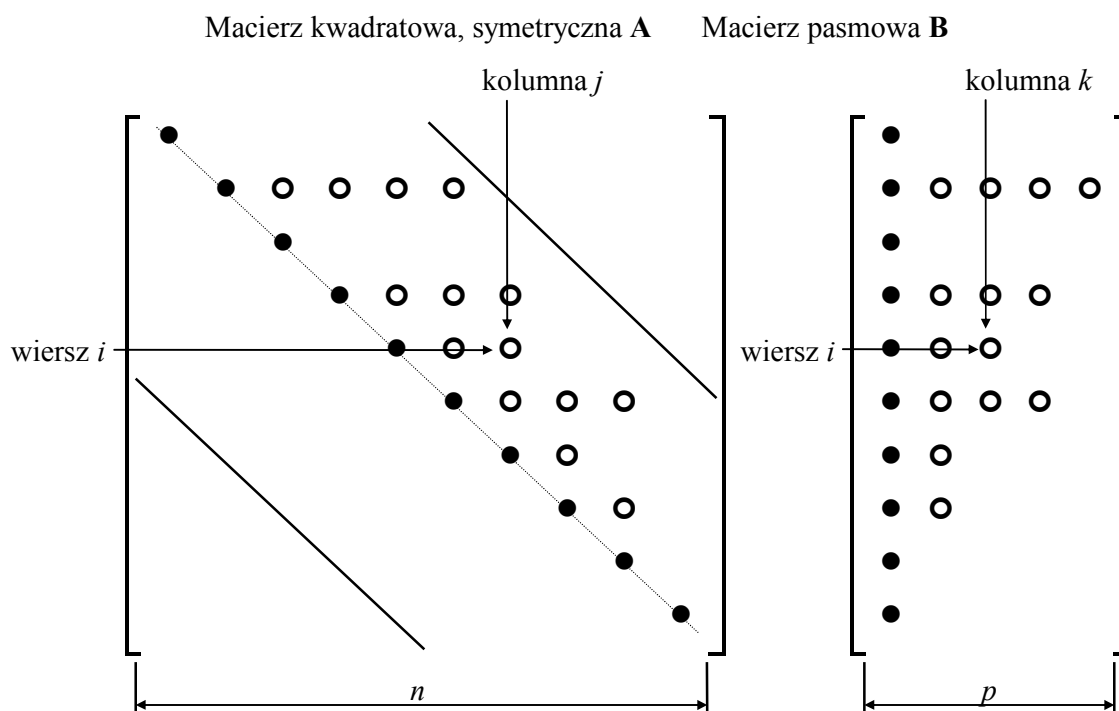


## DODATEK NR 2. METODY ROZWIĄZYWANIA DUŻYCH UKŁADÓW RÓWNAŃ LINIOWYCH

Układy równań, występujące w metodzie elementów skończonych, charakteryzują się dużymi, rzadkimi, dodatnio określonymi macierzami. Metody rozwiązywania układów równań przy tego typu macierzach różnią się nieco strategią od rozwiązywania dowolnych układów, gdyż muszą uwzględniać sposoby przechowywania macierzy w pamięci komputera.

### D2.1. METODY PRZECHOWYWANIA MACIERZY SZTYWNOŚCI

Niezbyt duże zadanie metody elementów skończonych, dla konstrukcji powłokowej, generuje układ równań o rozmiarach rzędu  $1000 \div 10000$  niewiadomych. Przy odpowiedniej numeracji stopni swobody (istnieją bardzo złożone procedury numeracji stopni swobody, korzystające z teorii grafów) macierz kwadratowa układu równań staje się symetryczną macierzą pasmową. Wystarczy zatem zapamiętać (w pamięci operacyjnej lub na dysku komputera) tylko połowę tego pasma, aby można było odtworzyć całą informację zapisaną w macierzy sztywności konstrukcji.



