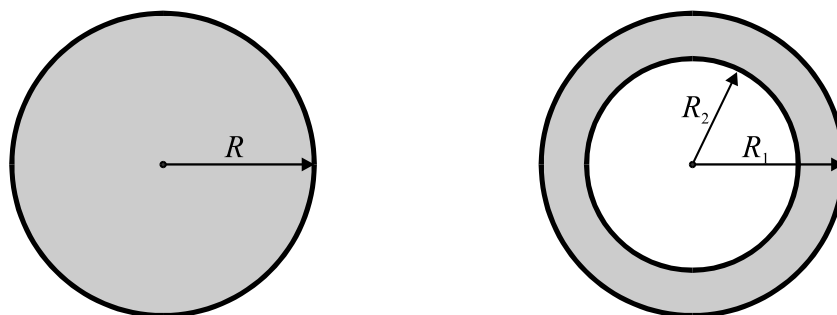


DODATEK NR 3. SZTYWNOŚĆ PRZY SKRĘCANIU ELEMENTÓW PRĘTOWYCH

Zagadnienie skręcania prętów ma duże znaczenie praktyczne. Wyznaczenie sztywności pręta przy skręcaniu jest niezbędne do określenia składowych macierzy sztywności prętów ramy przestrzennej (por. rozdz.V). Zadanie wyznaczenia naprężeń i sztywności pręta o przekroju kołowo-symetrycznym (Rys.D3.1) rozwiązał Coulomb w końcu XVIII wieku [17].



Rys.D3.1

A. Przekrój kołowy

W przypadkach tych przekrojów ich sztywność skrętna równa jest biegunowemu momentowi bezwładności i wynosi:

$$C = J_o = \frac{\pi R^4}{2} \text{ dla przekroju kołowego pełnego}$$

i

$$C = J_o = \frac{\pi}{2} (R_1^4 - R_2^4) \text{ dla przekroju kołowego rurowego.}$$

Zależność między momentem skręcającym M_s a jednostkowym kątem obrotu przekroju ϑ jest zatem równa:

$$M_s = CG\vartheta.$$

Zagadnienie wyznaczania sztywności i naprężeń w skręcanym pręcie o dowolnym przekroju poprzecznym rozwiązał de Saint-Venant w połowie XIX wieku. Założył on, że przekroje niekołowe podczas skręcania ulegają deplanacji. Wyznaczenie funkcji deplanacji ψ wymaga rozwiązania harmonicznego równania różniczkowego:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

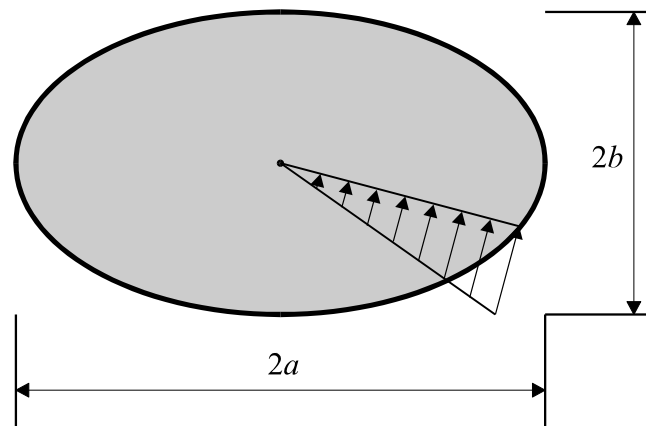
Wiele przykładów rozwiązań tego zagadnienia dla różnych przekrojów znaleźć można w książkach P.S.Timoshenki i J.N.Goodiera [17], M.T.Hubera [6]. W dodatku tym podamy gotowe rozwiązania dla kilku różnych przekrojów ważnych w zastosowaniach technicznych.

B. Przekrój eliptyczny

Zagadnienie rozwiązane przez de Saint-Venanta w 1855 r.

$$C = \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2},$$

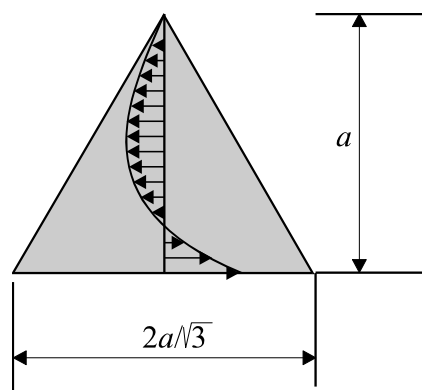
gdzie a i b są półosiami elipsy.



Rys.D3.2

C. Trójkąt równoboczny

Zagadnienie rozwiązane przez de Saint-Venanta w 1855 r.

