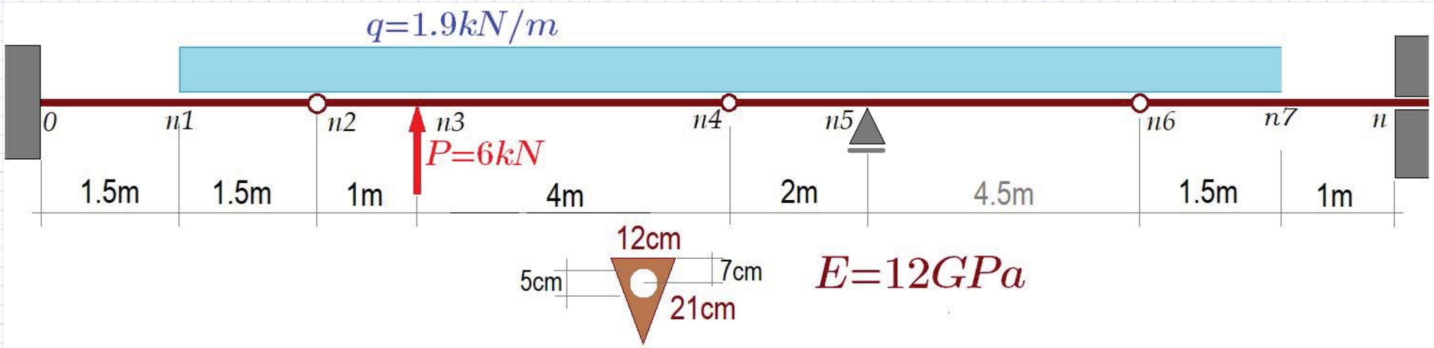
Ugiecie belki obliczone metodą różnic skończonych



$\mathrm{ORIGIN} := 0$

$E := 12 \cdot GPa$ *- moduł Younga drewna*

$b := 12 \cdot cm$ *- szrokość przekroju poprzecznego*

$h := 21 \cdot cm$ *- wysokość przekroju poprzecznego* $d := 5\ cm$ *- średnica otworu*

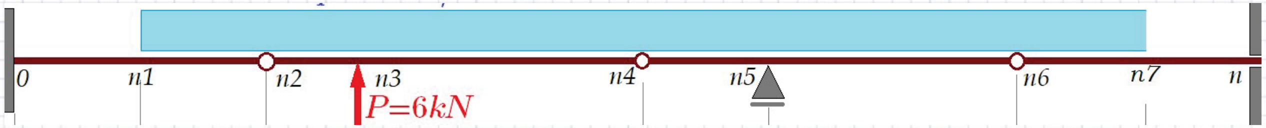
$J := \dfrac{b \cdot h^3}{36} - \dfrac{\pi \cdot d^4}{64}$ $J = 3056.320\ cm^4$ *- moment bezwładności przekroju poprzecznego*

$P := 6 \cdot kN$ $q := 1.9 \cdot \dfrac{kN}{m}$ *- oznaczenia obciążeń* $L := 17 \cdot m$

$x1 := 1.5 \cdot m$ $x2 := 3\ m$ $x3 := 4\ m$ $x4 := 8\ m$ $x5 := 10\ m$ $x6 := 14.5\ m$ $x7 := 16\ m$ *- oznaczenia odległości*

$\Delta := 50 \cdot cm$ $\alpha := \dfrac{\Delta^2}{E \cdot J} = 681.648\ \dfrac{1}{GN}$ *- parametr równania różnicowego - "podatność belki"*

$n := \frac{L}{\Delta} = 34$ $\quad n1 := \frac{x1}{\Delta} = 3$ $\quad n2 := \frac{x2}{\Delta} = 6$ $\quad n3 := \frac{x3}{\Delta} = 8$ $\quad n4 := \frac{x4}{\Delta} = 16$ $\quad n5 := \frac{x5}{\Delta} = 20$ $\quad n6 := \frac{x6}{\Delta} = 29$ $\quad n7 := \frac{x7}{\Delta} = 32$



Siły w przegubach n2, n4

$$T2 := \frac{0.5\ q \cdot (x4 - x2)^2 - P \cdot (x4 - x3)}{x4 - x2} = -0.050\ kN$$

$$T4 := q \cdot (x4 - x2) - P - T2 = 3.550\ kN$$

Reakcja R5

$$R5 := \frac{T4 \cdot (x6 - x4) + 0.5 \cdot q \cdot (x6 - x4)^2}{x6 - x5} = 14.047\ kN$$

