Drgania własne belki swobodnie podpartej

$ORIGIN := 1$

$E := 10GPa$ $\quad b := 10cm$ $\quad h := 15cm$ $\quad L := 5m$ $\quad \rho := 600\dfrac{kg}{m^3}$ $\quad \lambda := 1m$

$A := b \cdot h$ $\quad J := \dfrac{A \cdot h^2}{12}$ $\quad \mu := \rho \cdot A$ $\quad c := \sqrt{\dfrac{E \cdot J}{\mu}}$

$A = 150 \cdot cm^2$ $\quad J = 2812.5 \cdot cm^4$ $\quad \mu = 9\dfrac{kg}{m}$ $\quad c = 176.777\dfrac{m^2}{s}$ $\quad EJ := E \cdot J = 281.25 \cdot kN \cdot m^2$

Warunki brzegowe: $\quad y(0) = 0 \quad y(L) = 0$

$M(0) = 0 \quad M(L) = 0 \quad M(x) = \dfrac{d^2}{dx^2}y(x)$

Równanie różniczkowe opisujące swobodne drgania pręta prostego

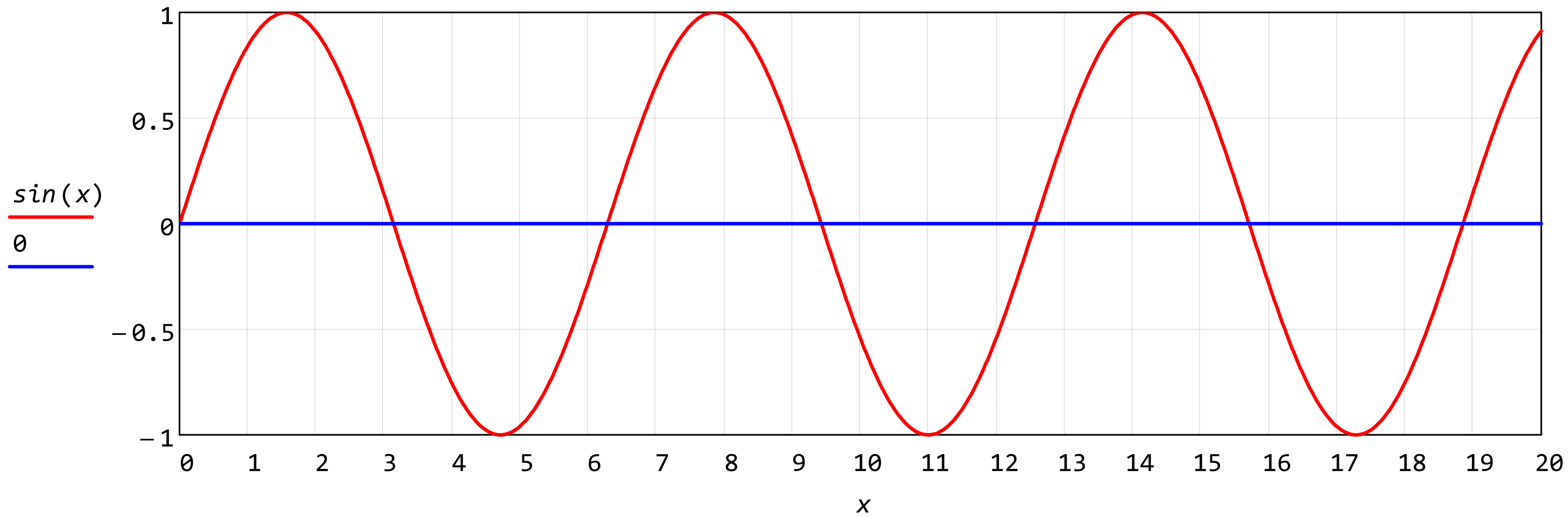
$$EJ \cdot \frac{d^4}{dx^4}w(x,t) + \mu \cdot \frac{d^2}{dt^2}w(x,t) = 0$$

