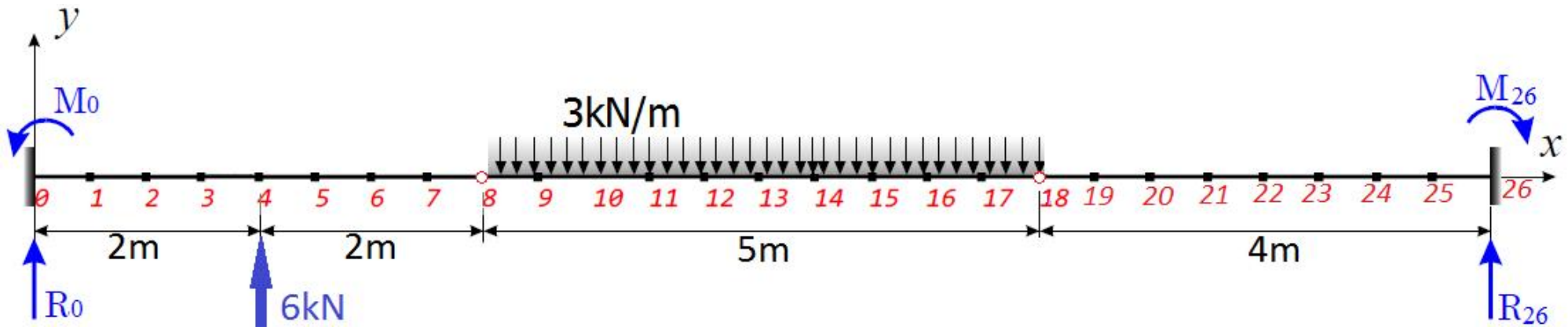
Obliczenie ugięcia belki metodą różnic skończonych (MRS)

ORIGIN := 0



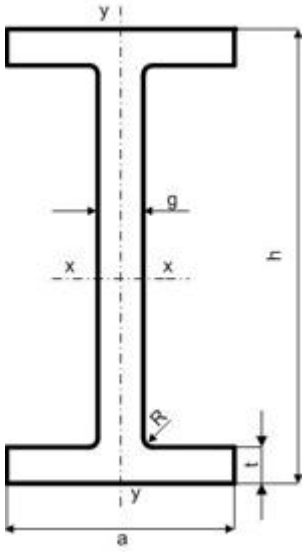
Przekrój poprzeczny belki - IPE160

$a := 82mm \quad g := 5mm \quad t := 7.4mm \quad h := 160mm$

$a1 := a - g \quad h1 := h - 2 \cdot t$

$A := a \cdot h - a1 \cdot h1 \qquad J := \frac{a \cdot h^3 - a1 \cdot h1^3}{12}$

$E := 210GPa \qquad \gamma := 78 \frac{kN}{m^3}$



$q := 3\frac{kN}{m}$ $p := A \cdot \gamma = 0.151 \cdot \frac{kN}{m}$ $P := 6kN$ $L := 13m$ $L1 := 2m$ $L2 := 5m$ $L3 := 4m$

$T8 := \frac{L2 \cdot (q + p)}{2}$ $T18 := T8$ *- siły poprzeczne w przegubach*

$R0 := T8 + p \cdot L3 - P$ $R26 := T18 + L3 \cdot p$ *- reakcje podpór*

$M0 := T8 \cdot L3 + p \cdot \frac{L3^2}{2} - P \cdot L1$ $M26 := T18 \cdot L3 + p \cdot \frac{L3^2}{2}$ *- momenty podporowe*

$\Delta := 0.5m$ $\alpha := \frac{\Delta^2}{E \cdot J}$ $n := \frac{L}{\Delta} = 26$ $i := 0 .. n$ $X_i := i \cdot \Delta$ *- współrzędne punktów węzłowych*

$M1(x) := -M0 + R0 \cdot x - p \cdot \frac{x^2}{2}$ $i := 0 .. 4$ $M_i := M1(X_i)$ *- momenty zginające w przedziale nr 1*

$M2(x) := M1(x) + P \cdot (x - L1)$ $i := 5 .. 8$ $M_i := M2(X_i)$ *- momenty zginające w przedziale nr 2*

