DODATEK NR 1. ALGEBRA MACIERZY

W dodatku tym podamy najważniejsze definicje rachunku macierzowego i omówimy niektóre funkcje i transformacje macierzy najbardziej przydatne w zastosowaniach numerycznych, a w szczególności w metodzie elementów skończonych.

D1.1. DEFINICJE

- Skalar - jest wielkością określoną tylko przez swoją wartość, która może wyrażać się liczbą rzeczywistą. Typowymi przykładami wielkości skalarnych są: masa, temperatura, czas, długość itp. Skalary będziemy oznaczać literami, pisanymi czcionką pochyłą.
- Wektor - jest wielkością określoną przez swój moduł oraz kierunek i zwrot. Przykładami wielkości wektorowych są: siła, przemieszczenie, prędkość, obrót. Wektory będziemy oznaczali małymi literami, pisanymi czcionką prostą, pogrubioną.
- Macierz - jest tablicą zawierającą najczęściej skalary, ale może też zawierać wektory lub inne macierze. Elementy macierzy nazywamy jej składowymi. Jest to bardzo wygodna forma prezentacji dużej ilości jednolitych danych, z którymi mamy do czynienia w metodach numerycznych. Przykładowy zapis macierzy, którymi posługujemy się w tej książce wygląda następująco:

$$\mathbf{A} = \left[A_{ij} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mn} \end{bmatrix}.$$

  Macierze kwadratowe (mają równą liczbę kolumn i wierszy) i prostokątne (mają różną liczbę kolumn i wierszy) oznaczać będziemy dużymi literami, pisanymi czcionką prostą i pogrubioną.
- Macierz kolumnowa - nazywać ją będziemy też wektorem, zawiera tylko jedną kolumnę składowych. Oznaczać ją będziemy tak jak wektory.
- Macierz jednostkowa - jest macierzą kwadratową, której składowe są równe zeru, poza tymi, które leżą na głównej przekątnej (elementy diagonalne). Elementy diagonalne równe są jedności. Macierz jednostkową oznaczymy dużą literą **I** oraz w niektórych przypadkach indeksem wskazującym rozmiary tej macierzy:

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Składowe macierzy jednostkowej można zapisać przy pomocy delty Kroneckera $\mathbf{I} = \left[\delta_{ij}\right]$, gdzie $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$, gdy $i \neq j$.

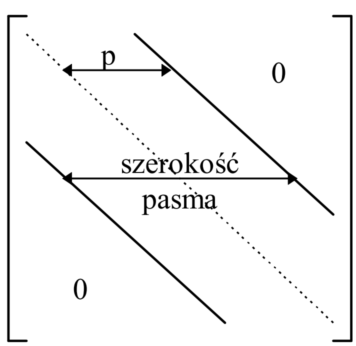
- Macierz trójkątna - jest macierzą zawierającą składowe zerowe ponad główną przekątną (**L**-macierz trójkątna dolna) lub poniżej (**U**-macierz trójkątna górna)

$$\mathbf{L} = \left[L_{ij}\right] = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U} = \left[U_{ij}\right] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{bmatrix}.$$

- Macierz pasmowa - jest macierzą zawierającą różne od zera składowe tylko w pobliżu głównej przekątnej

$\mathbf{A}_{\text{pasm}}=$



p - szerokość półpasma

W metodzie elementów skończonych, po odpowiednim przegrupowaniu równań równowagi, macierzami pasmowymi są macierze sztywności.

- Macierz symetryczna - jest macierzą o składowych spełniających równanie

$$\mathbf{A}_{\text{sym}} \rightarrow \left[A_{ij}\right] = \left[A_{ji}\right]$$

W metodzie elementów skończonych macierzami symetrycznymi są macierze sztywności.

- Macierz transponowana - jest macierzą, w której przegrupowano składowe tak, że kolumny stały się wierszami:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \rightarrow \left[B_{ij}\right] = \left[A_{ji}\right].$$

Transpozycję macierzy oznaczać będziemy dużą, prostą literą T, pisaną jako indeks górny.

