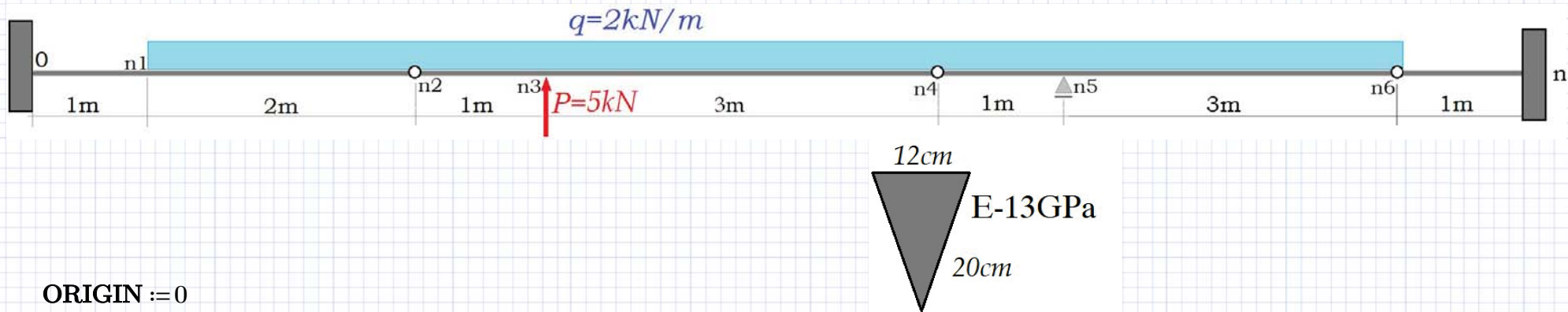


Ugięcie belki obliczone metodą różnic skończonych



ORIGIN := 0

$E := 13 \cdot \text{GPa}$ - moduł Younga drewna

$b := 12 \cdot \text{cm}$ - szerokość przekroju poprzecznego

$h := 20 \cdot \text{cm}$ - wysokość przekroju poprzecznego

$J := \frac{b \cdot h^3}{36}$ $J = 2666.667 \text{ cm}^4$ - moment bezwładności przekroju poprzecznego

$P := 5 \cdot \text{kN}$ $q := 2 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$ - oznaczenia obciążeń

$x1 := 1 \cdot \text{m}$ $x2 := 3 \text{ m}$ $x3 := 4 \text{ m}$ $x4 := 7 \text{ m}$ $x5 := 8 \text{ m}$ $x6 := 11 \text{ m}$ $L := 12 \cdot \text{m}$ - oznaczenia odległości

$\Delta := 50 \cdot \text{cm}$ $\alpha := \frac{\Delta^2}{E \cdot J} = 721.154 \frac{1}{\text{GN}}$ - parametr równania różnicowego - "podatność belki"

$$n := \frac{L}{\Delta} = 24 \quad n1 := \frac{x1}{\Delta} = 2 \quad n2 := \frac{x2}{\Delta} = 6 \quad n3 := \frac{x3}{\Delta} = 8 \quad n4 := \frac{x4}{\Delta} = 14 \quad n5 := \frac{x5}{\Delta} = 16 \quad n6 := \frac{x6}{\Delta} = 22$$

Siły w przegubach n2, n4



$$T2 := \frac{0.5 \cdot q \cdot (x4 - x2)^2 - P \cdot (x4 - x3)}{x4 - x2} = 250.000 \text{ N}$$

$$T4 := q \cdot (x4 - x2) - P - T2 = 2.750 \text{ kN}$$

Reakcja R5

$$R5 := \frac{T4 \cdot (x6 - x4) + 0.5 \cdot q \cdot (x6 - x4)^2}{x6 - x5} = 9.000 \text{ kN}$$

