$ORIGIN := 0$

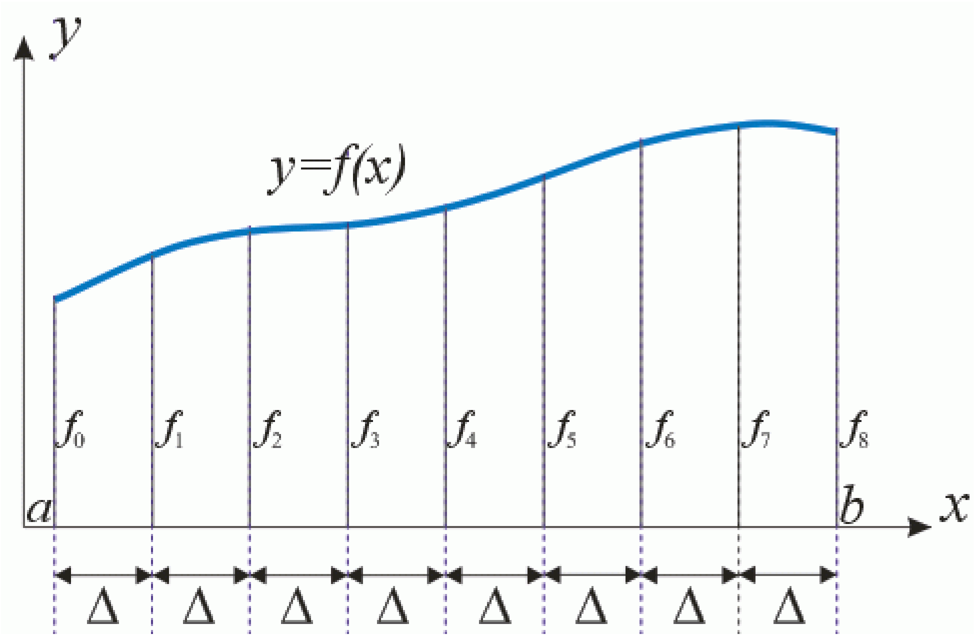
Zastosowanie kwadratur Newtona-Cotesa

$f(x) := \sin(x)$ *- definicja funkcji podcałkowej*

$a := 0 \quad b := \frac{\pi}{2}$ *- granice przedziału całkowania*

$N := 12$ *- liczba pasm, na które dzielimy przedział całkowania*

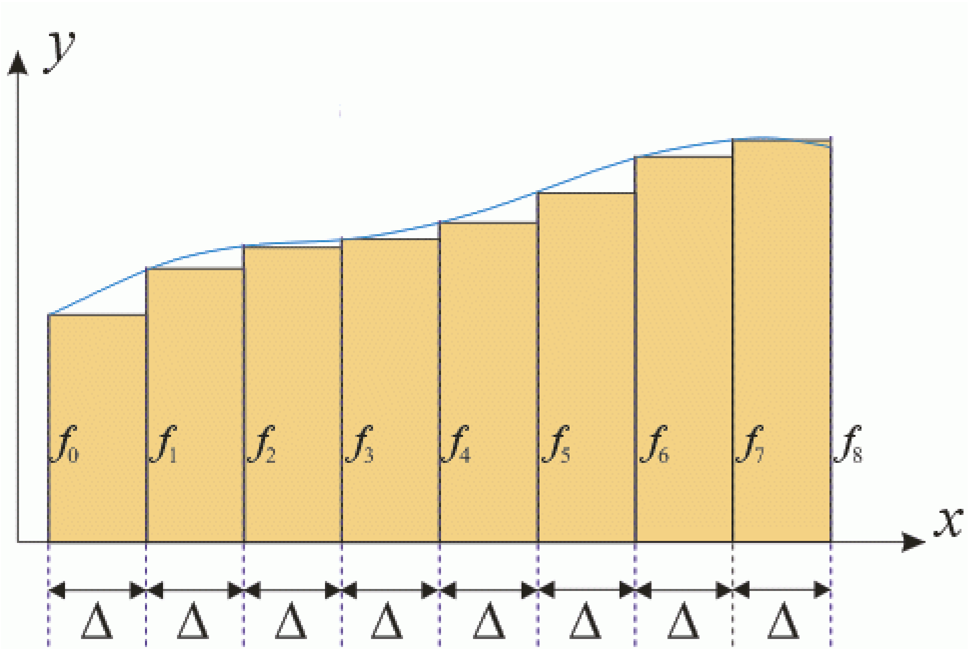
$\Delta := \frac{b-a}{N}$ *- szerokość pasma*



