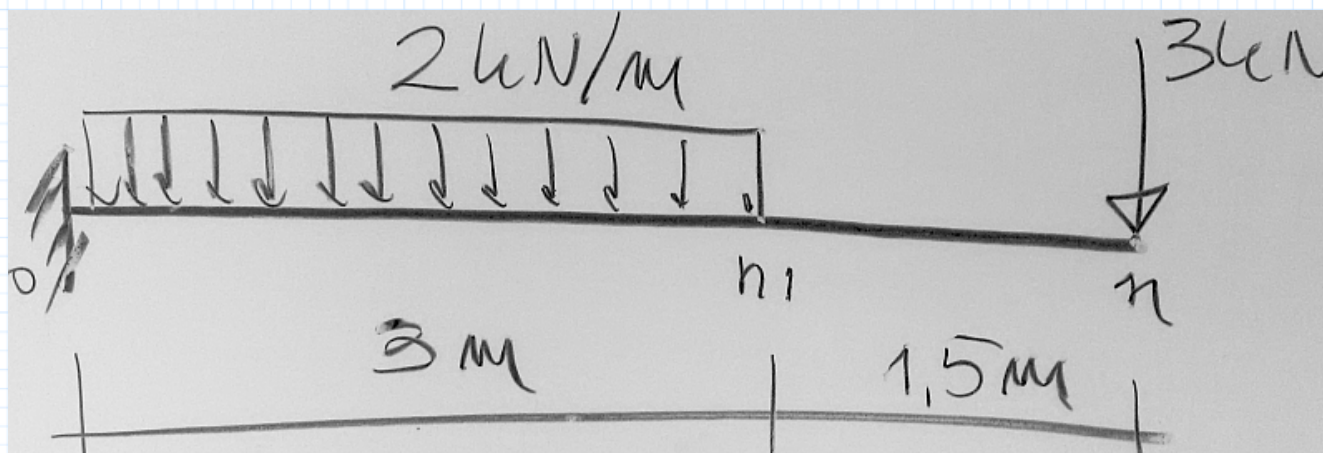


Ugięcie belki obliczone metodą różnic skończonych



ORIGIN := 0

$E := 13 \cdot \text{GPa}$ - moduł Younga drewna

$b := 11 \cdot \text{cm}$ - szerokość przekroju poprzecznego

$h := 19 \cdot \text{cm}$ - wysokość przekroju poprzecznego

$J := b \cdot \frac{h^3}{12}$ $J = 6287.417 \text{ cm}^4$ - moment bezwładności przekroju poprzecznego

$P := 3 \cdot \text{kN}$ $q := 2 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ $x1 := 1 \cdot \text{m}$ $L := 4.5 \cdot \text{m}$ - oznaczenia sił i odległości

Reakcji podpór można nie obliczać przy tym schemacie belki

$$\Delta := 50 \cdot \text{cm} \quad \alpha := \frac{\Delta^2}{E \cdot J} = 305.861 \frac{1}{\text{GN}}$$

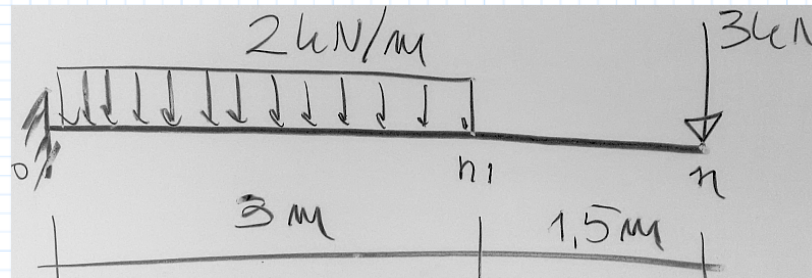
- parametr równania różnicowego - "podatność belki"