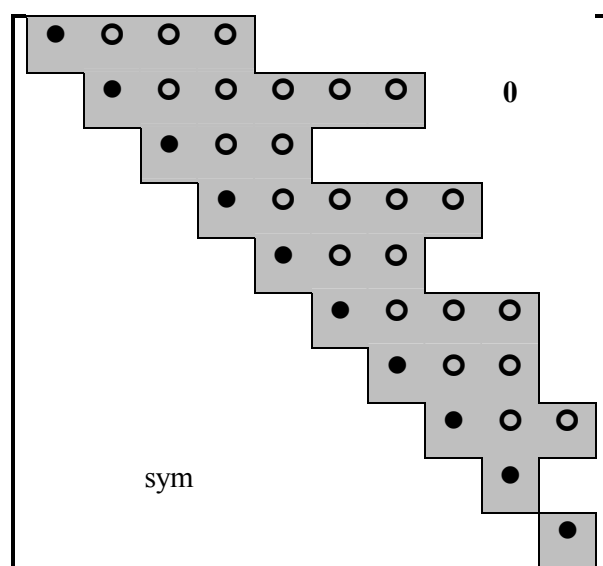
Rys.D2.1

Najprostszą metodą oszczędzania pamięci jest zapisanie górnego (lub dolnego) półpasma macierzy w prostokątnej tablicy pokazanej na Rys.D2.1.

Zmienia to usytuowanie elementów macierzy w tablicy tak, że elementy z głównej przekątnej znajdują się w pierwszej kolumnie pasma, a element, który pierwotnie znajdował się w wierszu  $i$  i kolumnie  $j$  teraz będzie w tym samym wierszu, ale kolumnie  $k$ . Nową wartość indeksu kolumny można obliczyć dzięki prostej zależności:  $k = j - i + 1$ .

Mamy zatem  $B_{ik} = A_{ij}$  dla  $j \geq i$ . Szerokość półpasma  $p$  dla typowych macierzy jest zwykle o rząd wielkości mniejsza od rozmiaru  $n$ . Dolny trójkąt tablicy  $\mathbf{B}$ , który pozostaje zawsze „pusty”, nie ma więc istotnego znaczenia dla oszczędzania pamięci operacyjnej.

Inną, bardziej oszczędną metodą jest metoda *sky-line*, która polega na zapamiętywaniu tylko tych fragmentów wierszy (kolumn) górnego lub dolnego półpasma, które leżą między główną przekątną a ostatnim niezerowym elementem tablicy Rys.D2.2.

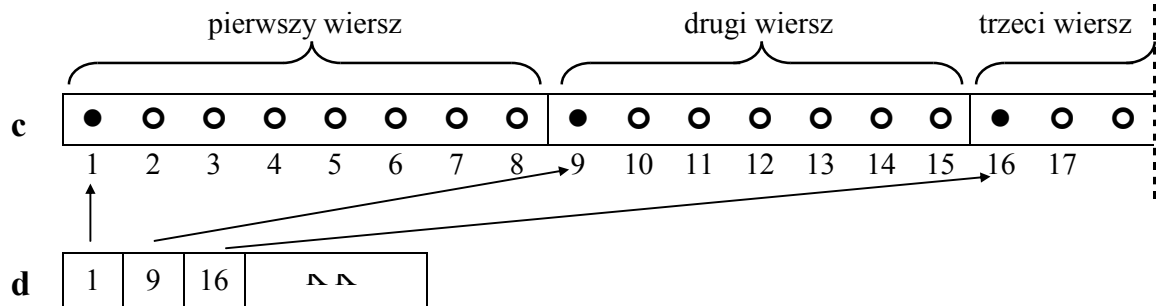


Rys.D2.2

Na Rys.D2.2 zapamiętywany obszar jest zacieniowany.

