Drgania własne belki swobodnie podpartej

$\mathrm{ORIGIN} := 1$

$E := 10\ GPa \qquad b := 10\ cm \qquad h := 10\ cm \qquad L := 10\ m \qquad \rho := 600\ \dfrac{kg}{m^3}$

$A := b \cdot h \qquad J := \dfrac{A \cdot h^2}{12} \qquad \mu := \rho \cdot A \qquad c := \sqrt{\dfrac{E \cdot J}{\mu}}$

$A = 100\ cm^2 \qquad J = 833.333\ cm^4 \qquad \mu = 6\ \dfrac{kg}{m} \qquad c = 117.851\ \dfrac{m^2}{s} \qquad EJ := E \cdot J = 83.333333\ kN \cdot m^2$

Warunki brzegowe: $\quad y(0) = 0 \qquad y(L) = 0$

$M(0) = 0 \qquad M(L) = 0$

Równanie różniczkowe opisujące swobodne drgania (bez tłumienia) pręta prostego przy zastosowaniu modelu Bernoulliego (bez udziału sił poprzeczych i bezwładności obrotowej).

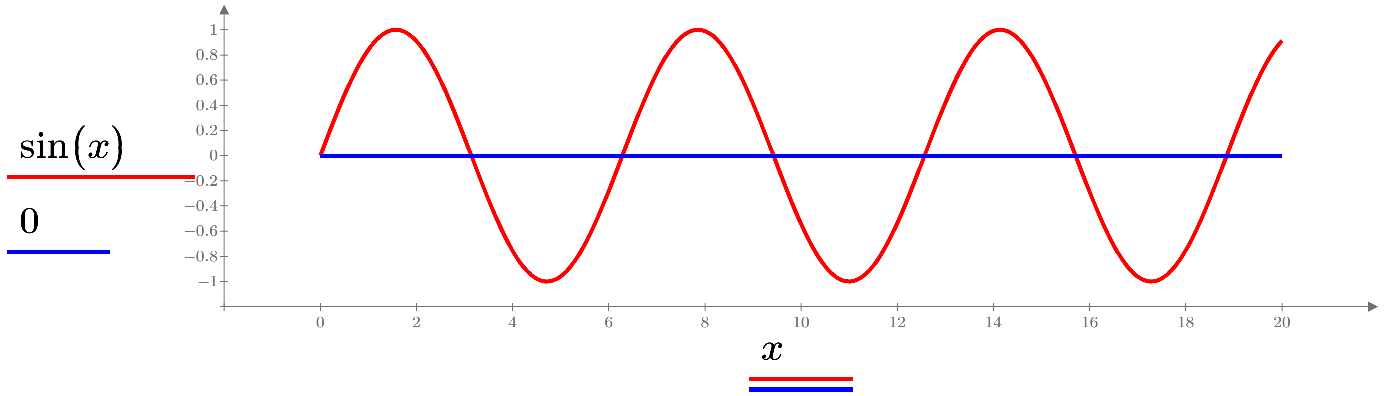
$$\frac{M(x)}{EJ} = \frac{d^2}{dx^2} y(x)$$

$$EJ \cdot \frac{d^4}{dx^4} w(x,t) + \mu \cdot \frac{d^2}{dt^2} w(x,t) = 0 \qquad (1)$$

Przyjmując rozwiązanie w postaci $\quad w(x,t) = y(x) \cdot sin(\omega \cdot t) \quad$ *otrzymamy:*

$$\left[\frac{d^4}{dx^4} y(x) - \frac{\mu \cdot \omega^2}{EJ} \cdot y(x)\right] \cdot sin(\omega \cdot t) = 0 \quad \text{--------->} \quad \frac{d^4}{dx^4} y(x) - \frac{\varphi^4}{L^4} \cdot y(x) = 0 \qquad \varphi = L \cdot \sqrt{\frac{\omega}{c}}$$

Równanie przestępne, wynikające z warunków brzegowych, dające częstości drgań własnych: $sin(\varphi)=0$



$n:=8$

$i:=1..2\ n$ $\qquad \varphi_i:=i\cdot\pi$ $\qquad \omega_A:=\frac{c}{L^2}\cdot\varphi^2$