Obliczenie wartości funkcji na granicach pasm

$i := 0 .. N \qquad y_i := f(a + i \cdot \Delta)$

Obliczenie całki w przedziale a-b metodą prostokątów z rzędną początkową

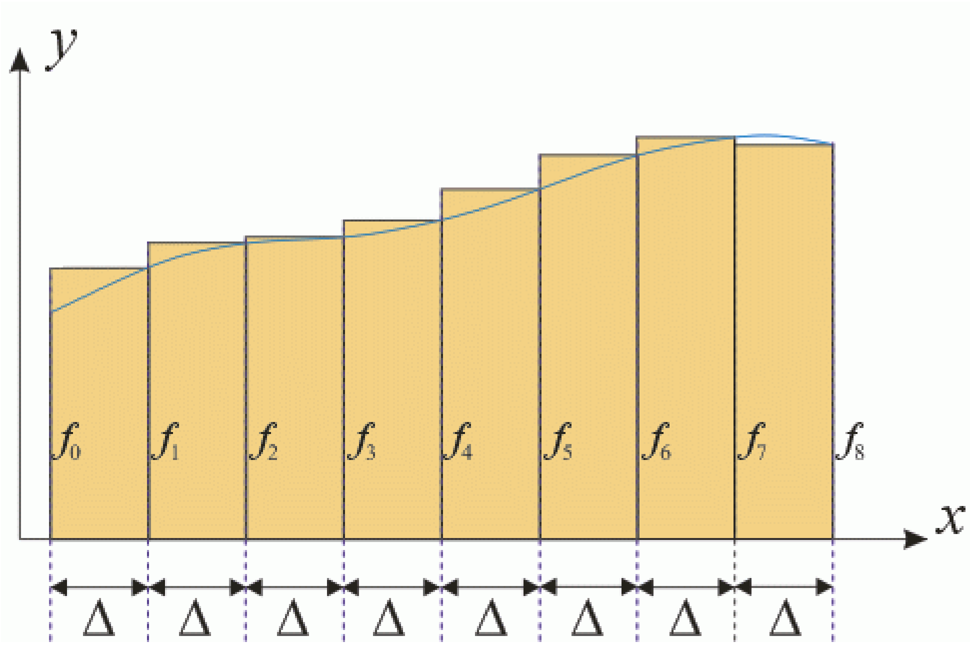


$$C1 = \Delta\left(f_0 + f_1 + f_2 + \ldots f_{N-1}\right) = \Delta \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f_i$$

$$C1 := \Delta \cdot \sum_{i=0}^{N-1} y_i \qquad C1 = 0.933121851 \qquad \varepsilon := C1 - 1 = -6.687815 \cdot \%$$