- Główna przekątna macierzy jest tą przekątną, która przebiega od składowej A_{11} przez pozostałe składowe o równych indeksach wiersza i kolumny, tzn. A_{22} ... A_{ii} ... A_{nn}.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{główna przekątna}$$

D1.2. DODAWANIE I ODEJMOWANIE MACIERZY

Operację dodawania macierzy definiujemy następująco:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \rightarrow C_{ij} = A_{ij} + B_{ij},$$

czyli składowe macierzy **C**, która jest wynikiem dodawania macierzy **A** oraz macierzy **B** są sumami odpowiednich składowych **A** oraz **B**. Dodawanie macierzy możliwe jest tylko wtedy, gdy oba składniki (**A** i **B**) mają jednakową liczbę wierszy i kolumn. Dodawanie jest operacją przemienną:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$

Analogicznie definiujemy odejmowanie macierzy:

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \rightarrow D_{ij} = A_{ij} - B_{ij}.$$

Przykład nr 1.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (1+0) & (3+2) & (8+1) & (2+0) \\ (2+3) & (4+2) & (1+5) & (-2+1) \\ (-1+0) & (0+2) & (3+1) & (4+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (1-0) & (3-2) & (8-1) & (2-0) \\ (2-3) & (4-2) & (1-5) & (-2-1) \\ (-1-0) & (0-2) & (3-1) & (4-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & 2 \\ -1 & 2 & -4 & -3 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

D1.3. MNOŻENIE MACIERZY PRZEZ SKALAR (SKALOWANIE MACIERZY)

Skalowaniem macierzy nazywamy operację na jej składowych zdefiniowaną następująco:

$$\mathbf{E} = \alpha \mathbf{A} \rightarrow E_{ij} = \alpha A_{ij},$$

czyli składowe macierzy **E**, które powstają w wyniku pomnożenia macierzy **A** przez skalar α są iloczynami składowych macierzy **A** i liczby α.

Przykład nr 2.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \alpha=3.5,$$

$$\mathbf{E} = 3.5\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3.5 & 10.5 & 28.0 & 7.0 \\ 7.0 & 14.0 & 3.5 & -7.0 \\ -3.5 & 0.0 & 10.5 & 14.0 \end{bmatrix}.$$

Powstała w wyniku skalowania macierz **E** ma oczywiście taką samą liczbę wierszy i kolumn jak macierz **A**.

D1.4. MNOŻENIE MACIERZY

Niech **C** będzie wynikiem mnożenia macierzy **A** i **B**:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B},$$

wtedy składowe macierzy **C** powstają jako wynik mnożenia wierszy macierzy **A** przez kolumny macierzy **B**, co zapisać można następująco:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj},$$

gdzie n - ilością kolumn macierzy **A**. Jak widać mnożenie macierzy **A** i **B** tylko wtedy jest wykonywalne, gdy ilość kolumn macierzy **A** jest taka sama jak ilość wierszy macierzy **B**. Macierz **C**, która powstaje w wyniku mnożenia ma ilość wierszy równą ilości wierszy macierzy **A** a liczbę kolumn równą liczbie kolumn macierzy **B**.

$$
\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} =
\begin{array}{c|c}
 & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \Lambda & B_{1j} & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & K & B_{2j} & B_{2m} \\ M & M & K & M & M \\ B_{n1} & B_{n2} & K & B_{nj} & B_{nm} \end{bmatrix} \\
\hline
\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & K & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & K & A_{2n} \\ A_{i1} & A_{i2} & K & A_{in} \end{bmatrix} & \qquad\qquad\qquad C_{ij}
\end{array}
$$

Przykład nr 3.

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},
$$

$\mathbf{C} = \mathbf{AB}^{\mathrm{T}}$

$\mathbf{AB}^{\mathrm{T}} =$

				0	3	0
				2	2	2
				1	5	1
				0	1	3
1	3	8	2	1·0+3·2+8·1+2·0= =14	1·3+3·2+8·5+2·1= =51	1·0+3·2+8·1+2·3= =20
2	4	1	-2	2·0+4·2+1·1-2 ·0= =9	2·3+4·2+1·5-2·1= =17	2·0+4·2+1·1-2·3= =3
-1	0	3	4	-1·0+0·2+3·1+4·0= =3	-1·3+0·2+3·5+4·1= =16	-1·0+0·2+3·1+4·3= =15

$$
\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 14 & 51 & 20 \\ 9 & 17 & 3 \\ 3 & 16 & 15 \end{bmatrix}.
$$

Przykład nr 4.

Ciekawy wynik daje mnożenie macierzy wierszowej przez macierz kolumnową:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{b},$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = (1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2)) = 2,$$

Wynikiem jest macierz **c** o wymiarach 1x1 czyli skalar.

Mnożenie wektorów $\mathbf{a}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{b}$ nazywa się więc mnożeniem skalarnym.