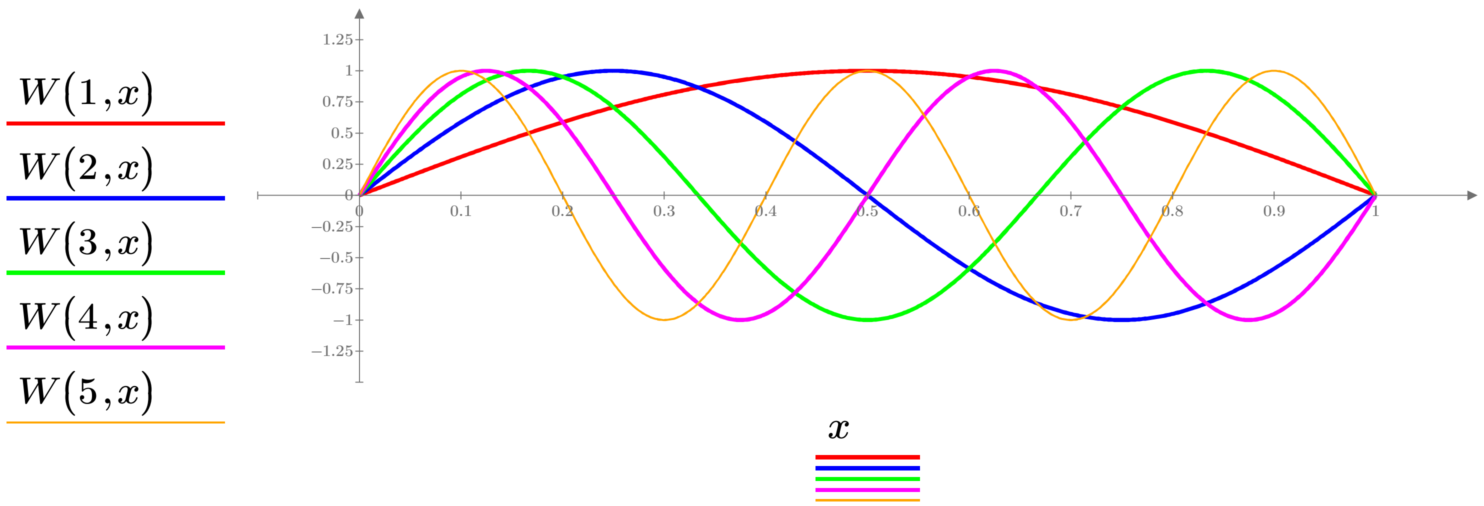
$$\varphi=\begin{array}{c|c} 0 & 3.141593 \\ 1 & 6.283185 \\ 2 & 9.424778 \\ 3 & 12.566371 \\ 4 & 15.707963 \\ 5 & 18.849556 \\ 6 & 21.991149 \\ 7 & 25.132741 \\ 8 & 28.274334 \\ 9 & 31.415927 \\ 10 & 34.557519 \\ 11 & 37.699112 \\ \vdots\ 15 & \vdots \end{array}$$

$$\omega_A=\begin{array}{c|c} 0 & 11.63144 \\ 1 & 46.525761 \\ 2 & 104.682963 \\ 3 & 186.103045 \\ 4 & 290.786008 \\ 5 & 418.731852 \\ \vdots\ 15 & \vdots \end{array}\ \frac{rad}{s}$$

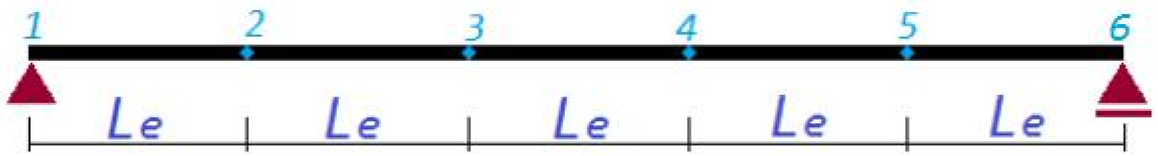
$$\frac{\omega_A}{2\cdot\pi}=\begin{array}{c|c} 0 & 1.851 \\ 1 & 7.405 \\ 2 & 16.661 \\ 3 & 29.619 \\ 4 & 46.28 \\ 5 & 66.643 \\ 6 & 90.709 \\ 7 & 118.477 \\ 8 & 149.947 \\ 9 & 185.12 \\ 10 & 223.995 \\ 11 & 266.573 \\ \vdots\ 15 & \vdots \end{array}\ \frac{1}{s}$$