$M3(x) := M2(x) - q \cdot \frac{(x - L3)^2}{2}$ $i := 9 .. 18$ $M_i := M3(X_i)$ *- momenty zginające w przedziale nr 3*

$M4(x) := M3(x) + q \cdot \frac{(x - L3 - L2)^2}{2}$ $i := 19 .. n$ $M_i := M4(X_i)$ *- momenty zginające w przedziale nr 4*

$M =$

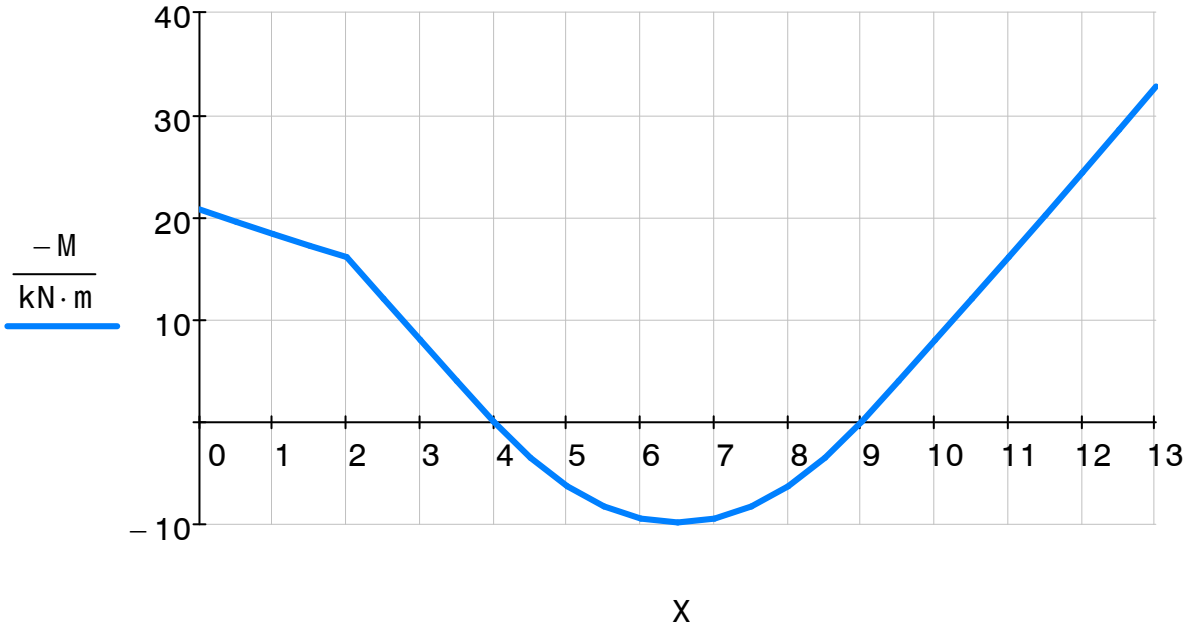
	0
0	-20.723
1	-19.5
2	-18.315
3	-17.168
4	-16.059
5	-11.988
6	-7.954
7	-3.958
8	$-1.819 \cdot 10^{-15}$
9	3.545
10	6.303
11	8.272
12	9.454
13	9.848
14	9.454
15	8.272
16	6.303
17	3.545
18	0
19	-3.958
20	-7.954
21	-11.988
22	-16.059
23	-20.168
24	-24.315
25	-28.5
26	-32.723

$\cdot kN \cdot m \quad X =$

	0
0	0
1	0.5
2	1
3	1.5
4	2
5	2.5
6	3
7	3.5
8	4
9	4.5
10	5
11	5.5
12	6
13	6.5
14	7
15	7.5
16	8
17	8.5
18	9
19	9.5
20	10
21	10.5
22	11
23	11.5
24	12
25	12.5
26	13

$\cdot m$

Wykres momentów zginajacych



Macierz układu równań MRS:

$i := 0 .. n \quad A_{i,i} := -2 \qquad i := 1 .. n \quad A_{i,i-1} := 1 \qquad i := 0 .. n-1 \quad A_{i,i+1} := 1$

$A =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
0	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2