Przyjmując rozwiązanie w postaci $\quad w(x,t) = y(x) \cdot sin(\omega \cdot t)$ $\quad$ *otrzymamy:*

$$\left(\frac{d^4}{dx^4}y(x) - \frac{\mu \cdot \omega^2}{EJ} \cdot y(x)\right) \cdot sin(\omega \cdot t) = 0 \quad \text{--------->} \quad \frac{d^4}{dx^4}y(x) - \frac{\beta^4}{L^4} \cdot y(x) = 0 \qquad \beta = L \cdot \sqrt{\frac{\omega}{c}}$$

Równanie przestępne, wynikające z warunków brzegowych, dające częstości drgań własnych

$$sin(\beta) = 0$$



$N := 6$

$i := 1 .. N$ $\beta_i := i \cdot \pi$ $\omega := \frac{c}{L^2} \cdot \beta^2$

$\beta =$

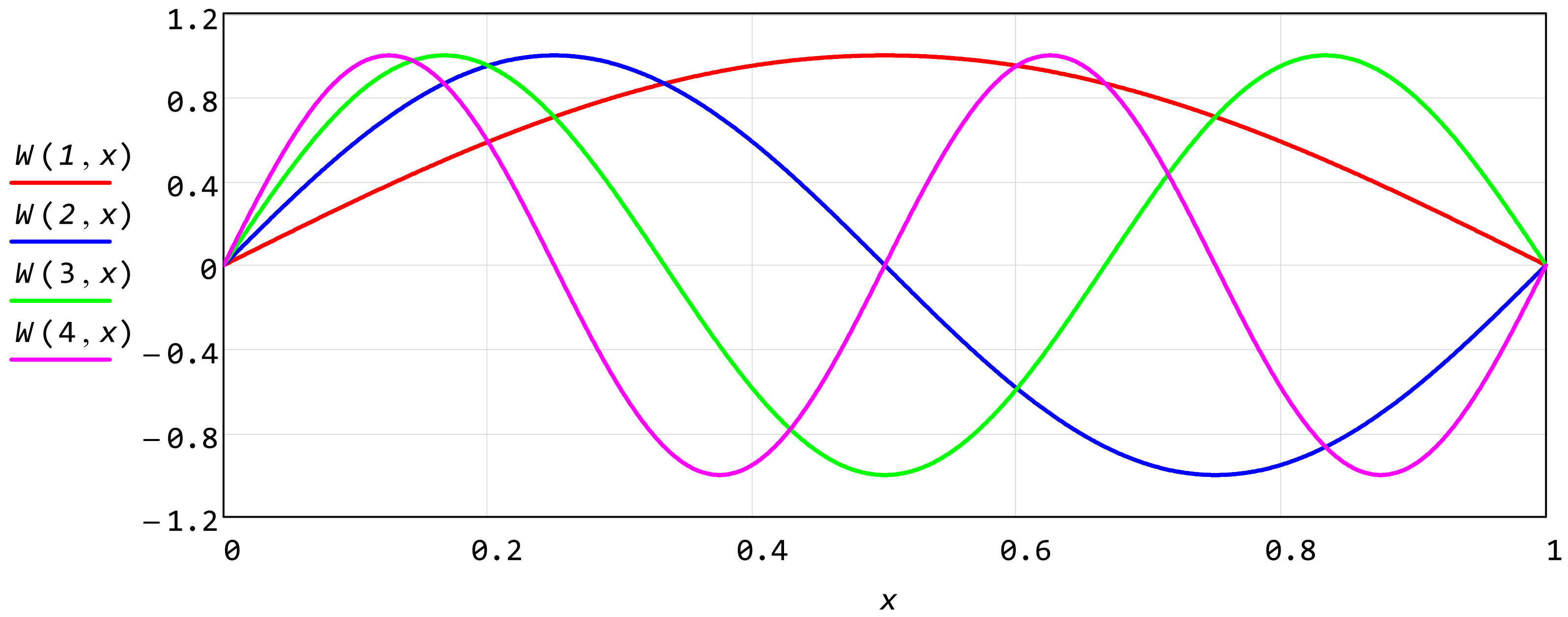
	1
1	3.141593
2	6.283185
3	9.424778
4	12.566371
5	15.707963
6	18.849556