Postacie drgań własnych

$W(n,x):=\sin(\varphi_n\cdot x)$



Drgania własne belki obliczone metodą elementów skończonych



$l := 1\ m$ <--- jednostka długości lub długość porównawcza

$Le := \dfrac{L}{n}$ $\quad \kappa := \dfrac{EJ}{Le^2} = 53.333333\ kN$ $\quad \lambda e := \dfrac{Le}{l} = 1.25$

$Ls := 2$ $\quad Lw := n+1$ - Liczba węzłów $\quad Lr := Ls \cdot Lw$ - Liczba równań

$n_1 := 7$ $\quad n_2 := 13$

$\omega_0 := \dfrac{20}{s}$ $\quad p_{Lr} := 0$ $\quad p_{n_1} := 1$ $\quad p_{n_2} := -0.8$

Funkcja DBM - Dodaj Blok Macierzy

```
DBM(A,B,w,k) := ‖ for i ∈ 1..rows(B)
                ‖   ‖ for j ∈ 1..cols(B)
                ‖   ‖   ‖ A[w+i-1, k+j-1] ← B[i,j] + A[w+i-1, k+j-1]
                ‖ A
```

```
P1(t) := ‖ S ← 0·kN
         ‖ if t < π/ω0
         ‖   ‖ S ← 1 kN·sin(ω0·t)
         ‖ S

P2(t) := ‖ S ← 1·kN
         ‖ if t < π/(2 ω0)
         ‖   ‖ S ← 1 kN·sin(ω0·t)
         ‖ S
```

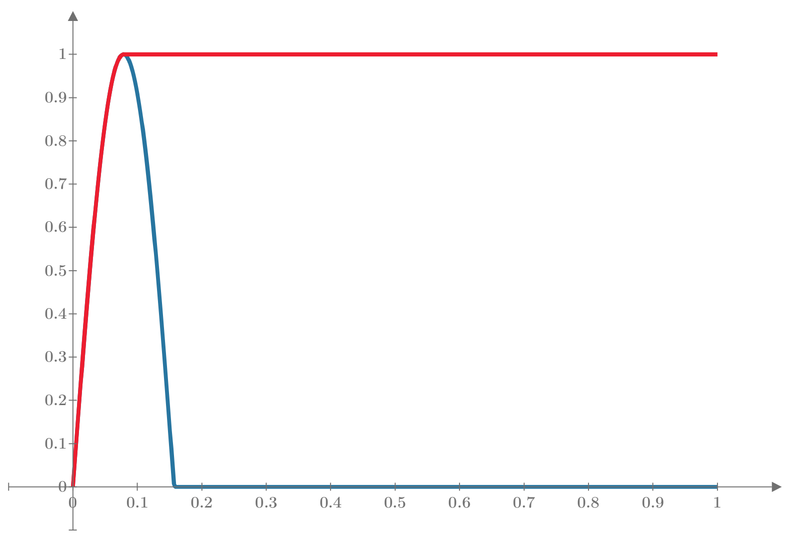
$p1(t) := p \cdot P1(t)$ $\quad p2(t) := p \cdot P2(t)$

$P1(0.2\ s) = 0\ kN$ $\quad P2(0.2\ s) = 1\ kN$

Agregacja macierzy globalnych belki

$Ae = \begin{bmatrix} Aa & Ab \\ Ab^T & Ac \end{bmatrix}$

```
Agrg_B(N,Aa,Ab,Ac) := ‖ Lss ← 2
                      ‖ Lr ← Lss (N+1)
                      ‖ A[Lr,Lr] ← 0
                      ‖ for e ∈ 1..N
                      ‖   ‖ n ← e·Lss - 1
                      ‖   ‖ k ← n + 2
                      ‖   ‖ A ← DBM(A,Aa,n,n)
                      ‖   ‖ A ← DBM(A,Ac,k,k)
                      ‖   ‖ A ← DBM(A,Ab,n,k)
                      ‖   ‖ A ← DBM(A,Ab^T,k,n)
                      ‖ A
```