Definicja funkcji momentów zginających

$$M2(x) := T2 \cdot (x - x2) - q \cdot \frac{(x - x2)^2}{2} \quad x \in (x1, x3)$$

$$M1(x) := M2(x) + q \cdot \frac{(x1 - x)^2}{2} \quad x \in (0, x1)$$

$$M3(x) := M2(x) + P \cdot (x - x3) \quad x \in (x2, x5)$$

$$M4(x) := M3(x) + R5 \cdot (x - x5) \quad x \in (x5, x6)$$

$$M5(x) := M4(x) + q \cdot \frac{(x - x6)^2}{2} \quad x \in (x6, L)$$

Współrzędne X punktów węzłowych

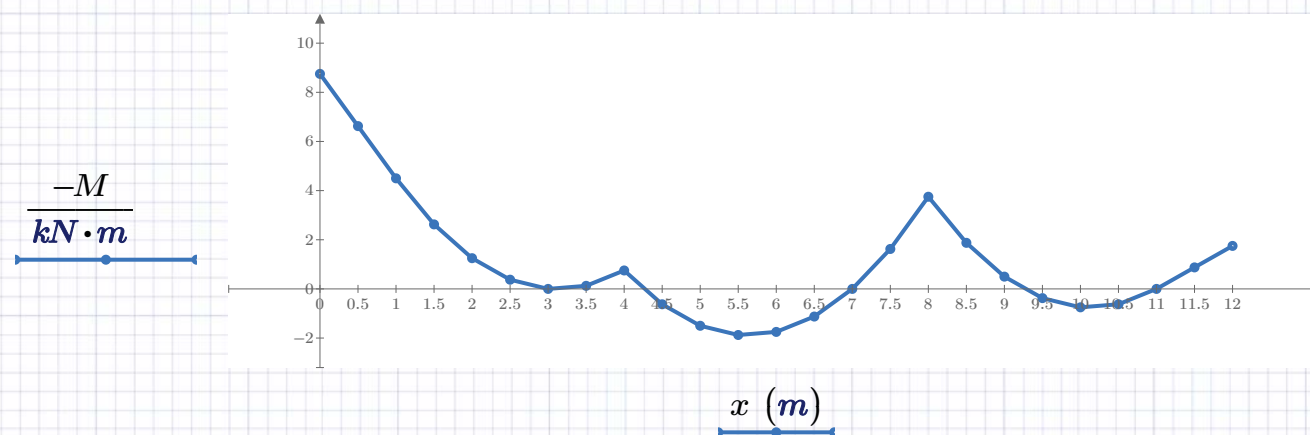
$$i := 0 \dots n \quad x_i := i \cdot \Delta$$

Obliczanie wartości momentów zginających

$$i := 0 \dots n1 \quad M_i := M1(x_i) \quad i := n1 \dots n3 \quad M_i := M2(x_i) \quad i := n3 \dots n5 \quad M_i := M3(x_i)$$

$$i := n5 \dots n6 \quad M_i := M4(x_i) \quad i := n6 \dots n \quad M_i := M5(x_i)$$

Wykres momentów zginających



$M =$	-8.750	$x =$	0.0
	-6.625		0.5
	-4.500		1.0
	-2.625		1.5
	-1.250		2.0
	-0.375		2.5
	0.000		3.0
	-0.125		3.5
	-0.750		4.0
	0.625		4.5
	1.500		5.0
	1.875		5.5
	1.750		6.0
	1.125		6.5
	0.000		7.0
	-1.625		7.5
	-3.750		8.0
	-1.875		8.5
	-0.500		9.0
	0.375		9.5
	0.750		10.0
	0.625		10.5
	0.000		11.0
	-0.875		11.5
	-1.750		12.0

Tworzenie macierzy różnic skończonych

$$i := 0..n \quad A_{i,i} := -2 \quad i := 1..n \quad A_{i,i-1} := 1 \quad i := 0..n-1 \quad A_{i,i+1} := 1$$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Warunki brzegowe: $y_0 = 0$ $\varphi_0 = 0 \rightarrow 2 \cdot y_1 = \alpha M_0$ $y_{n5} = 0$ $y_n = 0$ $\varphi_n = 0 \rightarrow 2 \cdot y_{n-1} = \alpha M_n$

$$B := \begin{bmatrix} n2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ n4 & n5 & 1 \\ n6 & n & 1 \\ n & n-1 & 2 \end{bmatrix} \quad i := 0 \dots \text{rows}(B) - 1 \quad k := 0 \dots n \quad A_{B_{i,0},k} := 0 \quad A_{B_{i,0},B_{i,1}} := B_{i,2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & & \ddots & & & \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} -8.750 \\ -6.625 \\ -4.500 \\ -2.625 \\ -1.250 \\ -0.375 \\ 0.000 \\ -0.125 \\ -0.750 \\ 0.625 \\ 1.500 \\ 1.875 \\ 1.750 \\ 1.125 \\ 0.000 \\ \vdots \end{bmatrix} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