Taka metoda przechowywania macierzy możliwa jest dzięki temu, że w czasie dekompozycji macierzy, różne od zera elementy macierzy trójkątnej nigdy nie pojawią się w obszarach leżących poza ostatnimi, różnymi od zera składowymi. Ma to duże znaczenie, gdyż zwykle w algorytmach MES używa się procedur, które macierz trójkątną  $\mathbf{L}$  zapamiętują w tej samej tablicy, w której pamiętana była macierz sztywności. Nieregularne kształty obszaru pokazanego na Rys.D2.2 uniemożliwiają zorganizowanie informacji w postaci tablicy dwuwymiarowej.

W metodzie *sky-line* używa się zatem dwóch tablic jednowymiarowych (wektorów), przy czym jedna z nich przechowuje liczby rzeczywiste - składowe macierzy, a druga indeksy pierwszych wyrazów kolejnych wierszy macierzy (Rys.D2.3).



$$A_{ij} = C_k, \quad k = \mathbf{d}[i] + j - i$$

Rys.D2.3

Mimo, iż metoda ta wymaga dosyć skomplikowanych operacji podczas tworzenia macierzy i rozwiązywania układu równań (ciągłe przeliczanie indeksów) jest ona szeroko stosowana, gdyż zapewnia bardzo efektywne wykorzystanie pamięci komputera.

## D2.2. METODA ELIMINACJI GAUSSA

Metoda eliminacji Gaussa (w różnych odmianach) jest jedną z najczęściej wykorzystywanych metod rozwiązywania układów równań liniowych typu  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y}$ , gdzie macierz  $\mathbf{A}$  jest kwadratowa i nieosobliwa.

Rozwiązanie rozpoczynamy od przekształcenia pierwszego równania:

$$x_1 = \frac{1}{A_{11}} \left( y_1 - \sum_{k=2}^n A_{1k} x_k \right)$$

i podstawieniu tak wyznaczonej niewiadomej do pozostałych równań. Spowoduje to eliminację pierwszej kolumny w równaniach od 2 do  $n$  (Rys.D2.4).

Powtarzamy tę operację dla macierzy  $\mathbf{A}^{(1)}$ , która ma wymiary  $(n-1) \times (n-1)$ , otrzymując macierz  $\mathbf{A}^{(2)}$  o wymiarach  $(n-2) \times (n-2)$ , itd. Przekształcenia prowadzimy tak długo, aż otrzymamy równanie z jedną niewiadomą:

$$A_{nn}^{(n-1)} x_n = y_n^{(n-1)},$$

z którego wyznaczamy  $x_n$ .

$$\left[ \begin{array}{c|ccc} 1 & \mathbf{A}_{1k}^{(1)} & \mathbf{A}_{2k}^{(1)} & \dots \\ \hline \mathbf{0} & & \mathbf{A}^{(1)} & \dots \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(1)} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} y_1/A_{11} \\ \vdots \\ \mathbf{y}^{(1)} \end{array} \right]$$

Rys.D2.4. Układ równań liniowych po pierwszej eliminacji.

Można więc powiedzieć, że eliminacja Gaussa polega na takiej transformacji macierzy układu równań liniowych, która doprowadza do utworzenia układu równań z macierzą trójkątną górną:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{y} \xrightarrow{\text{eliminacja Gaussa}} \mathbf{U} \mathbf{x} = \mathbf{y}^*$$

Metoda rozwiązywania tego typu układów opisana jest w dodatku nr 1. Koszt metody Gaussa jest równy  $n^3/3$ , i jak można udowodnić (por. [2]) nie można znaleźć algorytmu istotnie tańszego.

W trakcie eliminacji niewiadomych w przekształceniach pojawia się ciągle dzielenie przez diagonalną składową macierzy  $\mathbf{A}$ . Może się zdarzyć, że nawet dla nieosobliwej macierzy  $A_{ii}^{(k)}$  okaże się równe lub bliskie zeru, co uniemożliwi uzyskanie rozwiązania lub prowadzi do dużych błędów numerycznych. Sytuacji takiej można uniknąć przeprowadzając eliminację w inny sposób. Zmiana kolejności wyboru niewiadomych do eliminacji umożliwia wyszukanie takiej składowej diagonalnej, która jest największa w macierzy  $A^{(k)}$ , a co za tym idzie minimalizację błędu numerycznego.