$P1(t \cdot 1\ s)\ (kN)$

$P2(t \cdot 1\ s)\ (kN)$

t

Macierz sztywności elementów belki

$$K=\frac{EJ}{Le^2}\cdot\begin{bmatrix}\frac{12}{Le} & 6 & \frac{-12}{Le} & 6\\ 6 & 4\cdot Le & -6 & 2\cdot Le\\ \frac{-12}{Le} & -6 & \frac{12}{Le} & -6\\ 6 & 2\cdot Le & -6 & 4\cdot Le\end{bmatrix}$$

$$K=\kappa\cdot\begin{bmatrix}Ka & Kb\\ Kb^{\mathrm{T}} & Kc\end{bmatrix}$$

$$\kappa=53.333333\ kN$$

Bloki bezwymiarowej macierzy sztywności elementu

$$Ka:=\begin{bmatrix}\frac{12}{\lambda e} & 6\\ 6 & 4\cdot\lambda e\end{bmatrix}\qquad Kb:=\begin{bmatrix}\frac{-12}{\lambda e} & 6\\ -6 & 2\cdot\lambda e\end{bmatrix}\qquad Kc:=\begin{bmatrix}\frac{12}{\lambda e} & -6\\ -6 & 4\cdot\lambda e\end{bmatrix}$$

Agregacja globalnej bezwymiarowej macierzy sztywności belki

$$K:=Agrg\_B(n,Ka,Kb,Kc)$$

$$K=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 6 & 5 & -6 & 2.5 & 0 & 0 & 0 & \\ -9.6 & -6 & 19.2 & 0 & -9.6 & 6 & 0 & \\ 6 & 2.5 & 0 & 10 & -6 & 2.5 & 0 & \\ 0 & 0 & -9.6 & -6 & 19.2 & 0 & -9.6 & \\ 0 & 0 & 6 & 2.5 & 0 & 10 & -6 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9.6 & -6 & 19.2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2.5 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9.6 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & & & \ddots\end{bmatrix}$$

$$p_{F_{13}}:=-0.8\ kN$$

$$p_{F_{Lr}}:=0\ kN\qquad p_{F_7}:=1\ kN\qquad f_F:=\frac{p_F}{\kappa}$$

$$i:=1..Lr$$

$$w:=1\qquad K_{w,i}:=0\qquad K_{w,w}:=1$$

$$w:=Lr-1\qquad K_{w,i}:=0\qquad K_{w,w}:=1$$

$$y:=\mathrm{lsolve}(K,f_F)$$

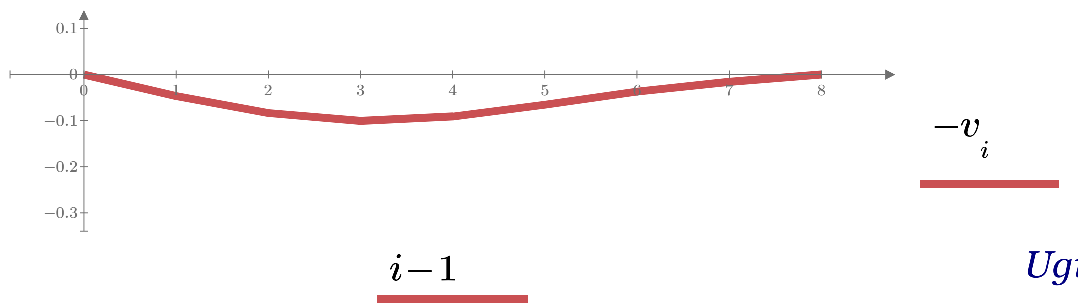
$$i:=1..\frac{Lr}{2}$$

$$v_i:=y_{2\cdot i-1}$$

$$v=\begin{bmatrix}0\\0.04668\\0.083398\\0.100195\\0.091016\\0.06543\\0.036914\\0.01582\\0\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}0\\0.0386719\\0.0466797\\0.0346875\\0.0833984\\0.0227344\\0.1001953\\0.0028125\\0.0910156\\-0.0157031\\0.0654297\\-0.0234375\\0.0369141\\-0.0203906\\0.0158203\\-0.0140625\\0\\-0.0119531\end{bmatrix}\qquad p_F=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\-0.8\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}kN$$

Ugięcie statyczne belki $\quad u_{max}:=l\cdot\max(y)=10.019531\ cm$



Ugięcie statyczne belki obciążonej siłą 1kN w środku rozpiętości $\quad\frac{1\ kN\cdot L^3}{48\cdot EJ}=25\ cm$