$\omega =$ $\frac{1}{s}$

	1
1	69.788642
2	279.154568
3	628.097778
4	1116.618272
5	1744.71605
6	2512.391112

Postacie drgań własnych

$$W(n, x) := \sin(\beta_n \cdot x)$$



Ortogonalność postaci drgań

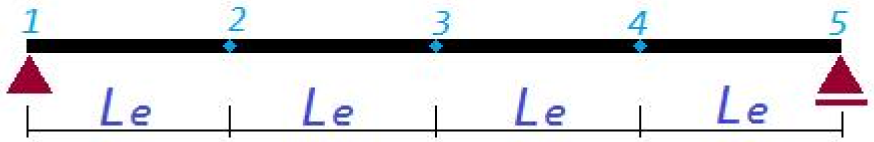
$i := 1 .. N \quad j := 1 .. N$

$$C_{i,j} := \int_0^1 W(i, x) \cdot W(j, x)\, dx$$

$C =$

	1	2	3	4	5	6
1	0.5	0	0	0	0	0
2	0	0.5	0	0	0	0
3	0	0	0.5	0	0	0
4	0	0	0	0.5	0	0
5	0	0	0	0	0.5	0
6	0	0	0	0	0	0.5

Drgania własne belki obliczone metodą elementów skończonych



$N := 20$ $\quad Le := \frac{L}{N}$ $\quad \kappa := \frac{EJ}{Le^2} = 4500 \cdot kN$ $\quad \lambda e := \frac{Le}{\lambda}$ $\quad Lss := 2$

$Lw := N + 1$ *- Liczba węzłów*

$Lr := Lss \cdot Lw$ *- Liczba równań*

$\alpha := \frac{\mu \cdot Le^4}{EJ} = 1.25 \times 10^{-7} s^2$

Funkcja LBM - Lokuj Blok Macierzy

```
LBM(A, B, w, k) := | for i ∈ 1 .. rows(B)
                   |   for j ∈ 1 .. cols(B)
                   |     A_{w+i-1, k+j-1} ← B_{i, j}
                   | A
```

Numery węzłów początkowych i końcowych elementów

$e := 1 .. N$ $\quad Wp_e := e$ $\quad Wk_e := e + 1$

$n_e := Lss \cdot Wp_e - 1$ $\quad k_e := Lss \cdot Wk_e - 1$ *<--- numery stopni swobody węzłów początkowych (n_e) i końcowych (k_e)*

$Ko_{Lr, Lr} := 0$ *<--- Zerowa macierz używana w procedurze agregacji macierzy*

Macierz sztywności elementów belki

$$K = \frac{EJ}{Le^2}\begin{pmatrix} \frac{12}{Le} & 6 & \frac{-12}{Le} & 6 \\ 6 & 4Le & -6 & 2Le \\ \frac{-12}{Le} & -6 & \frac{12}{Le} & -6 \\ 6 & 2Le & -6 & 4Le \end{pmatrix} \qquad K = \kappa\begin{pmatrix} Ka & Kb \\ Kb^T & Kc \end{pmatrix}$$

Bloki macierzy sztywności elementów

$$Ka := \begin{pmatrix} \frac{12}{\lambda e} & 6 \\ 6 & 4\cdot\lambda e \end{pmatrix} \qquad Kb := \begin{pmatrix} \frac{-12}{\lambda e} & 6 \\ -6 & 2\cdot\lambda e \end{pmatrix} \qquad Kc := \begin{pmatrix} \frac{12}{\lambda e} & -6 \\ -6 & 4\cdot\lambda e \end{pmatrix}$$

Agregacja globalnej macierzy sztywności

$$K := \sum_e \left(LBM\left(Ko, Ka, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, Kc, k_e, k_e\right) + LBM\left(Ko, Kb, n_e, k_e\right) + LBM\left(Ko, Kb^T, k_e, n_e\right)\right)$$