^ ------ *Błąd*

Obliczenie całki w przedziale a-b metodą prostokątów z rzędną końcową

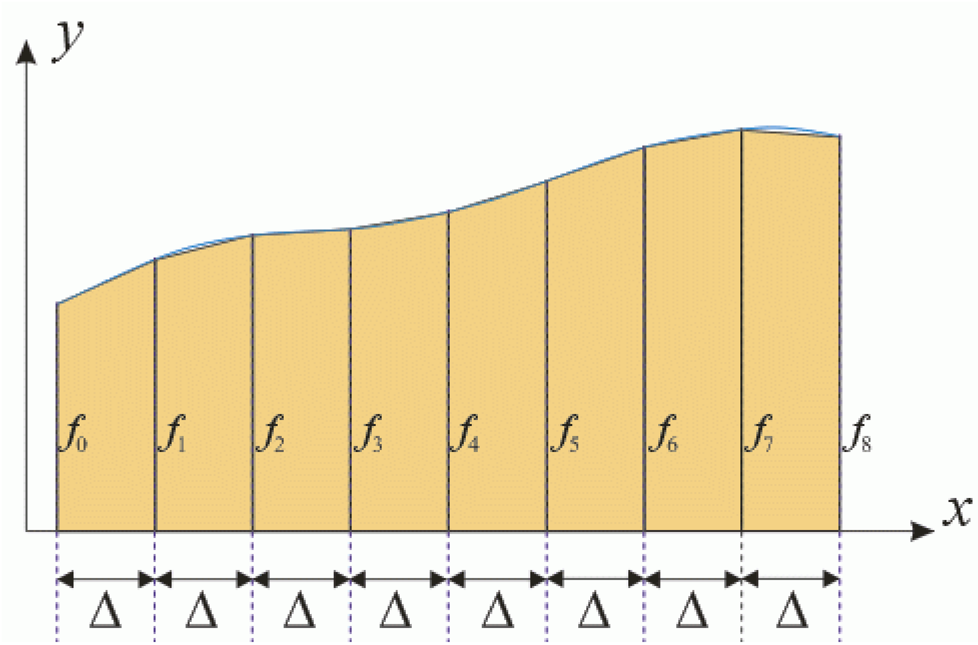


$$C2 = \Delta\left(f_1 + f_2 + f_3 + \ldots f_N\right) = \Delta \cdot \sum_{i=1}^{N} f_i$$

$$C2 := \Delta \cdot \sum_{i=1}^{N} y_i \qquad C2 = 1.0640215449 \qquad \varepsilon := C2 - 1 = 6.402154 \cdot \%$$

^ ------ *Błąd*

Obliczenie całki w przedziale a-b metodą trapezów

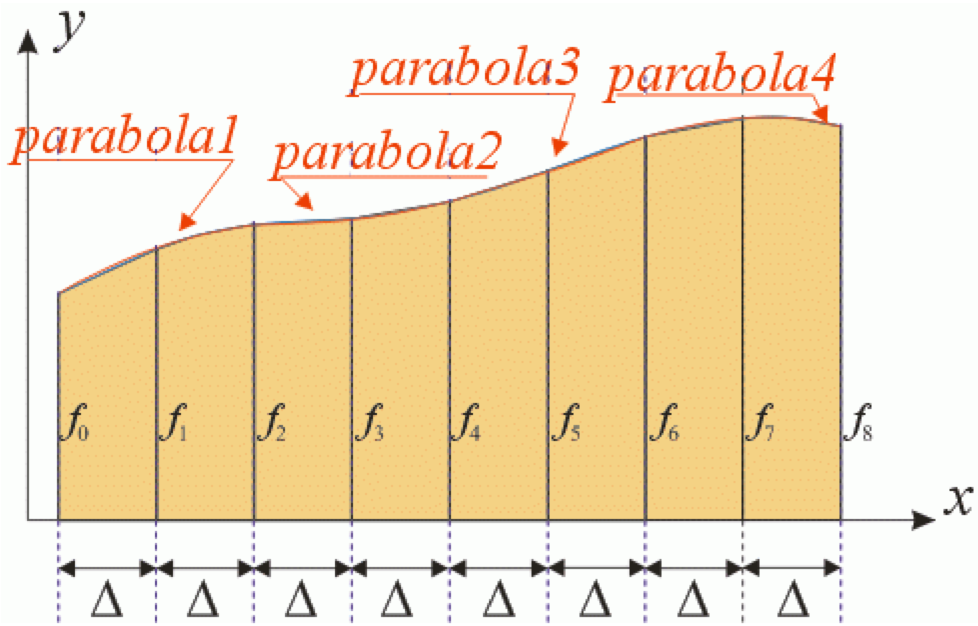


$$C3 = \Delta\left(\frac{f_0 + f_1}{2} + \frac{f_1 + f_2}{2} + \frac{f_2 + f_3}{2} + \ldots \frac{f_{N-1} + f_N}{2}\right) = \Delta\left(\frac{f_0}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f_i + \frac{f_N}{2}\right)$$

$$C3 := \Delta\cdot\left(\sum_{i=1}^{N-1} y_i + \frac{y_0 + y_N}{2}\right) \quad C3 = 0.9985716979 \qquad \varepsilon := C3 - 1 = -0.14283\cdot\%$$