Diagonalna macierz bezwładności elementów belki

$$M=\frac{\mu\cdot Le^2}{24}\cdot\begin{bmatrix}\frac{12}{Le} & 0 & 0 & 0\\ 0 & Le & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{12}{Le} & 0\\ 0 & 0 & 0 & Le\end{bmatrix}$$

$$M=\eta\cdot\begin{bmatrix}Ma & 0\\ 0 & Ma\end{bmatrix}$$

$$\eta:=\frac{\mu\cdot Le^2}{24}=\left(3.90625\cdot10^{-1}\right)\ \boldsymbol{kg\cdot m}\qquad Ma:=\begin{bmatrix}\frac{12}{\lambda e} & 0\\ 0 & \lambda e\end{bmatrix}\qquad M0:=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\theta:=\frac{\eta}{\kappa}=\left(7.324219\cdot10^{-6}\right)\ \boldsymbol{s}^2$$

Aby zmniejszyć wpływ bezwładności obrotowej można przyjąć Ma ze współczynnikiem 0<a<1

$$a:=0.1\qquad Ma:=\begin{bmatrix}\frac{12}{\lambda e} & 0\\ 0 & a\cdot\lambda e\end{bmatrix}$$

Agregacja diagonalnej bezwymiarowej macierzy bezwładności

$$M:=Agrg\_B(n,Ma,M0,Ma)$$

$$M=\begin{array}{r|c} & \begin{array}{cccccccccccc}0&1&2&3&4&5&6&7&8&9&10&\cdots 17\end{array}\\ \hline \begin{array}{r}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\\vdots\\17\end{array} & \left[\begin{array}{cccccccccccc}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\\
0&0.125&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\\
0&0&19.2&0&0&0&0&0&0&0&0&\\
0&0&0&0.25&0&0&0&0&0&0&0&\\
0&0&0&0&19.2&0&0&0&0&0&0&\\
0&0&0&0&0&0.25&0&0&0&0&0&\\
0&0&0&0&0&0&19.2&0&0&0&0&\\
0&0&0&0&0&0&0&0.25&0&0&0&\\
0&0&0&0&0&0&0&0&19.2&0&0&\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0.25&0&\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&19.2&\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\\
&&&&&&&&&&&\ddots
\end{array}\right]\end{array}$$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$$i:=1..Lr$$

$$w:=1\qquad K_{w,i}:=0\quad K_{i,w}:=0\quad K_{w,w}:=1\qquad M_{w,i}:=0\qquad M_{w,w}:=1$$

$$w:=Lr-1\qquad K_{w,i}:=0\quad K_{i,w}:=0\quad K_{w,w}:=1\qquad M_{w,i}:=0\qquad M_{w,w}:=1$$

$$\kappa\cdot\left[K-\omega^2\ \theta\cdot M\right]\ y=0\qquad \left|M^{-1}\cdot K-\sigma\cdot I\right|=0\qquad \omega^2\cdot\theta=\sigma\qquad |M|=9.172943\cdot10^2$$

$$\sigma:=\text{eigenvals}\left(M^{-1}\cdot K\right)\qquad \omega:=\text{sort}\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\theta}}\right)$$

$$\omega^{\mathrm{T}}=\left[11.62\ \ 46.39\ \ 103.91\ \ 183.03\ \ 280.6\ \ 369.5\ \ 369.5\ \ 387.75\ \ 482.09\ \ 1652.47\ \ 1723.02\ \ 1900.84\ \ 2127.53\ \ 2358.89\ \ \ldots\right]\ \frac{\boldsymbol{rad}}{\boldsymbol{s}}$$

Równanie wymuszonych, tłumionych drgań belki

$$\psi_i = \frac{u_i}{l}$$

e

i ||===============|| j

<--------- Le ---------->

$$y_e = \begin{bmatrix} \psi_i \\ \varphi_i \\ \psi_j \\ \varphi_j \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

$$K_@ \cdot u(t) + C_@ \cdot u'(t) + M_@ \cdot u''(t) = p(t) \qquad u' = \frac{d}{dt} u$$