Odmiana eliminacji Gaussa z wyborem elementu „środkowego” nosi nazwę metody Gaussa-Jordana. Zapewnia ona uzyskanie rozwiązania z małym błędem nawet dla słabo uwarunkowanych układów równań, tzn., takich gdzie wyznacznik macierzy  $\mathbf{A}$  jest bliski zeru.

Przykład realizacji algorytmu Gaussa pokazuje zamieszczony poniżej fragment kodu źródłowego programu PASCAL, rozwiązującego układy równań liniowych (procedura Gauss).

### D2.3. METODA ITERACYJNA GAUSSA-SEIDELA

Metoda iteracyjna (kolejnych przybliżeń) Gaussa-Seidela polega na założeniu, że diagonalne składowe macierzy są znacznie większe od składowych leżących poza przekątną. Dzięki temu można obliczyć:

$$x_1 = \frac{1}{A_{11}} \left( y_1 - \sum_{k=2}^n A_{1k} x_k \right),$$

przy założeniu początkowym, że  $x_k = 0$  dla  $k = 2 \dots n$ . Przybliżenie to powtarzamy dla pozostałych wartości niewiadomych:

$$x_i = \frac{1}{A_{ii}} (y_i - S_{iL} - S_{iR}),$$

gdzie  $S_{iL}$  - jest sumą wszystkich iloczynów wyrazów leżących z „lewej” strony  $x_i$  przez odpowiednie wartości niewiadomych, a  $S_{iR}$  - sumą iloczynów leżących po „prawej” stronie  $x_i$ :

$$S_{iL} = \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik} x_k,$$

$$S_{iR} = \sum_{k=i+1}^n A_{ik} x_k.$$

Kolejne przybliżenia wartości niewiadomych wykonywane tą metodą są zbieżne wtedy, gdy układ równań jest dobrze uwarunkowany, tzn. wyrazy leżące na diagonalu są większe od składowych leżących poza nią. Tak zbudowane są macierze sztywności metody elementów skończonych. Modyfikacja Seidela tej metody polega na uwzględnieniu podczas iteracji  $m$  aktualnych wartości niewiadomych, tzn. suma  $S_{iL}$  obliczana jest z użyciem niewiadomych  $m$ -tej iteracji a suma  $S_{iR}$  na podstawie wartości niewiadomych wyznaczonych w poprzedniej ( $m-1$ ) iteracji:

$$x_i^{(m)} = \frac{1}{A_{ii}} (y_i - S_{iL}^{(m)} - S_{iR}^{(m-1)}),$$

gdzie  $S_{iL}^{(m)} = \sum_{k=1}^{i-1} A_{ik} x_k^{(m)}$ ,  $S_{iR}^{(m-1)} = \sum_{k=i+1}^n A_{ik} x_k^{(m-1)}$ ,  $x_k^{(m)}$  - wartość niewiadomej  $x_k$  wyznaczona w  $m$ -tej iteracji.

Po każdym kroku iteracyjnym obliczamy różnicę  $\Delta_i^{(m)} = x_i^{(m)} - x_i^{(m-1)}$ , która pozwala zorientować się w zbieżności procesu. Iteracje można przerwać, gdy  $\text{Max}(|\Delta_i|) < \varepsilon$ , tzn. największa z różnic jest mniejsza od dopuszczalnego błędu obliczeń. Przy dużych układach

równań, metoda Gaussa-Seidela pozwala często szybciej uzyskać rozwiązanie niż metoda zamknięta (np. metoda Gaussa-Jordana),