^ ------ *Błąd*

Obliczenie całki w przedziale a-b wzorem Simpsona (wielomian aproksymacyjny 2 stopnia)



$$C4 = \frac{\Delta}{3}\cdot\left[\left(f_0 + 4\,f_1 + f_2\right) + \left(f_2 + 4\,f_2 + f_3\right) + \ldots\left(f_{N-2} + 4\,f_{N-1} + f_N\right)\right] = \ldots$$

$$\frac{\Delta}{3}\cdot\left[f_0 + 4\left(\sum_{i\ =\ 1.3.5}^{N-1} f_i\right) + 2\left(\sum_{i\ =\ 2.4.6}^{N-2} f_i\right) + f_N\right]$$

$i := 1, 3 .. \; N-1$ $\qquad\qquad$ $j := 2, 4 .. \; N-2$

$$C4 := \frac{\Delta}{3}\cdot\left[4\left(\sum_{i} y_i\right) + 2\left(\sum_{j} y_j\right) + y_0 + y_N\right]$$

$C4 = 1.0000016344$ $\qquad$ $\varepsilon := C4 - 1 = 0.000163\cdot\%$

^ ------- *Błąd*

Obliczenie całki w przedziale a-b wzorem Simpsona 3/8 (wielomian aproksymacyjny 3 stopnia)

$$\frac{3\Delta}{8}\cdot\left[\left(f_0+3f_1+3f_2+f_3\right)+\left(f_3+3f_4+3f_5+f_6\right)+\ldots\left(f_{N-3}+3f_{N-2}+3f_{N-1}+f_N\right)\right]$$

$i := 1 .. N-1$ $\qquad$ $j := 3, 6 .. N-1$

$$C4b := \frac{3\Delta}{8}\cdot\left[3\left(\sum_i y_i\right)-\left(\sum_j y_j\right)+y_0+y_N\right]$$

$C4b = 1.000003685$ $\qquad$ $\varepsilon := C4b - 1 = 0.000369\cdot\%$

^ ------- *Błąd*

Obliczenie całki w przedziale a-b wzorem Boole'a (wielomian aproksymacyjny 4 stopnia)