$C_@ = \alpha \cdot M_@ + \beta \cdot K_@$ *<--- macierz tłumienia Rayleigha*

$$C_@ = \alpha \cdot \eta \cdot M + \beta \cdot \kappa \cdot K = \beta \cdot \kappa \cdot \left[K + \frac{\alpha \cdot \theta}{\beta} \cdot M\right]$$

$$\kappa \cdot K \cdot y(t) + \kappa \cdot \beta \cdot C \cdot y'(t) + \eta \cdot M \cdot y''(t) = p(t)$$

$$K \cdot y(t) + \beta \cdot C \cdot y'(t) + \theta \cdot M \cdot y''(t) = f(t)$$

$$\kappa = 53.3\ \mathbf{kN} \qquad \eta = 0.391\ \mathbf{N \cdot s^2} \qquad \theta := \frac{\eta}{\kappa} = \left(7.324219 \cdot 10^{-6}\right)\ \mathbf{s^2}$$

Macierze K, C, M, y, f - są bezwymiarowe

$$C = K + \frac{\alpha \cdot \theta}{\beta} \cdot M \qquad f(t) := \frac{1}{\kappa} \cdot p1(t)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \\ \frac{1}{\omega_2} & \omega_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}$$

Współczynniki (a,b) macierzy tłumienia

$$\omega_1 := \omega_{A_1} \qquad \omega_2 := \omega_{A_2} \qquad \zeta_1 := 0.05 \qquad \zeta_2 := 0.07$$

$$\beta := 2 \frac{\omega_1 \cdot \zeta_1 - \omega_2 \cdot \zeta_2}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \qquad \beta = \left(2.636532 \cdot 10^{-3}\right)\ \mathbf{s}$$

$$\alpha := \omega_1 \cdot \left(2 \cdot \zeta_1 - \omega_1 \cdot \beta\right) \qquad \alpha = \left(8.064465 \cdot 10^{-1}\right) \frac{1}{\mathbf{s}}$$

Metoda Newmarka. *Chwile* ***t, (t+Δt)*** *oznaczane są indeksami górnymi*
Przyjęto następujące aproksymacje prędkości i przemieszczenia:

$$\frac{d}{dt} y^{t+\Delta t} = \frac{d}{dt} y^{t} + \left[(1-\gamma) \frac{d^2}{dt^2} y^{t} + \gamma \cdot \frac{d^2}{dt^2} y^{t+\Delta t} \right] \cdot \Delta t$$

$$y^{t+\Delta t} = y^{t} + \frac{d}{dt} y^{t} \cdot \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \delta \right) \frac{d^2}{dt^2} y^{t} + \delta \cdot \frac{d^2}{dt^2} y^{t+\Delta t} \right] \cdot (\Delta t)^2$$

Najczęściej przyjmuje się stałe δ=1/4 i γ=1/2 (trapezoid rule) co daje bezwarunkową stabilność algotytmu bez względu na długość kroku całkowania Δt

Po podstawieniu tych aproksymacji do do równania równowagi dynamicznej otrzymamy:

$$\left[M_{@} + \frac{\Delta t}{2} \cdot C_{@} + \frac{(\Delta t)^2}{4} \cdot K_{@} \right] \cdot (y'')^{t+\Delta t} = \left[M_{@} - \frac{\Delta t}{2} \cdot C_{@} - \frac{(\Delta t)^2}{4} \cdot K_{@} \right] \cdot (y'')^{t} - \Delta t \cdot K_{@} \cdot (y')^{t} + p^{t+\Delta t} - p^{t}$$

$$(y')^{t+\Delta t} = (y')^{t} + \frac{\Delta t}{2} \left[(y'')^{t+\Delta t} + (y'')^{t} \right] \qquad y^{t+\Delta t} = y^{t} + \Delta t \cdot (y')^{t} + \frac{(\Delta t)^2}{4} \left[(y'')^{t+\Delta t} + (y'')^{t} \right]$$

Te równania można względem czasu scałkować metodą "explicit":

$$\frac{(\Delta t)^2}{4} \left[\theta_t \cdot M + \beta_t \cdot C + K \right] \cdot (y'')^{t+\Delta t} = \frac{(\Delta t)^2}{4} \left[\theta_t \cdot M - \beta_t \cdot C - K \right] \cdot (y'')^{t} - \Delta t \cdot K \cdot (y')^{t} + f^{t+\Delta t} - f^{t}$$

$$M1 = \left[\theta_t \cdot M + \beta_t \cdot C + K \right]^{-1} \qquad \overline{M} = M1 \cdot \left[\theta_t \cdot M - \beta_t \cdot C - K \right] \qquad \frac{4\ \theta}{(\Delta t)^2} = \theta_t \qquad \frac{2\ \beta}{\Delta t} = \beta_t$$

$$(y'')^{t+\Delta t} = \overline{M} \cdot (y'')^{t} - \overline{K} \cdot (y')^{t} + \overline{M1} \left(f^{t+\Delta t} - f^{t} \right) \qquad \overline{K} = M1 \cdot K \cdot \frac{4}{\Delta t} \qquad \overline{M1} = \frac{4}{(\Delta t)^2} \cdot M1$$