Macierz MRS po uwzględnieniu warunków brzegowych: $\phi 0 := 0$ $y0 := 0$ $\phi 26 := 0$ $y26 := 0$

$A =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0	0
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0	0
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-2	1
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0

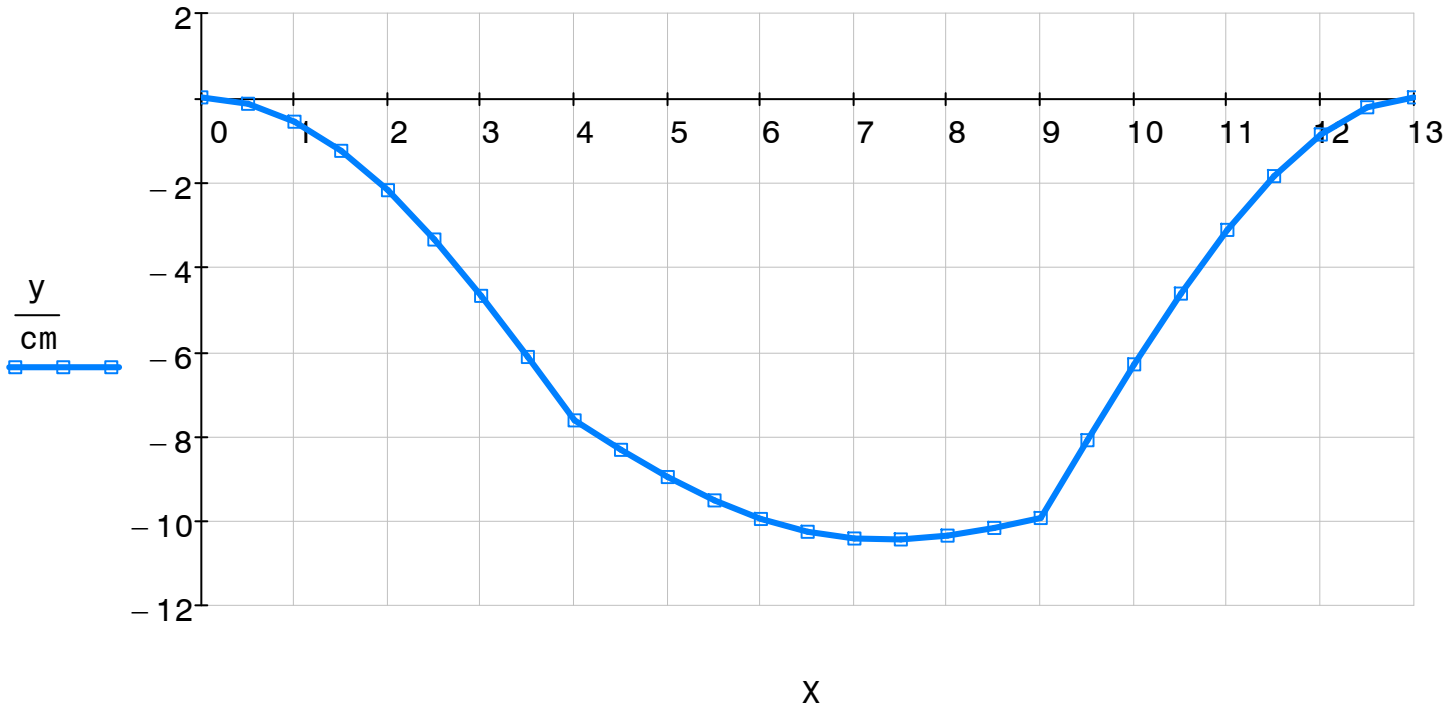
$y := \mathrm{lsolve}(A, \alpha \cdot M)$

$y =$

	0
0	0.000
1	-0.148
2	-0.574
3	-1.261
4	-2.193
5	-3.354
6	-4.686
7	-6.132
8	-7.634
9	-8.328
10	-8.972
11	-9.527
12	-9.963
13	-10.264
14	-10.425
15	-10.451
16	-10.359
17	-10.177
18	-9.944
19	-8.100
20	-6.312
21	-4.638
22	-3.134
23	-1.860
24	-0.873
25	-0.233
26	0.000

