

$$x = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.5 \\ 1.0 \\ 1.5 \\ 2.0 \\ 2.5 \\ 3.0 \\ 3.5 \\ 4.0 \end{bmatrix} m$$

Tworzenie macierzy różnic skończonych

$$i := 0 \dots n \quad A_{i,i} := -2 \quad i := 1 \dots n \quad A_{i,i-1} := 1 \quad i := 0 \dots n-1 \quad A_{i,i+1} := 1$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -21.5 \\ -17.8 \\ -14.1 \\ -10.625 \\ -7.6 \\ -5.025 \\ -2.9 \\ -1.225 \\ 0 \end{bmatrix} kN \cdot m$$

Warunki brzegowe: $y_0 = 0$ $\varphi_0 = 0$

$i := 0 \dots n$ $A_{0,i} := 0$ *<-----modyfikacja wiersza 0 , warunek brzegowy* $\varphi_0 = 0$ $A_{0,1} := 2$

$i := 0 \dots n$ $A_{n,i} := 0$ *<-----modyfikacja wiersza n , warunek brzegowy* $y_0 = 0$ $A_{n,0} := 1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A \cdot y = \alpha M$$

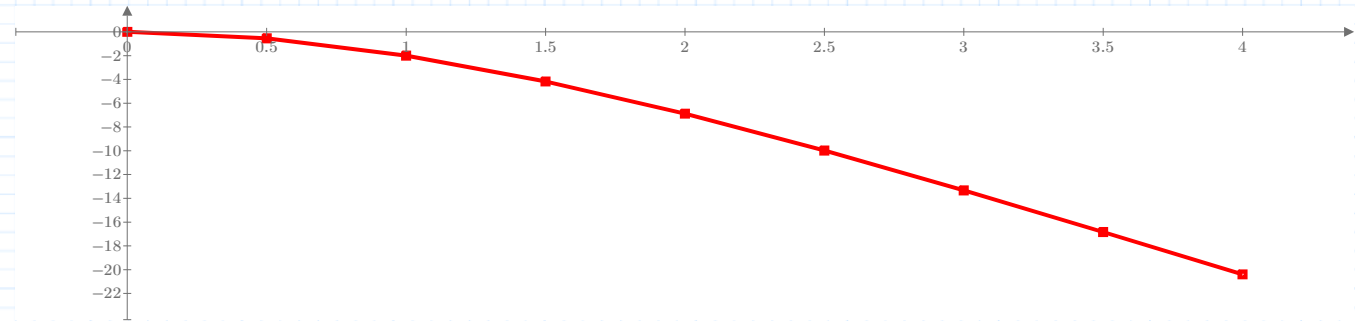
$$M = \begin{bmatrix} -21.500 \\ -17.800 \\ -14.100 \\ -10.625 \\ -7.600 \\ -5.025 \\ -2.900 \\ -1.225 \\ 0.000 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Metoda implicit - należy rozwiązać układ równań $y := \text{lsolve}(A, \alpha \cdot M)$

Ugięcie belki

$$y = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -0.547 \\ -2.000 \\ -4.170 \\ -6.881 \\ -9.979 \\ -13.332 \\ -16.833 \\ -20.396 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