Implementacja:

$$\Delta t := 0.001\ s \qquad a_M := (4 + 2\ \alpha \cdot \Delta t) \cdot \frac{\theta}{(\Delta t)^2} = 2.930869 \cdot 10$$

$$a_K := 1 + \frac{2\ \beta}{\Delta t} = 6.273064 \qquad a_C := (4 - 2\ \alpha \cdot \Delta t) \cdot \frac{\theta}{(\Delta t)^2} = 2.928506 \cdot 10$$

$$M1 := \left(a_M \cdot M + a_K \cdot K \right)^{-1} \qquad M := M1 \cdot \left(a_C \cdot M - a_K \cdot K \right)$$

$$K := \frac{4\ s}{\Delta t} \cdot M1 \cdot K \qquad M1 := \frac{4\ s^2}{(\Delta t)^2} \cdot M1$$

$$Explicit\_Newmark(A,v,a,N,\Delta) := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..N \\ \quad \left\| \begin{array}{l} k \leftarrow \text{cols}(A) \\ t \leftarrow (k-1)\cdot\Delta \\ a1 \leftarrow M1\cdot(f(t+\Delta)-f(t))+M\cdot a-K\cdot v \\ y \leftarrow A^{\langle k \rangle} + \dfrac{\Delta}{s}\cdot v + \dfrac{\Delta^2}{4\cdot s^2}\cdot(a1+a) \\ v \leftarrow v + \dfrac{\Delta}{2\ s}\cdot(a1+a) \\ a \leftarrow a1 \\ A \leftarrow \text{augment}(A,y) \end{array} \right. \\ A \end{array} \right.$$

$$(y'')^{t+\Delta t} = \overline{M}\cdot(y'')^t - \overline{K}\cdot(y')^t + \overline{M1}\ (f^{t+\Delta t} - f^t)$$

$$(y')^{t+\Delta t} = (y')^t + \frac{\Delta t}{2}\left[(y'')^{t+\Delta t} + (y'')^t\right]$$