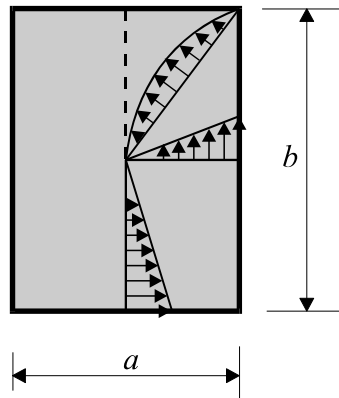


$$C = \frac{a^4 \sqrt{3}}{45}$$

Rys.D3.3

D. Przekrój prostokątny

Zagadnienie rozwiązane przez de Saint-Venanta w 1856 r.



Rys.D3.4

$$C = k \left(\frac{a}{b} \right) a^3 b, \quad \text{gdzie } k \left(\frac{a}{b} \right) = \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{tgh} \frac{n\pi b}{2a}, \quad \frac{a}{b} \leq 1$$

Dobre przybliżenie wartości k , uzyskać można stosując formułę C. Webera[13,15]:

$$\text{a) } k \left(\frac{a}{b} \right) \approx \frac{1}{3} \left[1 - 0.63 \frac{a}{b} + 0.052 \left(\frac{a}{b} \right)^5 \right],$$

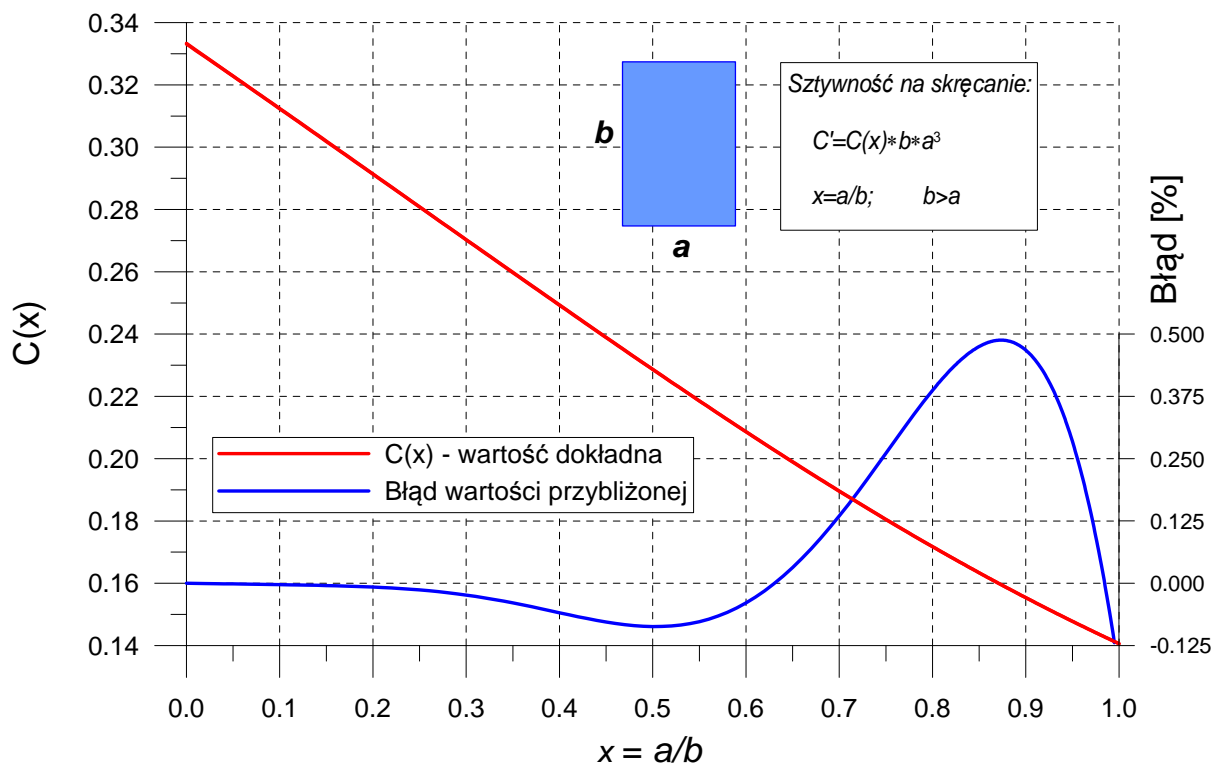
dającą wartość różniącą się od dokładnych nie więcej niż 0.55% (przy $\frac{a}{b} \approx 0.88$).