$$n := \frac{L}{\Delta} = 9 \quad n1 := \frac{x1}{\Delta} = 2$$

Definicja funkcji momentów zginających

$$M2(x) := -P \cdot (L - x) \quad x \in (x1, L)$$

$$M1(x) := M2(x) - q \cdot \frac{(x1 - x)^2}{2} \quad x \in (0, x1)$$



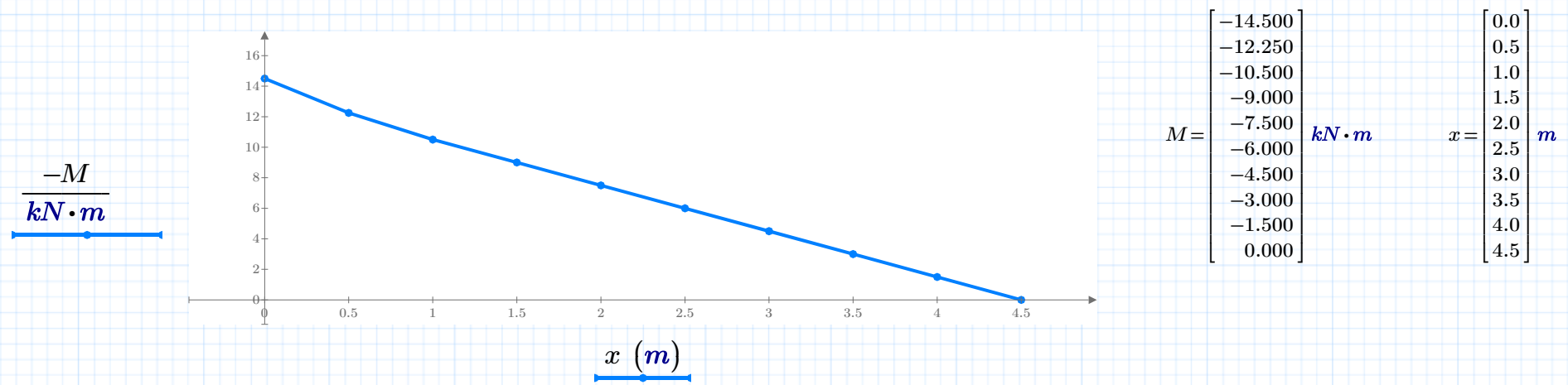
Współrzędne X punktów węzłowych

$$i := 0 \dots n \quad x_i := i \cdot \Delta$$

Obliczanie wartości momentów zginających

$$i := 0 \dots n1 \quad M_i := M1(x_i) \quad i := n1 + 1 \dots n \quad M_i := M2(x_i)$$

Wykres momentów zginających



Tworzenie macierzy różnic skończonych

$$i := 0 \dots n \quad A_{i,i} := -2 \quad i := 1 \dots n \quad A_{i,i-1} := 1 \quad i := 0 \dots n-1 \quad A_{i,i+1} := 1$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -14.5 \\ -12.25 \\ -10.5 \\ -9 \\ -7.5 \\ -6 \\ -4.5 \\ -3 \\ -1.5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Warunki brzegowe: $y_0 = 0$ $\varphi_0 = 0$

$i := 0 \dots n$ $A_{0,i} := 0$ <-----modyfikacja wiersza 0 , warunek brzegowy $\varphi_0 = 0$ $A_{0,1} := 2$

$i := 0 \dots n$ $A_{n,i} := 0$ <-----modyfikacja wiersza n , warunek brzegowy $y_0 = 0$ $A_{n,0} := 1$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A \cdot y = \alpha M$$

$$M = \begin{bmatrix} -14.500 \\ -12.250 \\ -10.500 \\ -9.000 \\ -7.500 \\ -6.000 \\ -4.500 \\ -3.000 \\ -1.500 \\ 0.000 \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

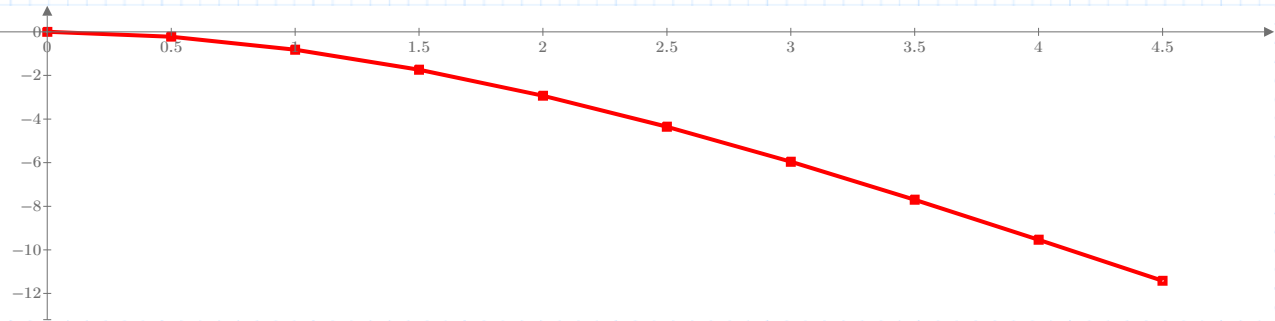
Metoda implicit - należy rozwiązać układ równań

$$y := \text{lsolve}(A, \alpha \cdot M)$$

Ugięcie belki

$$y = \begin{bmatrix} 0.000 \\ -0.222 \\ -0.818 \\ -1.736 \\ -2.929 \\ -4.351 \\ -5.957 \\ -7.700 \\ -9.535 \\ -11.416 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