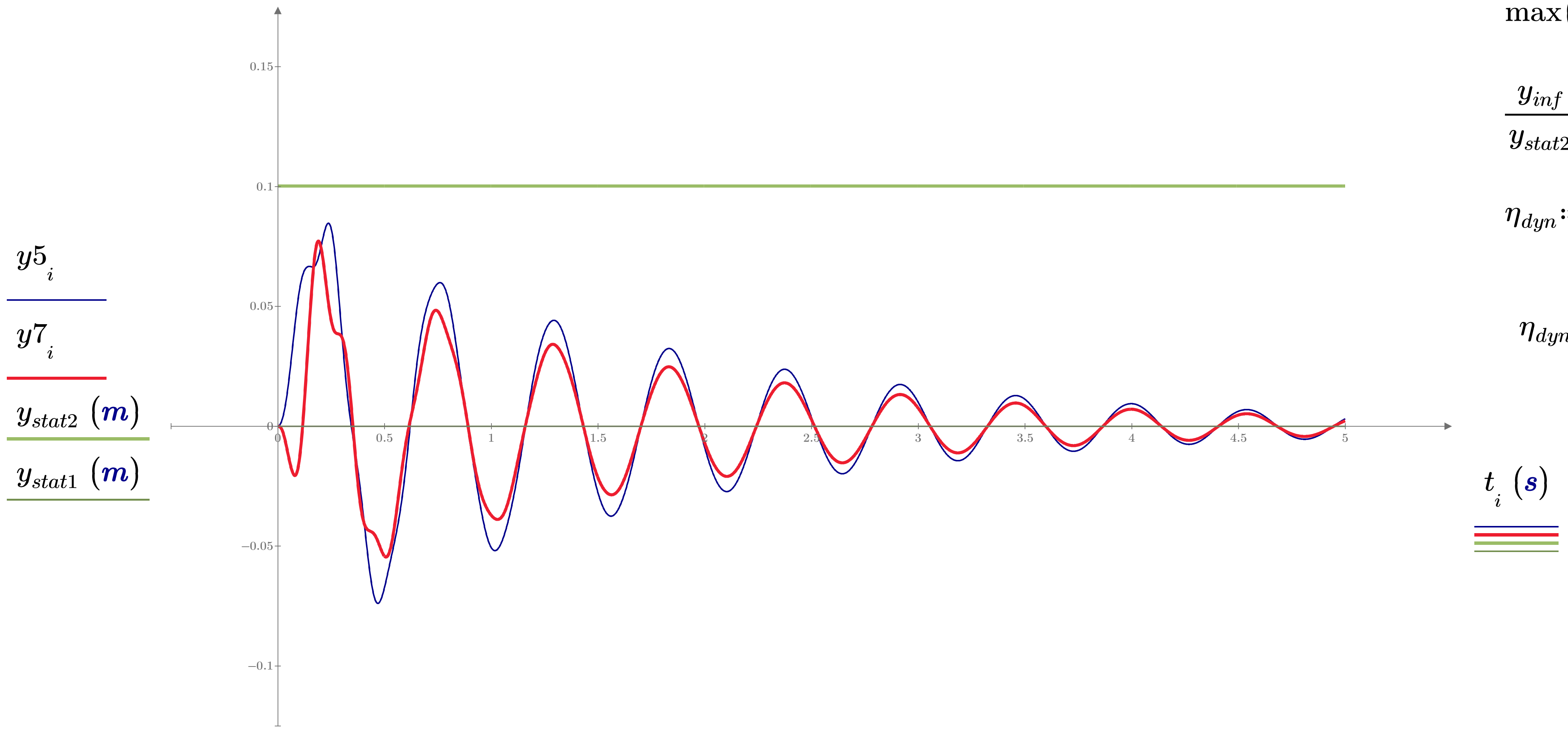
$$y^{t+\Delta t} = y^t + \Delta t\cdot(y')^t + \frac{(\Delta t)^2}{4}\left[(y'')^{t+\Delta t} + (y'')^t\right]$$

$y_{stat2} := u_{max} = 0.100195\ m$ $\quad y_{stat1} := 0$

$Nst := 5000$ <---- *liczba kroków czasowych*

$Y_{Lr,1} := 0 \quad v_{Lr} := 0 \quad a_{Lr} := 0$ <---- *inicjacja macierzy rozwiazania i warunków brzegowych* $\quad Y := Explicit\_Newmark(Y, v, a, Nst, \Delta t)$

$i := 1..Nst \quad t_i := (i-1)\cdot\Delta t \quad y5_i := Y_{n_1,i} \quad y7_i := Y_{n_2,i} \quad \Delta t = 0.001\ s$



$\max(y5) = 0.084695 \quad y_{inf} := y7_{Nst} = 0.002288$

$$\frac{y_{inf}}{y_{stat2}} = 0.022835\ \frac{1}{m}$$

$$\eta_{dyn} := \frac{\max(y7)}{y_{stat2}} = 0.770922\ \frac{1}{m}$$

$\eta_{dyn2} := 1.715522$

$\Delta t = 0.001\ s$

$\max(y5) = 0.084695$

$-min(y5) = 0.073865$

$$\Delta := \begin{bmatrix} 0.16 \\ 0.15 \\ 0.14 \\ 0.13 \\ 0.12 \\ 0.11 \\ 0.1 \\ 0.09 \\ 0.08 \\ 0.07 \\ 0.06 \\ 0.05 \\ 0.04 \\ 0.03 \\ 0.02 \\ 0.01 \\ 0.005 \\ 0.004 \\ 0.003 \\ 0.002 \\ 0.001 \end{bmatrix} \qquad u_{max} := \begin{bmatrix} 0.00832 \\ 0.036373 \\ 0.079958 \\ 0.117232 \\ 0.145614 \\ 0.163175 \\ 0.16892 \\ 0.173406 \\ 0.17611 \\ 0.201789 \\ 0.218103 \\ 0.220966 \\ 0.231516 \\ 0.241859 \\ 0.245717 \\ 0.250461 \\ 0.25116 \\ 0.25129 \\ 0.251342 \\ 0.251415 \\ 0.251441 \end{bmatrix}$$

$j := 1 .. \text{rows}(\Delta)$