Mnożenie macierzy nie jest na ogół operacją przemienną, tzn. $\mathbf{A}\,\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\,\mathbf{A}$, nawet, gdy uda się je wykonać (możliwe jest to dla macierzy kwadratowych).

Podamy jeszcze niektóre warte zapamiętania definicje, dotyczące mnożenia macierzy:

$$(\mathbf{A}\,\mathbf{B})\,\mathbf{C} = \mathbf{A}\,(\mathbf{B}\,\mathbf{C}),$$

$$\mathbf{A}\,(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\,\mathbf{C},$$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{I} = \mathbf{I}\,\mathbf{A} = \mathbf{A},$$

$$(\mathbf{A}\,\mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}}.$$

D1.5. WYZNACZNIK MACIERZY

Wyznacznik jest skalarną funkcją macierzy kwadratowej, którą zapisujemy następująco:

$$\det \mathbf{A} = \left| A_{ij} \right|.$$

Obliczenie wartości wyznacznika polega na sumowaniu iloczynów utworzonych ze wszystkich permutacji składowych macierzy **A**:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{p} (-1)^{I_p} A_{1\alpha_1}, A_{2\alpha_2}, A_{3\alpha_3}, \ldots A_{n\alpha_n},$$

gdzie p oznacza wszystkie permutacje, I_p - ilość inwersji w permutacjach.

Wartość wyznacznika obliczyć też można stosując tzw. rozwinięcie Laplace'a względem wyrazów dowolnego wiersza lub kolumny:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} A_{mk}\,\overline{A}_{mk} \text{ - rozwinięcie wiersza } m \ (1 \le m \le n)$$

lub

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} A_{km}\,\overline{A}_{km} \text{ - rozwinięcie kolumny } m \ (1 \le m \le n).$$

$\overline{A}_{ij}$ oznacza tu dopełnienie algebraiczne elementu A_{ij} macierzy:

$$\overline{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\left|A_{ij}^{*}\right|,$$

gdzie $\left|A_{ij}^{*}\right|$ jest minorem macierzy $\mathbf{A}^{*} = \left[A_{ij}^{*}\right]$ czyli wyznacznikiem macierzy powstałej przez usunięcie z macierzy **A** wiersza *i* oraz kolumny *j*.

Rozwinięcie Laplace'a należy prowadzić tak długo, aż otrzymamy macierze 2x2, których wyznaczniki można obliczyć bezpośrednio:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}.$$

Znany jest też sposób (reguła Sarrusa) obliczenia wyznaczników 3x3:

$$\det \mathbf{B} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= B_{11}B_{22}B_{33} + B_{21}B_{32}B_{13} + B_{31}B_{12}B_{23} - B_{31}B_{22}B_{13} - B_{21}B_{12}B_{33} - B_{11}B_{32}B_{23}.$$

Nie należy go jednak stosować dla macierzy o większej ilości wierszy i kolumn.

Warto też zapamiętać użyteczną zależność:

$$\det(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B},$$

która pomoże nam efektywnie wyznaczać wyznaczniki iloczynów macierzy.

Gdy wyznacznik macierzy jest równy zeru, macierz taką nazywamy macierzą osobliwą.

D1.6. MACIERZ ODWROTNA

Macierzą odwrotną do macierzy **A** nazywamy macierz spełniającą warunek:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}.$$

Składowe macierzy odwrotnej można wyznaczyć przez skalowanie transponowanej macierzy dopełnień algebraicznych:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{|A_{ij}|} \left[\overline{A}_{ij}\right]^{\mathrm{T}} = \frac{\left[(-1)^{i+j} \left|A_{ij}^{*}\right|\right]^{\mathrm{T}}}{|A_{ij}|},$$

gdzie $\overline{\mathbf{A}} = \left[\overline{A}_{ij}\right]$ jest macierzą dopełnień algebraicznych: $\overline{\mathbf{A}} = \left[(-1)^{i+j} \left|A_{ij}^{*}\right|\right]$,

$\left|A_{ij}^{*}\right|$ - minorem czyli wyznacznikiem macierzy, która powstaje przez usunięcie z macierzy **A** wiersza i i kolumny j.

Jak łatwo zauważyć, nie można znaleźć macierzy odwrotnej do macierzy osobliwej, gdyż wymagałoby to dzielenia przez zero.

Macierz $\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}$ nazywana jest macierzą dołączoną macierzy **A**. Macierz dołączoną można utworzyć dla dowolnej (nawet osobliwej) macierzy.

Przykład nr 5.