Definicja funkcji momentów zginajacych

$$M2(x) := T2 \cdot (x - x2) - q \cdot \frac{(x - x2)^2}{2} \quad x \in (x1, x3)$$

$$M1(x) := M2(x) + q \cdot \frac{(x1 - x)^2}{2} \quad x \in (0, x1)$$

$$M3(x) := M2(x) + P \cdot (x - x3) \quad x \in (x2, x5)$$

$$M4(x) := M3(x) + R5 \cdot (x - x5) \quad x \in (x5, x7)$$

$$M5(x) := M4(x) + q \cdot \frac{(x - x7)^2}{2} \quad x \in (x7, L)$$

Współrzedne X punktów węzłowych

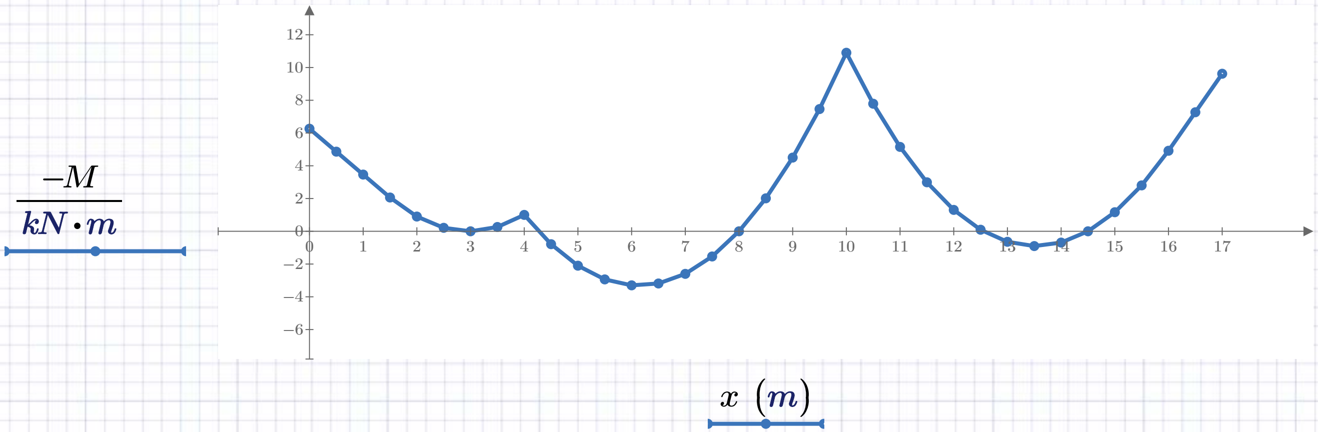
$i := 0..n \qquad x_i := i \cdot \Delta$

Obliczanie wartości momentów zginających

$i := 0..n1 \quad M_i := M1(x_i) \qquad i := n1..n3 \quad M_i := M2(x_i) \qquad i := n3..n5 \quad M_i := M3(x_i)$

$i := n5..n7 \quad M_i := M4(x_i) \qquad i := n7..n \quad M_i := M5(x_i)$

Wykres momentów zginajacych



$$M = \begin{bmatrix} -6.263 \\ -4.863 \\ -3.463 \\ -2.063 \\ -0.900 \\ -0.213 \\ 0.000 \\ -0.263 \\ -1.000 \\ 0.788 \\ 2.100 \\ 2.938 \\ 3.300 \\ 3.188 \\ 2.600 \\ 1.538 \\ 0.000 \\ -2.013 \\ -4.500 \\ -7.463 \\ -10.900 \\ \vdots \end{bmatrix} kN \cdot m \qquad x = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.5 \\ 1.0 \\ 1.5 \\ 2.0 \\ 2.5 \\ 3.0 \\ 3.5 \\ 4.0 \\ 4.5 \\ 5.0 \\ 5.5 \\ 6.0 \\ 6.5 \\ 7.0 \\ 7.5 \\ 8.0 \\ 8.5 \\ 9.0 \\ 9.5 \\ 10.0 \\ \vdots \end{bmatrix} m$$