#### D2.4. METODA NADRELAKSACJI AITKENA

W procesie iteracyjnym Gaussa-Seidela zauważamy, że

$$x_i^{(m)} = x_i^{(m-1)} + \Delta_i^{(m)},$$

czyli wartość niewiadomej przybliża się do wartości dokładnej krokiem  $\Delta_i^{(m)}$ . Aitken zauważył, że można zwiększyć szybkość procesu (czyli zmniejszyć ilość niezbędnych iteracji), gdy obliczymy:

$$x_i^{(m)} = x_i^{(m-1)} \omega \Delta_i^{(m)},$$

gdzie  $\omega$  jest współczynnikiem nadrelaksacji. Wartość tego współczynnika należy dobrać na podstawie eksperymentów numerycznych. Powinna ona leżeć w przedziale  $\langle 1.0 \div 2.0 \rangle$ . Nasze obliczenia pokazały, że w zadaniach statyki kratownic przestrzennych, optymalna wartość współczynnika nadrelaksacji wynosiła 1.26.

#### D2.5. INNE METODY ROZWIĄZYWANIA DUŻYCH UKŁADÓW RÓWNAŃ

Układy równań metody elementów skończonych rozwiązuje się bardzo często metodami polegającymi na dekompozycji macierzy, np. metodą Banachewicza-Cholesky'ego, opisaną w dodatku nr 1. Koszt tej metody dla symetrycznych, pełnych macierzy jest proporcjonalny do  $n^3/6$ , a dla macierzy pasmowych występujących w zadaniach MES koszt wynosi  $np^2/6$ , gdzie  $p$  - jest szerokością półpasma macierzy.

Oprócz metody Banachewicza-Cholesky'ego używane też są inne metody dekompozycji, np. metoda Crouta, polegająca na rozkładzie macierzy  $\mathbf{A}$  na trzy macierze:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T,$$

gdzie  $\mathbf{D}$  jest macierzą diagonalną, tzn. zawierającą niezerowe współczynniki tylko na głównej przekątnej. Rozkład taki nie jest jednoznaczny jak rozkład Banachewicza-Cholesky'ego, więc najczęściej wybiera się tak składowe diagonalne macierzy  $\mathbf{L}$ , aby były one równe jedności. Dekompozycja Crouta bywa często używana w rozwiązywaniu zadań MES, szczególnie w zadaniach nieliniowych, gdzie macierz sztywności nie zawsze jest dodatnio określona. Metoda Banachewicza-Cholesky'ego prowadziłyby wówczas do powstania macierzy o składowych zespolonych, gdyż wyrazy diagonalne oblicza się tam przez pierwiastkowanie, w metodzie Crouta otrzymamy zawsze macierz o współczynnikach rzeczywistych [2].

Dekompozycja Crouta prowadzi do następujących zależności:

$$D_{ii} = A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}^2 D_{kk}$$

$$D_{ij} = 0 \text{ dla } j \neq i,$$

$$L_{ij} = 0 \text{ dla } j > i,$$

$$L_{ii} = 1.0,$$

$$L_{ij} = \frac{1}{D_{jj}} \left( A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk} D_{kk} \right) \text{ dla } j < i,$$

Koszt dekompozycji macierzy metodą Crouta podobnie jak dla metody Banachewicza - Cholesky'ego proporcjonalny jest do  $n^3/6$  dla macierzy pełnych.

DODATEK NR 2. METODY ROZWIĄZYWANIA DUŻYCH UKŁADÓW RÓWNAŃ  
LINIOWYCH 147

D2.1. METODY PRZECHOWYWANIA MACIERZY SZTYWNOŚCI.....	147
D2.2. METODA ELIMINACJI GAUSSA.....	149
D2.3. METODA ITERACYJNA GAUSSA-SEIDELA.....	151
D2.4. METODA NADRELAKSACJI AITKENA.....	152
D2.5. INNE METODY ROZWIĄZYWANIA DUŻYCH UKŁADÓW RÓWNAŃ .....	152