$K =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	48	6	-48	6	0	0	0	0	0	0	0	0
2	6	1	-6	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-48	-6	96	0	-48	6	0	0	0	0	0	0
4	6	0.5	0	2	-6	0.5	0	0	0	0	0	0
5	0	0	-48	-6	96	0	-48	6	0	0	0	0
6	0	0	6	0.5	0	2	-6	0.5	0	0	0	0
7	0	0	0	0	-48	-6	96	0	-48	6	0	0
8	0	0	0	0	6	0.5	0	2	-6	0.5	0	0
9	0	0	0	0	0	0	-48	-6	96	0	-48	6
10	0	0	0	0	0	0	6	0.5	0	2	-6	0.5
11	0	0	0	0	0	0	0	0	-48	-6	96	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0.5	0	...

Konsekwentna macierz bezwładności elementów belki

$$M = \frac{\mu \cdot Le^2}{420} \begin{pmatrix} \frac{156}{Le} & 22 & \frac{54}{Le} & -13 \\ 22 & 4Le & 13 & -3Le \\ \frac{54}{Le} & 13 & \frac{156}{Le} & -22 \\ -13 & -3Le & -22 & 4Le \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} Ma & Mb \\ Mb^T & Mc \end{pmatrix}$$

$$\eta := \frac{\mu \cdot Le^2}{420} = 0.133929 \cdot kg \cdot cm$$

$$\frac{\eta}{\kappa} = 2.97619 \times 10^{-10}\, s^2$$

$$Ma := \eta \cdot \begin{pmatrix} \frac{156}{\lambda e} & 22 \\ 22 & 4 \cdot \lambda e \end{pmatrix} \qquad Mb := \eta \cdot \begin{pmatrix} \frac{54}{\lambda e} & -13 \\ 13 & -3 \cdot \lambda e \end{pmatrix} \qquad Mc := \eta \cdot \begin{pmatrix} \frac{156}{\lambda e} & -22 \\ -22 & 4 \cdot \lambda e \end{pmatrix}$$

Agregacja konsekwentnej macierzy bezwładności

$$Mk := \sum_{e} \left(LBM\left(Ko, Ma, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, Mc, k_e, k_e\right) + LBM\left(Ko, Mb, n_e, k_e\right) + LBM\left(Ko, Mb^T, k_e, n_e\right) \right)$$

$Mk =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	83.6	2.9	28.9	-1.7	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2.9	0.1	1.7	-0.1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	28.9	1.7	167.1	0	28.9	-1.7	0	0	0	0	0	0
4	-1.7	-0.1	0	0.3	1.7	-0.1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	28.9	1.7	167.1	0	28.9	-1.7	0	0	0	0
6	0	0	-1.7	-0.1	0	0.3	1.7	-0.1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	28.9	1.7	167.1	0	28.9	-1.7	0	0
8	0	0	0	0	-1.7	-0.1	0	0.3	1.7	-0.1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	28.9	1.7	167.1	0	28.9	-1.7
10	0	0	0	0	0	0	-1.7	-0.1	0	0.3	1.7	-0.1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	28.9	1.7	167.1	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	-1.7	-0.1	0	...

$\cdot kg \cdot cm$

Diagonalna macierz bezwładności elementów belki

$$M = \frac{\mu \cdot Le^2}{24}\begin{pmatrix} \frac{12}{Le} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Le & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{Le} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Le \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} Ma & 0 \\ 0 & Ma \end{pmatrix} \qquad \eta := \frac{\mu \cdot Le^2}{24} \qquad Ma := \eta \cdot \begin{pmatrix} \frac{12}{\lambda e} & 0 \\ 0 & \lambda e \end{pmatrix}$$

Agregacja diagonalnej macierzy bezwładności

$$Md := \sum_e \left(LBM\left(Ko, Ma, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, Ma, k_e, k_e\right)\right)$$

$Md =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	112.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.6	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	225	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1.2	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	225	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1.2	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	225	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1.2	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	225	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...