Tworzenie macierzy różnic skończonych

$i := 0..n \qquad A_{i,i} := -2 \qquad\qquad i := 1..n \qquad A_{i,i-1} := 1 \qquad\qquad i := 0..n-1 \qquad A_{i,i+1} := 1$

$$A = \begin{bmatrix}
-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \ddots
\end{bmatrix}$$

Warunki brzegowe: $y_0 = 0 \quad \varphi_0 = 0$ ---> $2 \cdot y_1 = \alpha M_0 \qquad y_{n5} = 0 \qquad y_n = 0 \qquad \varphi_n = 0$ ---> $2 \cdot y_{n-1} = \alpha M_n$

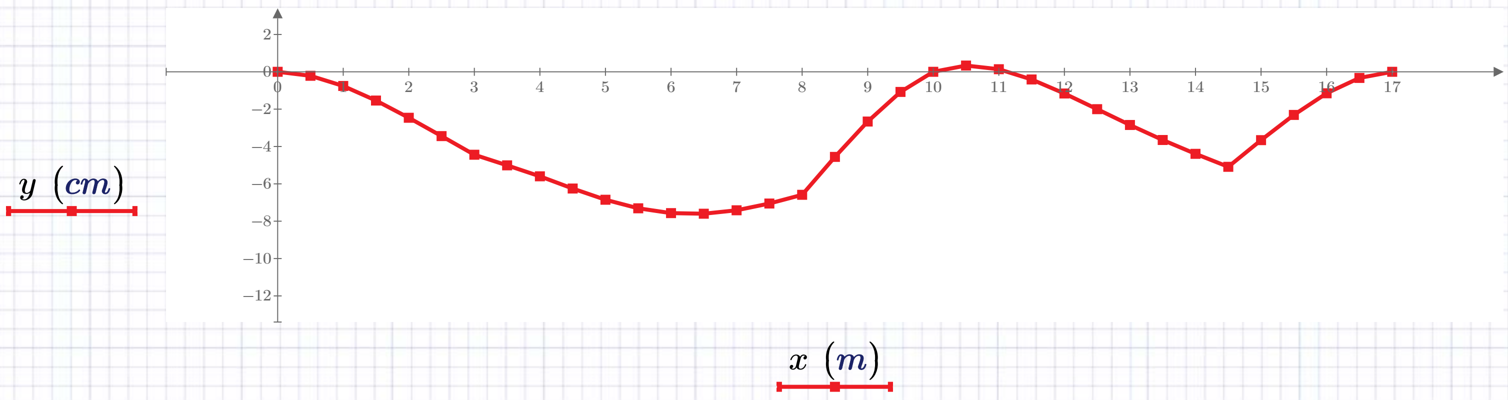
$$B := \begin{bmatrix} n2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ n4 & n5 & 1 \\ n6 & n & 1 \\ n & n-1 & 2 \end{bmatrix} \qquad i := 0 .. \mathrm{rows}(B) - 1 \qquad k := 0 .. n \qquad A_{B_{i,0},k} := 0 \qquad A_{B_{i,0},B_{i,1}} := B_{i,2}$$

$$A = \begin{bmatrix}
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \ddots
\end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} -6.263 \\ -4.863 \\ -3.463 \\ -2.063 \\ -0.900 \\ -0.213 \\ 0.000 \\ -0.263 \\ -1.000 \\ 0.788 \\ 2.100 \\ 2.938 \\ 3.300 \\ 3.188 \\ 2.600 \\ \vdots \end{bmatrix} kN \cdot m$$

Metoda implicit - należy rozwiązać układ równań $\quad y := \mathrm{lsolve}(A, \alpha \cdot M)$

Ugięcie belki

$$y=\begin{bmatrix}0.000\\-0.213\\-0.758\\-1.539\\-2.461\\-3.444\\-4.441\\-5.010\\-5.596\\-6.251\\-6.852\\-7.310\\-7.567\\-7.600\\-7.415\\-7.054\\\vdots\end{bmatrix}\ cm$$



$n=34$ $\quad min(y)=-7.600\ cm$ $\quad \Delta=50.000\ cm$

sprawdzenie zbieżności rozwiązania numerycznego

$$n:=\begin{bmatrix}34\\68\\136\\272\\340\\680\\1360\\1700\end{bmatrix} \qquad u:=\begin{bmatrix}7.600\\7.490\\7.459\\7.452\\7.452\\7.450\\7.450\\7.450\end{bmatrix}\cdot cm$$