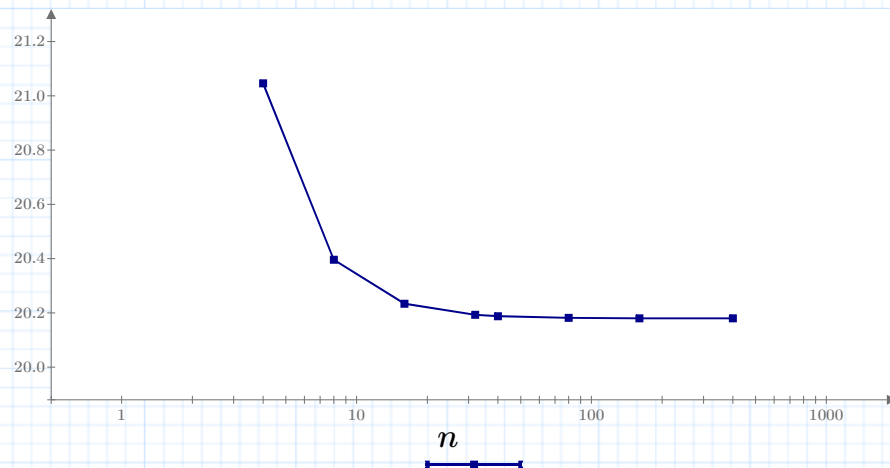
$y \text{ (cm)}$



$x \text{ (m)}$

$$n=8 \quad \min(y) = -20.396 \text{ cm}$$

sprawdzenie zbieżności rozwiązania numerycznego



n

$u \text{ (cm)}$

$$n := \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 16 \\ 32 \\ 40 \\ 80 \\ 160 \\ 400 \end{bmatrix} \quad u := \begin{bmatrix} 21.046 \\ 20.396 \\ 20.234 \\ 20.193 \\ 20.188 \\ 20.182 \\ 20.180 \\ 20.180 \end{bmatrix} \cdot \text{cm}$$

Metoda explicit -rozwiązanie iteracyjne bez układu równań

oznaczymy ugięcia obliczone tą metodą przez u_i

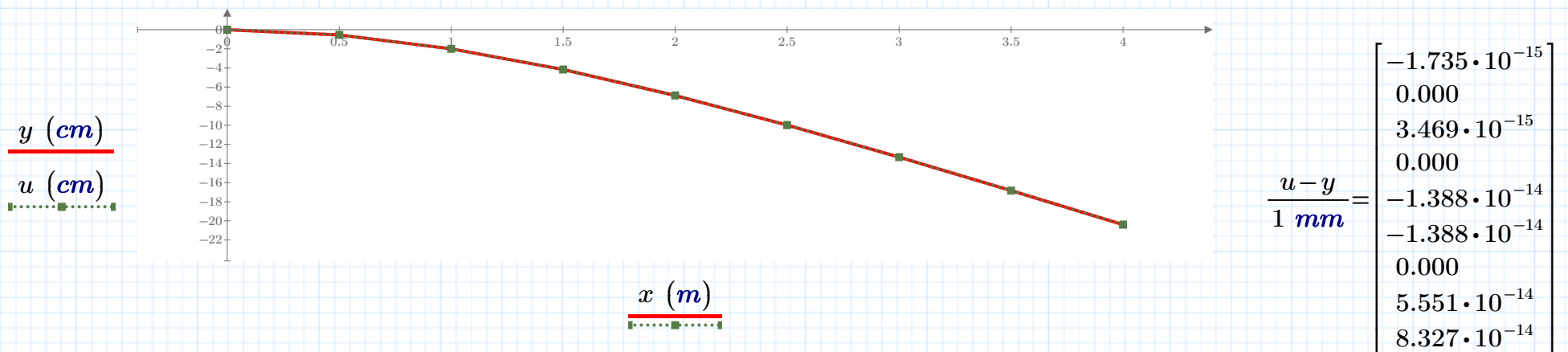
Podstawiamy warunki brzegowe: $y_0 = 0$ $\varphi_0 = 0$ -----> $2 \cdot y_1 = \alpha M_0$ -----> $y_1 = \frac{\alpha}{2} \cdot M_0$
 $u_0 := 0 \text{ cm}$ $u_1 := \frac{\alpha}{2} \cdot M_0$

Z równania krzywizny wyznaczamy pozostałe przemieszczenia: $y'' = \frac{M(x)}{E \cdot J}$ -----> $y_{i-1} - 2 y_i + y_{i+1} = \alpha \cdot M_i$

$$u_{i+1} = 2 u_i - u_{i-1} + \alpha \cdot M_i$$

$$n := \frac{L}{\Delta} \quad i := 1 \dots n-1 \quad u_{i+1} := 2 u_i - u_{i-1} + \alpha \cdot M_i$$

Ugięcie belki



jak widać na wykresie ugięcia są praktycznie identyczne