$\cdot cm$

Wykres ugięć belki



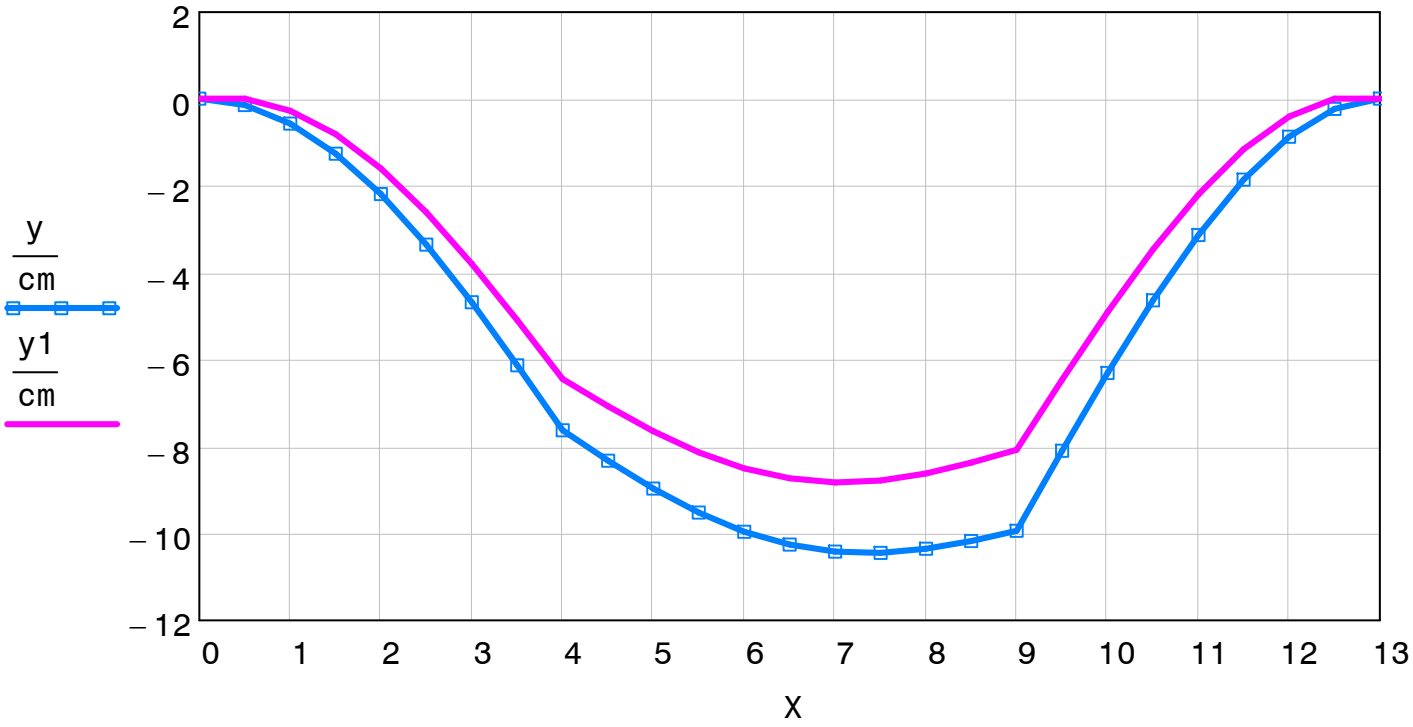
$Ma := M \qquad Ma_0 := 0 \qquad Ma_n := 0$

$y1 := \text{lsolve}(A, \alpha \cdot Ma)$

$y1 =$ (·cm)