Zmodyfikowana formuła Webera:

$$\text{b) } k \left(\frac{a}{b} \right) \approx \frac{1}{3} - 0.21 \frac{a}{b} \left(1 - \frac{a^4}{12b^4} \right),$$

daje wartość różniącą się od dokładnej nie więcej niż 0.49% (przy $\frac{a}{b} \approx 0.87$).

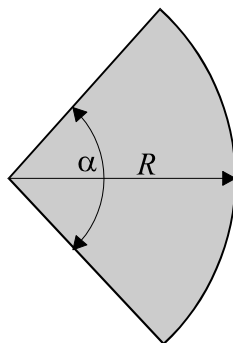
Rys.D3.5 przedstawia wykres zależności $k \left(\frac{a}{b} \right)$, która może posłużyć do przybliżonego wyznaczenia sztywności przekroju prostokątnego.



Rys.D3.5

E. Wycinek koła

Zadanie rozwiązał de Saint-Venant w 1878 r.



Rys.D3.6

$$C = k(\alpha)R^4,$$

gdzie $k(\alpha)$ jest współczynnikiem obliczanym z równania:

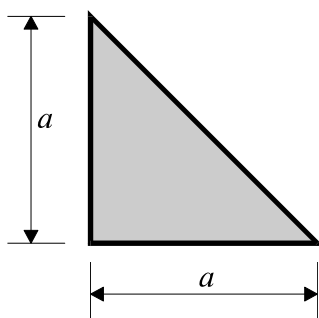
$$k(\alpha) = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \int_0^R \left[-r^2 \left(1 - \frac{\cos 2\varphi}{\cos \alpha} \right) + \frac{16r^2 \alpha^2}{\pi^3} \sum_{n=1.3.5}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \frac{\cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha}}{n \left(n \frac{2\alpha}{\pi} \right) \left(n - \frac{2\alpha}{\pi} \right)} \right] r d\varphi dr.$$

Wartości tego współczynnika dla kilku wartości kąta α podajemy w tablicy

α	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$3\pi/2$	$5\pi/3$	2π
k	0.0181	0.0349	0.0825	0.148	0.296	0.572	0.672	0.878

F. Równoramienny trójkąt prostokątny

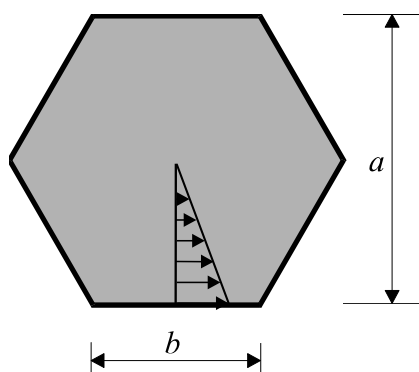
Zadanie rozwiązał Galerkin w 1919 r.



Rys.D3.7

$$C = \frac{a^4}{38.3}$$

G. Sześciokąt foremny



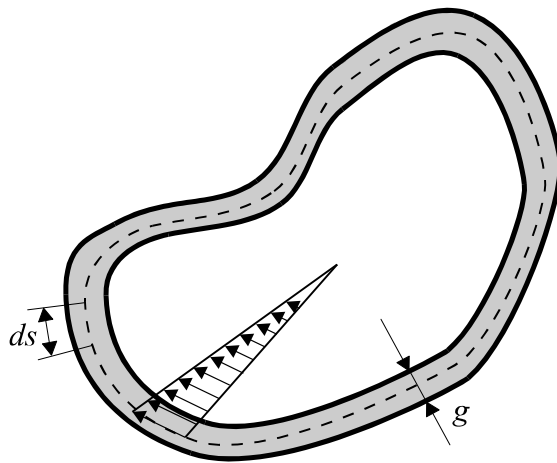
Rys.D3.8

$$J_o = \frac{5\sqrt{3}}{8} b^4 ; A = \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2 ;$$

$$C = 1.0366 b^4 ;$$

$$\beta = \frac{A^4}{CJ_o} = 40.603 ; \tau_{\max} = 0.564 b^2 .$$

H. Rura cienkościenna o dowolnym przekroju

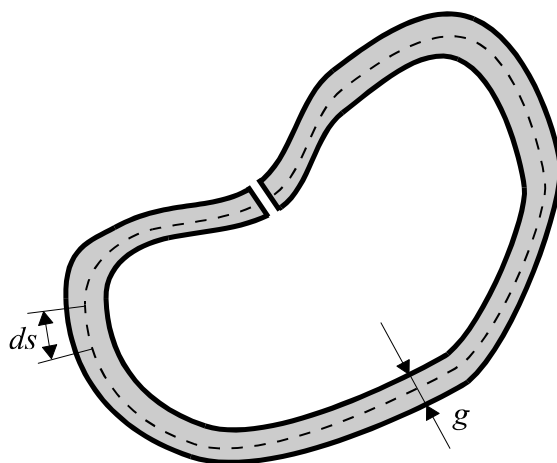


Rys.D3.9

$$C = \frac{4A_o^2}{\int_S \frac{ds}{g(\alpha)}}$$

gdzie A_o jest polem powierzchni figury ograniczonej linią połowiącą grubość ścianki rury. Całkować należy po obwodzie S tej figury.