$i := 1, 3 .. N-1$ $\qquad$ $j := 2, 6 .. N-2$ $\qquad$ $k := 4, 8 .. N-4$

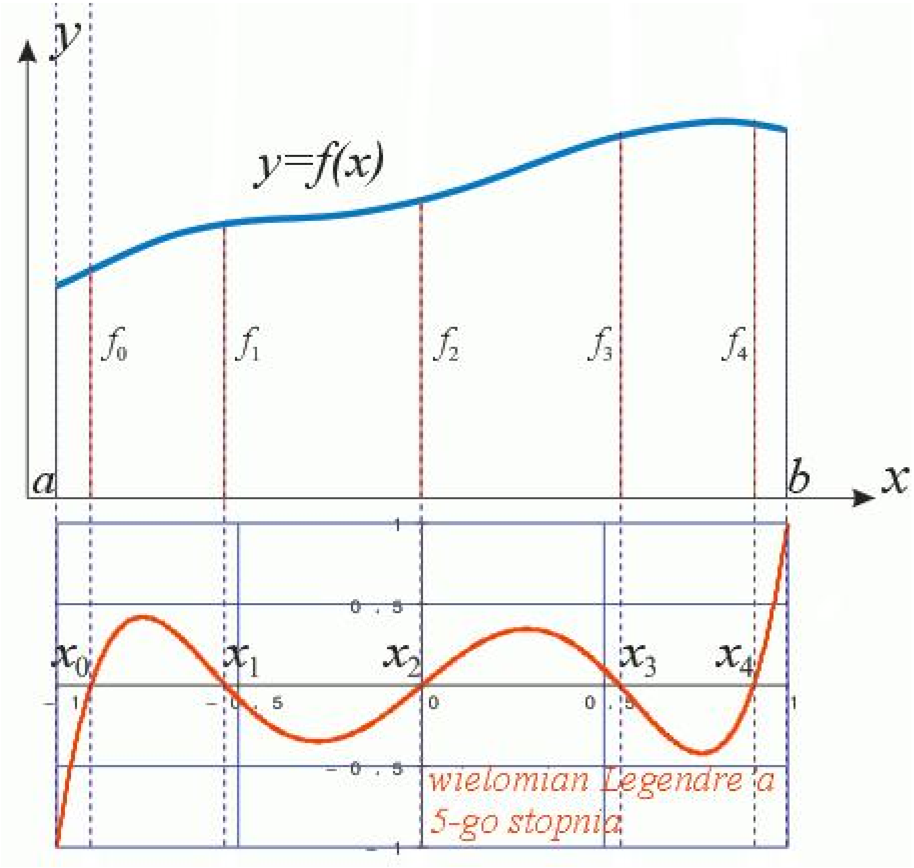
$$C5 := \frac{2\Delta}{45}\cdot\left[32\left(\sum_i y_i\right)+12\left(\sum_j y_j\right)+14\left(\sum_k y_k\right)+7\left(y_N+y_0\right)\right]$$

$C5 = 0.9999999893$

^ ------- *Błąd*

$\varepsilon := C5 - 1 = -0.000001\cdot\%$

Zastosowanie kwadratur Gaussa-Legendre'a



$$C5 = \frac{b-a}{2}\cdot\left(C_0 f_0 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + \ldots + C_N f_N\right) = \ldots$$

$$\frac{b-a}{2}\cdot\left[\sum_{i=0}^{N}\left(C_i f_i\right)\right]$$

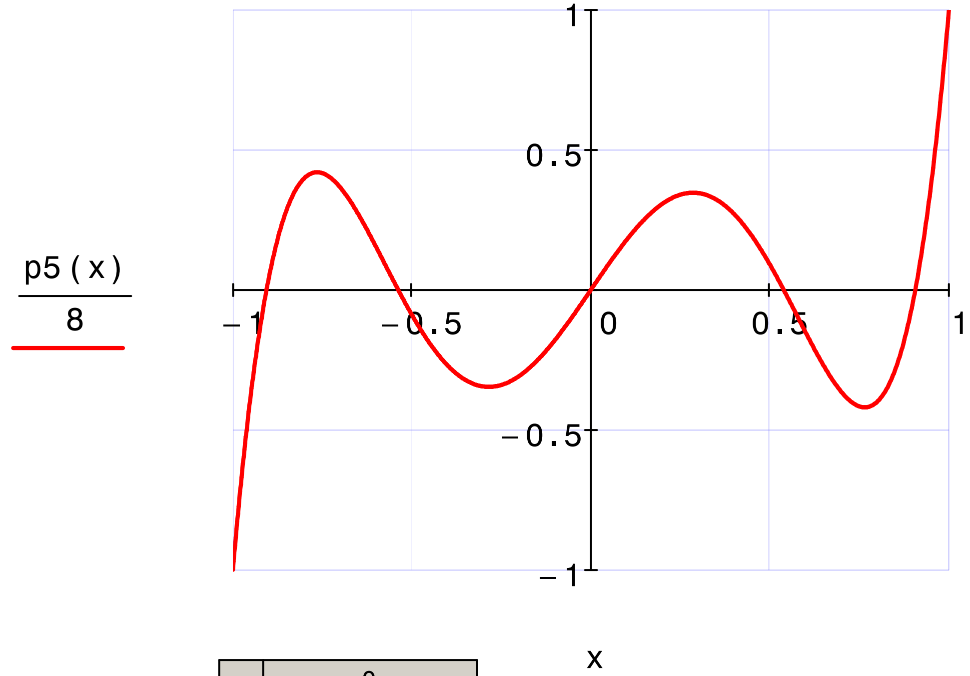
Przykład Nr1.   5-cio punktowy wzór Gaussa