Poszukujemy macierzy odwrotnej do macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Obliczymy najpierw wyznacznik, aby przekonać się czy operacja odwrócenia macierzy będzie możliwa. Wyznacznik macierzy **A** obliczymy, korzystając z reguły Sarrusa:

$$\det \mathbf{A} = (9 \cdot 9 \cdot 3) + (1 \cdot 5 \cdot 2) + (7 \cdot 6 \cdot 3) - (7 \cdot 9 \cdot 2) - (1 \cdot 6 \cdot 3) - (9 \cdot 5 \cdot 3) = 100.$$

Obliczamy kolejne dopełnienia algebraiczne:

$$\overline{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 9 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 12, \qquad \overline{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 18,$$

$$\overline{A}_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -58, \qquad \overline{A}_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -8,$$

$$\overline{A}_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 13, \qquad \overline{A}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\overline{A}_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 0, \qquad \overline{A}_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -25,$$

$$\overline{A}_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 75,$$

a stąd mamy

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.12 & -0.08 & 0.0 \\ 0.18 & 0.13 & -0.25 \\ -0.58 & -0.03 & 0.75 \end{bmatrix}.$$

D1.7. ROZKŁAD NA MACIERZE TRÓJKĄTNE

Macierz nieosobliwą **A** rozłożyć można na iloczyn macierzy trójkątnych:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{U},$$

gdzie **L** jest macierzą trójkątną dolną, a **U** macierzą trójkątną górną. Proces taki nazywamy triangularyzacją, dekompozycją lub faktoryzacją macierzy.

Metoda dekompozycji macierzy zapoczątkowana została przez M.H.Doolittle'a (1878) a później odkrywana była jeszcze kilkakrotnie przez: Cholesky'ego (ok.1916), A.C.Aitkena (1932), T.Banachewicza (1938) oraz P.D.Crouta (1941). Metodę Cholesky'ego opisał Benoit w 1924 r.

Składowe macierzy trójkątnych **L** i **U** obliczyć można, korzystając z procedur zaproponowanych przez Crouta lub Banachewicza:

$$L_{ii} = 1,\ i = 1 \ldots n,$$

$$U_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj},\ j = i \ldots n,$$

$$L_{ij} = \frac{1}{U_{jj}} \left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} U_{kj} \right),\ i = j \ldots n.$$

Obliczanie składowych wykonuje się na zmianę wierszami dla macierzy **U** i kolumnami dla macierzy **L** (metoda Crouta) lub kolejno wiersz macierzy **U**, wiersz macierzy **L** (metoda Banachewicza [15]).

Rozkład na macierze trójkątne ma bardzo duże znaczenie praktyczne, gdyż jest używany jako efektywna metoda rozwiązywania układów równań liniowych.

Rozwiązanie układu równań

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

można uzyskać dwuetapowo. W etapie pierwszym stosujemy podstawienia $\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{U}$, $\mathbf{U}\,\mathbf{x} = \mathbf{z}$, które upraszczają nam układ równań do postaci:

$$\mathbf{L}(\mathbf{U}\,\mathbf{x}) = \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{L}\,\mathbf{z} = \mathbf{y},$$

która ułatwia rozwiązanie:

$$z_1 = \frac{y_1}{L_{11}},$$

$$z_2 = (y_2 - L_{21} z_1)\frac{1}{L_{22}}, \text{ itd.},$$

$$z_i = \left(y_i - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} z_k \right) \frac{1}{L_{ii}}.$$

Procedura zastosowana tutaj nazywa się podstawieniem w przód, gdyż sekwencyjnie wyliczamy niewiadome z_1, z_2 ... z_i ... z_n.

Etap drugi polega na wyznaczeniu wartości niewiadomych z równania

$$\mathbf{U}\,\mathbf{x} = \mathbf{z},$$

co robimy podobną metodą, tyle że stosujemy podstawienie wstecz, zaczynając od ostatniej składowej:

$$x_n = \frac{z_{nn}}{U_{nn}},$$

$$x_{n-1} = (z_{n-1} - U_{n-1n} x_n)\frac{1}{U_{n-1n-1}}, \text{ itd.},$$

$$x_i = \left(z_i - \sum_{k=i+1}^{n} U_{ik} x_k \right) \frac{1}{L_{ii}}.$$

Czas rozwiązania układu równań tą metodą proporcjonalny jest do $n^3/3$, gdzie n jest ilością równań. Liczba $T_D = n^3/3$ nazywana jest kosztem metody Doolittle'a, i jest szacunkową ilością mnożeń i dzieleń, które trzeba wykonać aby rozwiązać układ równań.