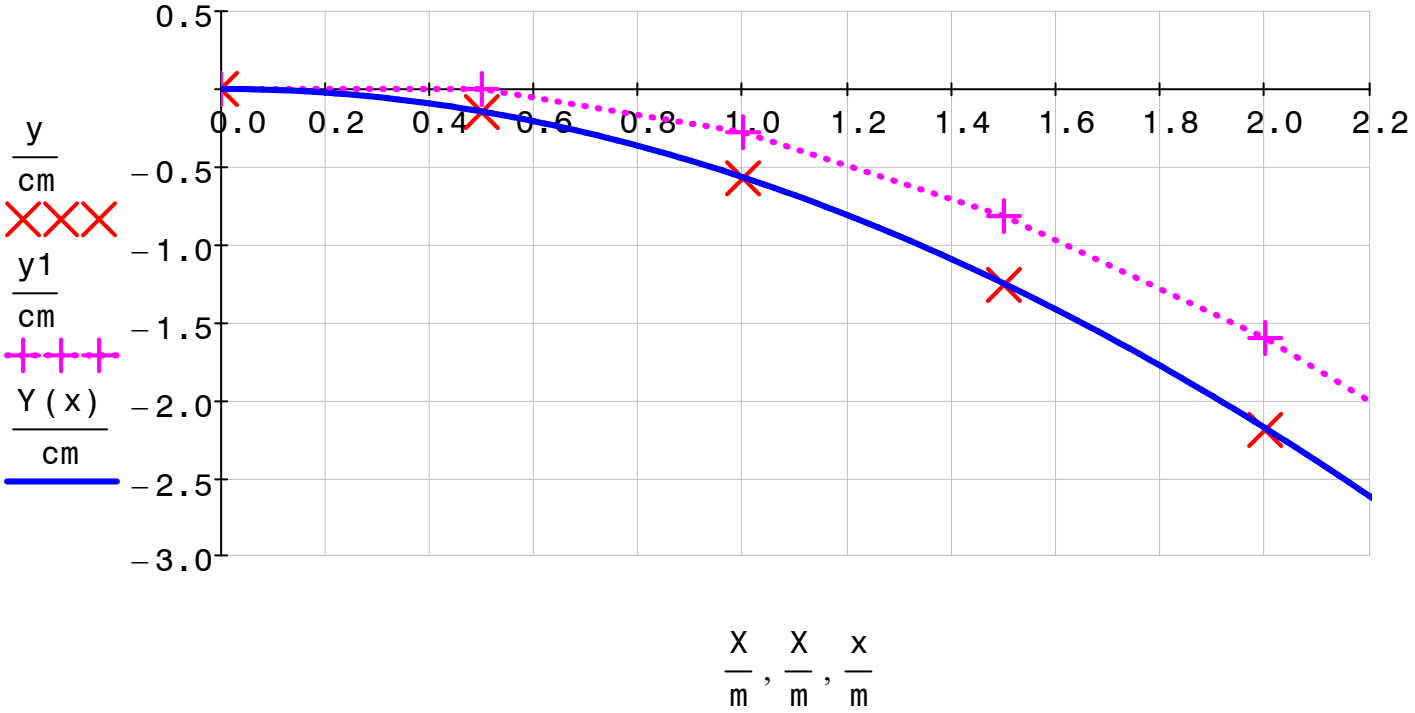
	0
0	0.000
1	0.000
2	-0.278
3	-0.818
4	-1.602
5	-2.615
6	-3.799
7	-5.097
8	-6.451
9	-7.078
10	-7.653
11	-8.139
12	-8.507
13	-8.739
14	-8.832
15	-8.789
16	-8.629
17	-8.378
18	-8.077
19	-6.467
20	-4.912
21	-3.471
22	-2.201
23	-1.160
24	-0.407
25	0.000
26	0.000

Wykres ugięć belki - porównanie zastosowania 2 sposobów uwzględniania warunku brzegowego: φ=0,
y - różnica centralna, y1 - różnica "w przód"



$$\Phi(x) := \frac{1}{E \cdot J} \cdot \int_0^x M1(z)\, dz \qquad Y(x) := \int_0^x \Phi(z)\, dz \qquad Y4 := Y(L1) = -2.182\,cm$$

Wykres ugięć belki - porównanie wyników uzyskanych numerycznie z rozwiązaniem analitycznym Y(x) w przedziale nr 1.
Widoczne są duże błędy rozwiązania numerycznego y1, uzyskanego przy zastosowaniu różnicy "w przód"



Błędy rozwiązań numerycznych

$$\varepsilon := \frac{y_4}{Y4} - 1 = 0.525\%$$

$$\varepsilon 1 := \frac{y1_4}{Y4} - 1 = -26.574\%$$