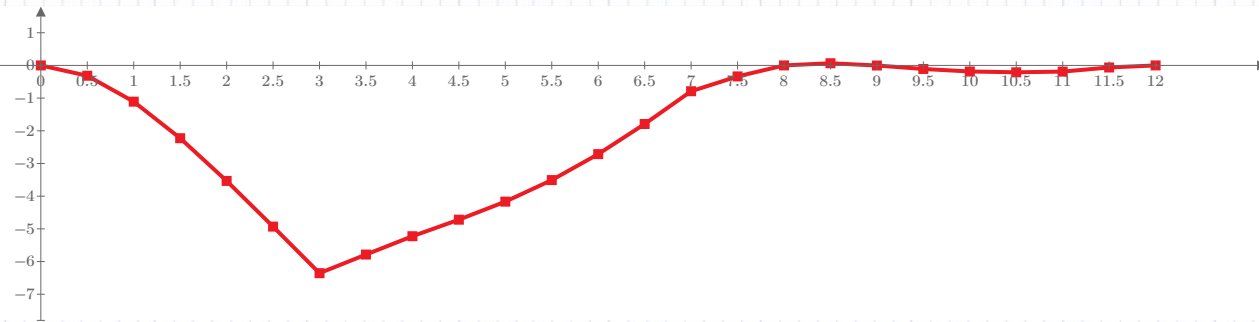
Metoda implicit - należy rozwiązać układ równań $y := \text{lsolve}(A, \alpha \cdot M)$

Ugięcie belki

$y =$
 $\begin{bmatrix} -0.000 \\ -0.316 \\ -1.109 \\ -2.227 \\ -3.534 \\ -4.931 \\ -6.355 \\ -5.786 \\ -5.225 \\ -4.719 \\ -4.168 \\ -3.508 \\ -2.713 \\ -1.792 \\ -0.790 \\ -0.337 \\ \vdots \end{bmatrix} \text{ cm}$

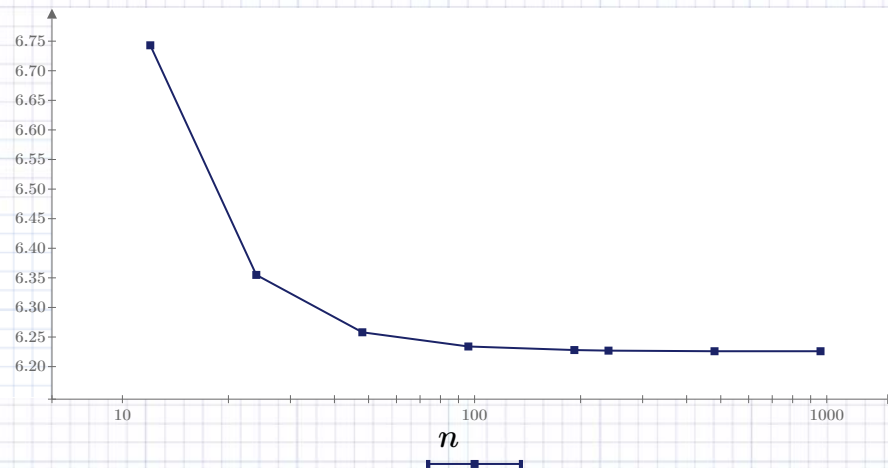
$n = 24 \quad \min(y) = -6.355 \text{ cm}$

$y \text{ (cm)}$



$x \text{ (m)}$

sprawdzenie zbieżności rozwiązania numerycznego



$u \text{ (cm)}$

n

$n :=$
 $\begin{bmatrix} 12 \\ 24 \\ 48 \\ 96 \\ 192 \\ 240 \\ 480 \\ 960 \end{bmatrix}$

$u :=$
 $\begin{bmatrix} 6.743 \\ 6.355 \\ 6.258 \\ 6.234 \\ 6.228 \\ 6.227 \\ 6.226 \\ 6.226 \end{bmatrix} \cdot \text{cm}$