D1.8. TRIANGULARYZACJA MACIERZY SYMETRYCZNYCH

Gdy macierz kwadratowa jest symetryczna (i oczywiście nieosobliwa) można podany w poprzednim punkcie rozkład jeszcze uprościć zauważając, że:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\,\mathbf{L}^{\mathrm{T}} \text{ lub } \mathbf{A} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{U}.$$

Algorytm rozkładu macierzy symetrycznej **A** na macierze trójkątne podał jako pierwszy Cholesky (w 1916), a niezależnie od niego Banachewicz (w 1938). Metoda zwykle nazywana jest metodą Cholesky'ego. W Polsce używana jest nazwa metoda Banachewicza-Cholesky'ego.

Składowe macierzy trójkątnej dolnej wyznaczonej tą metodą są równe:

$L_{ij} = 0$ dla $j > i$,

$$L_{ii} = \sqrt{A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2}\ ,$$

$$L_{ij} = \left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk} \right) \frac{1}{L_{jj}} \ \text{dla}\ j < i.$$

W równaniach określających składowe leżące na głównej przekątnej macierzy **L** występuje pierwiastek kwadratowy. Wyrażenie pod pierwiastkiem może być oczywiście ujemne, wtedy wyrazy macierzy **L** są zespolone. Można jednak udowodnić [5], że dla macierzy symetrycznych, dodatnio określonych składowe L_{ii} są zawsze liczbami rzeczywistymi.

Czas dekompozycji macierzy symetrycznej metodą Banachewicza-Cholesky'ego jest proporcjonalny do $T_{B\text{-}CH} = n^3/6$.

Przykład nr 6.

Znaleźć macierz trójkątną dolną **L** taką, że $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^{\mathrm{T}}$. Należy wykorzystać metodę Banachewicza-Cholesky'ego

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 15 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 13 & 4 \\ -1 & -3 & 4 & 12 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczymy kolejne, różne od zera składowe macierzy trójkątnej dolnej **L**:

$$L_{11} = \sqrt{A_{11}} = \sqrt{10} = 3.16228\,,$$

$$L_{21} = A_{21} \frac{1}{L_{11}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0.32623\,,$$

$$L_{22} = \sqrt{A_{22} - L_{12}^2} = \sqrt{15 - \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right)^2} = 3.86005\,,$$

$$L_{31} = A_{31} \frac{1}{L_{11}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = 0.63246\,,$$

$$L_{32} = \left(A_{32} - L_{31} L_{21} \right) \frac{1}{L_{22}} = \left(2 - \frac{2}{\sqrt{10}} \frac{1}{\sqrt{10}} \right) \frac{1}{\sqrt{14.9}} = 0.46631\,,$$

$$L_{33} = \sqrt{A_{33} - \left(L_{31}^2 + L_{32}^2\right)} = \sqrt{13 - \left(\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{1.8}{\sqrt{14.9}}\right)^2\right)} = 3.51888,$$

$$L_{41} = A_{41}\frac{1}{L_{11}} = -0.31623,$$

$$L_{42} = \left(A_{42} - L_{41}L_{21}\right)\frac{1}{L_{22}} = -0.75129,$$

$$L_{43} = \left(A_{43} - \left(L_{41}L_{31} + L_{42}L_{32}\right)\right)\frac{1}{L_{33}} = 1.29312,$$

$$L_{44} = \sqrt{A_{44} - \left(L_{41}^2 + L_{42}^2 + L_{43}^2\right)} = 3.10860.$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 3.16228 & 0 & 0 & 0 \\ 0.31623 & 3.86005 & 0 & 0 \\ 0.63246 & 0.46631 & 3.51888 & 0 \\ -0.31623 & -0.75129 & 1.29312 & 3.10860 \end{bmatrix}$$

D1.9. MACIERZE ORTOGONALNE

Istnieje grupa macierzy mająca własność:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}},$$

która niezwykle uprasza rozwiązywanie układu równań. O macierzach tych mówimy, że są macierzami ortogonalnymi. Własność tą wykazują macierze obrotów wektorów:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix},$$

gdzie $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$, a α jest kątem obrotu.

Sprawdzimy ortogonalność tej macierzy równaniem $\mathbf{R}\,\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{I}$:

$$\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 + s^2 & cs - sc \\ sc - cs & c^2 + s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tą własność macierzy obrotu wykorzystujemy w wielu rozdziałach książki.