$N := 4$

$p5(x) := 63 \cdot x^5 - 70 \cdot x^3 + 15 \cdot x$ *- wielomian Legendre'a 5-tego stopnia*

Współczynniki wielomianu Legendre'a 5-tego stopnia

$$w5 := p5(x)\ \mathtt{coeffs} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 0 \\ -70 \\ 0 \\ 63 \end{pmatrix}$$



$\xi := \mathtt{polyroots}(w5)$ *- pierwiastki wielomianu Legendre'a 5-tego stopnia*

$\xi =$

	0
0	-0.9061798459
1	-0.5384693101
2	0
3	0.5384693101
4	0.9061798459

Obliczanie współczynników wagowych kwadratury Gaussa

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ (\xi_0)^2 & (\xi_1)^2 & (\xi_2)^2 & (\xi_3)^2 & (\xi_4)^2 \\ (\xi_0)^3 & (\xi_1)^3 & (\xi_2)^3 & (\xi_3)^3 & (\xi_4)^3 \\ (\xi_0)^4 & (\xi_1)^4 & (\xi_2)^4 & (\xi_3)^4 & (\xi_4)^4 \end{bmatrix} \qquad d := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$C := \mathrm{lsolve}(M, d)$ $\qquad C =$

	0
0	0.2369268851
1	0.4786286705
2	0.5688888889
3	0.4786286705
4	0.2369268851

Wyznaczanie współrzędnych punktów Gaussa

$$i := 0 .. N \qquad X_i := \frac{b + a}{2} + \xi_i \cdot \frac{b - a}{2}$$

$$C5 := \frac{(b - a)}{2} \cdot \left[\sum_{i = 0}^{N} \left(C_i \cdot f(X_i) \right) \right] \qquad C5 = 1.000000000039565 \qquad \varepsilon := C5 - 1 = 3.956502 \times 10^{-9} \cdot \%$$