I. Rura cienkościenna rozcięta wzdłuż tworzącej

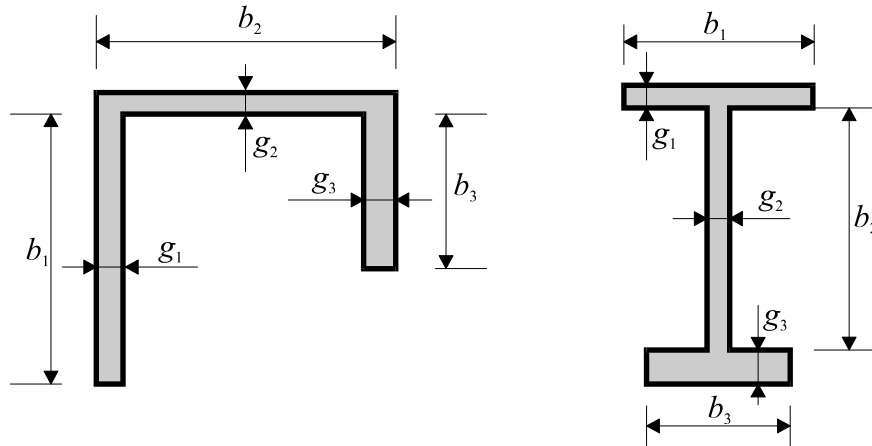


Rys.D3.10

$$C = \frac{1}{3} \int_S g^3 ds.$$

Ciekawym spostrzeżeniem jest tu fakt, że sztywność nie zależy od kształtu przekroju poprzecznego a tylko od jego grubości i obwodu S .

J. Przekroje jednospójne złożone z cienkich prostokątów



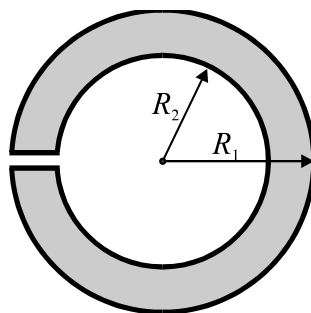
Rys.D3.11

$$C = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n g_i^3 b_i$$

Porównując współczynnik $\frac{1}{3}$ w tym wzorze z wykresem na Rys.D3.5 zauważymy, że sztywność ta wyznaczona jest zawsze z nadmiarem. Dla przekroju złożonego z prostokątów o jednakowej grubości dokładniejszą wartość otrzymamy, używając wzoru dla prostokąta (przykład D), gdzie zamiast a podstawimy g a zamiast b długość obwodu linii środkowej przekroju $b = \sum_{i=1}^n b_i$.

$$b = \sum_{i=1}^n b_i .$$

K. Rura grubościenna rozcięta wzdłuż tworzącej



$$C = \frac{\pi}{2} \left[R_2^4 - R_1^4 - \frac{(R_2^2 - R_1^2)^2}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} \right]$$

Rys.D3.12

L. Inne przekroje o konturze wypukłym

Na podstawie analizy wielu rozwiązań ścisłych de Saint-Venant zaproponował, żeby sztywność skrętną przekroju wyznaczyć z przybliżonego wzoru:

$$C = \frac{A^4}{4\pi^2 J_o},$$

gdzie A jest polem powierzchni przekroju, a J_o środkowym momentem bezwładności.

Wzór ten jest ścisły dla elipsy, uogólniając go zapiszemy:

$$C = \frac{A^4}{\beta J_o},$$

gdzie β jest współczynnikiem zależnym od kształtu przekroju. Obliczając współczynnik β można skorzystać z tabeli podającej jego wartości dla kilku kształtów.

Przekrój	Koło, Elipsa	Trójkąt równo- boczny	Prostokąt				Wycinek koła		Równ. trójkąt prost.	Sześciokąt foremny
			1:1	2:3	1:2	1:4	$\alpha=\pi/2$	$\alpha=\pi$		
Przykład	A, B	C	D	D	D	D	E	E	F	G
β	$4\pi^2=$ 39.478	45	42.674	42.438	41.976	40.221	42.022	40.935	43.088	40.603