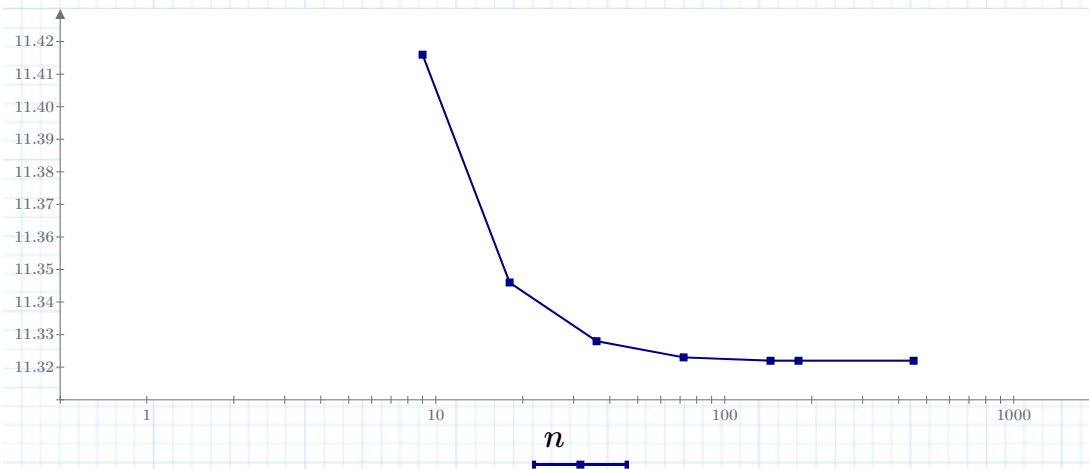
$y \text{ (cm)}$



$x \text{ (m)}$

$$n=9 \quad \min(y) = -11.416 \text{ cm}$$

sprawdzenie zbieżności rozwiązania numerycznego



$u \text{ (cm)}$

$$n := \begin{bmatrix} 9 \\ 18 \\ 36 \\ 72 \\ 144 \\ 180 \\ 450 \end{bmatrix} \quad u := \begin{bmatrix} 11.416 \\ 11.346 \\ 11.328 \\ 11.323 \\ 11.322 \\ 11.322 \\ 11.322 \end{bmatrix} \cdot \text{cm}$$

Metoda explicit -rozwiązanie iteracyjne bez układu równań

oznaczymy ugięcia obliczone tą metodą przez u_i

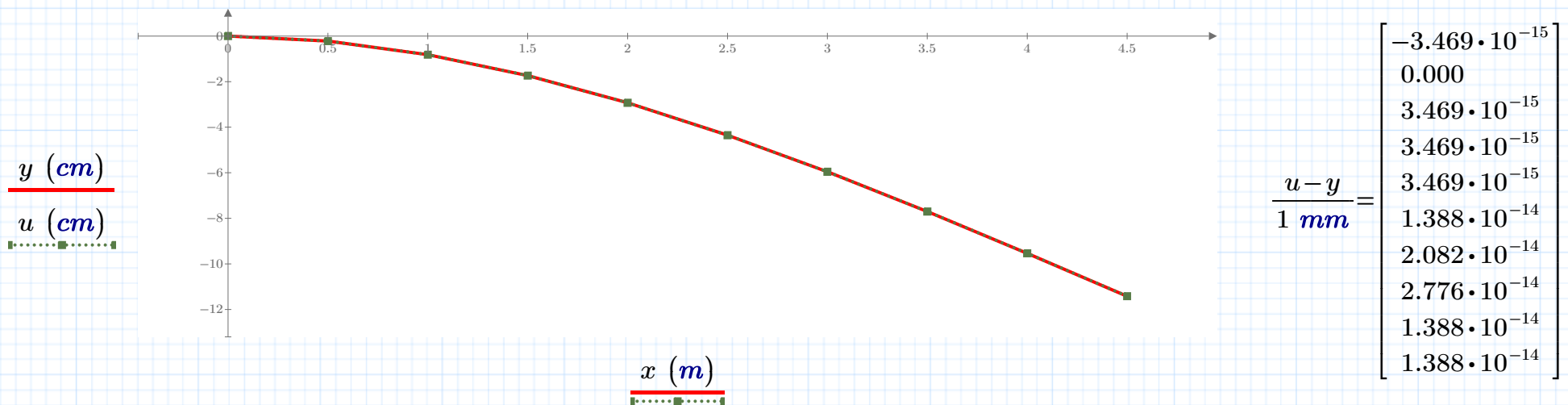
Podstawiamy warunki brzegowe: $y_0 = 0$ $\varphi_0 = 0$ -----> $2 \cdot y_1 = \alpha M_0$ -----> $y_1 = \frac{\alpha}{2} \cdot M_0$
 $u_0 := 0 \text{ cm}$ $u_1 := \frac{\alpha}{2} \cdot M_0$

Z równania krzywizny wyznaczamy pozostałe przemieszczenia: $y'' = \frac{M(x)}{E \cdot J}$ -----> $y_{i-1} - 2 y_i + y_{i+1} = \alpha \cdot M_i$

$$u_{i+1} = 2 u_i - u_{i-1} + \alpha \cdot M_i$$

$$n := \frac{L}{\Delta} \quad i := 1 \dots n-1 \quad u_{i+1} := 2 u_i - u_{i-1} + \alpha \cdot M_i$$

Ugięcie belki



jak widać na wykresie, ugięcia obliczone oboma sposobami są praktycznie identyczne