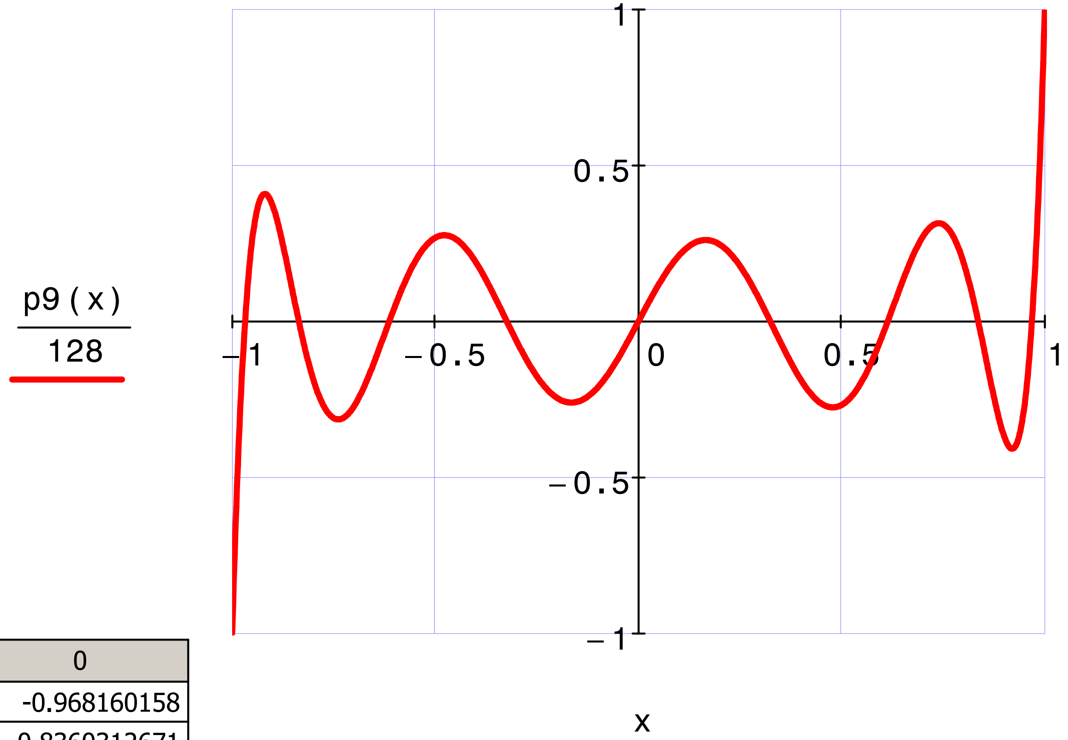
^ ------ *Błąd*

Przykład Nr2.   9-cio punktowy wzór Gaussa

$N := 8$

$p9(x) := 12155 \cdot x^9 - 25740 \cdot x^7 + 18018 \cdot x^5 - 4620 \cdot x^3 + 315 \cdot x$ *- wielomian Legendre'a 9-tego stopnia*

$$w9 := p9(x)\ \mathrm{coeffs} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 315 \\ 0 \\ -4620 \\ 0 \\ 18018 \\ 0 \\ -25740 \\ 0 \\ 12155 \end{pmatrix}$$



- pierwiastki wielomianu Legendre'a 5-tego stopnia

$\xi := \mathrm{polyroots}(w9)$

$\xi =$

	0
0	-0.968160158
1	-0.8360312671
2	-0.6133713396
3	-0.3242534234
4	0
5	0.3242534234
6	0.6133713365
7	0.8360312384
8	0.9681601898

$M9(i,j) := (\xi_j)^i$ $\qquad m(i,j) := \dfrac{1-(-1)^{i+1}}{i+1}$ *- funkcje tworzące współczynniki układu równań*

$M := \mathrm{matrix}(9,9,M9)$ *- macierz układu równań* $\qquad d := \mathrm{matrix}(9,1,m)$ *- wektor prawej strony*

$C := \mathrm{lsolve}(M,d)$

$M =$

	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1	1
1	-0.968	-0.836	-0.613	-0.324	0	0.324
2	0.937	0.699	0.376	0.105	0	0.105
3	-0.907	-0.584	-0.231	-0.034	0	0.034
4	0.879	0.489	0.142	0.011	0	0.011
5	-0.851	-0.408	-0.087	$-3.584\cdot10^{-3}$	0	$3.584\cdot10^{-3}$
6	0.824	0.341	0.053	$1.162\cdot10^{-3}$	0	$1.162\cdot10^{-3}$
7	-0.797	-0.285	-0.033	$-3.769\cdot10^{-4}$	0	$3.769\cdot10^{-4}$
8	0.772	0.239	0.02	$1.222\cdot10^{-4}$	0	...

$d =$

	0
0	2
1	0
2	0.666667
3	0
4	0.4
5	0
6	0.285714
7	0
8	0.222222

$C =$

	0
0	0.0812744207
1	0.1806479483
2	0.2606111129
3	0.3123466585
4	0.3302397131
5	0.3123466837
6	0.260611047
7	0.1806480213
8	0.0812743944

Wyznaczanie współrzędnych punktów Gaussa

$i := 0 .. N \qquad y_i := \dfrac{b+a}{2} + \xi_i \cdot \dfrac{b-a}{2}$

$$C9 := \frac{(b-a)}{2} \cdot \left[\sum_{i=0}^{N} \left(C_i \cdot f(y_i) \right) \right] \qquad C9 = 1.0000000000000004 \qquad \varepsilon := C9 - 1 = 4.440892 \times 10^{-14} \cdot \%$$

^ ------ *Błąd*

Całka obliczona funkcją MathCada

$C10 := \int_a^b f(x)\,dx$ $\qquad C10 = 0.9999999999999999 \qquad \varepsilon := C10 - 1 = -1.1102230246 \times 10^{-14} \cdot \%$

^ ------ *Błąd*

$\int_a^b \sin(x)\,dx = -(\cos(b) - \cos(a)) = 1$ *- wartość dokładna obliczona analitycznie*