$\cdot kg \cdot cm$

Diagonalna macierz bezwładności elementów belki gdzie pominieto bezwładnośc obrotową

$$M = \frac{\mu \cdot Le^2}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{Le} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{Le} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} Mb & 0 \\ 0 & Mb \end{pmatrix} \qquad \eta := \frac{\mu \cdot Le^2}{2} \qquad Mb := \eta \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda e} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Agregacja diagonalnej macierzy bezwładności z pominięciem bezwładności obrotowej

$$Mr := \sum_{e} \left(LBM\left(Ko, Mb, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, Mb, k_e, k_e\right)\right)$$

$Mr =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	112.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	225	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	225	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	225	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	225	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...

$\cdot kg \cdot cm$

$$M := \frac{Mk}{\kappa \cdot s^2}$$ *- bezwymiarowa macierz bezwładności*

Uwzględnienie warunków brzegowych

$i := 1 .. Lr$

$w := 1 \qquad K_{w,i} := 0 \qquad K_{w,w} := 1 \qquad M_{w,i} := 0 \qquad M_{w,w} := 1$

$w := Lr - 1 \qquad K_{w,i} := 0 \qquad K_{w,w} := 1 \qquad M_{w,i} := 0 \qquad M_{w,w} := 1$

Iteracyjna metoda rozwiązywania zagadnienia wartości własnych

$y_{Lr} := 0$ $\quad y_3 := 1m$ $\quad y_{Lr-3} := 1m$

$y1 := y$ $\quad y := \mathrm{lsolve}(K, M \cdot y1)$ $\quad \varepsilon := y - y1$ $\quad \varepsilon^T \cdot \varepsilon = 1.999995\, m^2$

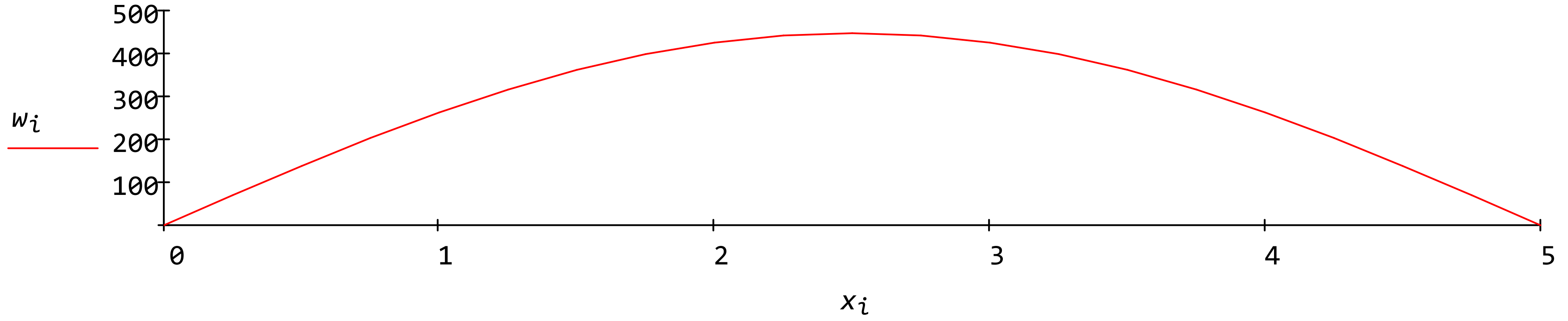
$y1 := y$ $\quad y := \mathrm{lsolve}(K, M \cdot y1)$ $\quad \varepsilon := y - y1$ $\quad \varepsilon^T \cdot \varepsilon = 5.982858 \times 10^{-10}\, m^2$

$y1 := y$ $\quad y := \mathrm{lsolve}(K, M \cdot y1)$ $\quad \varepsilon := y - y1$ $\quad \varepsilon^T \cdot \varepsilon = 0\, m^2$

Normalizacja wektora własnego

$d := \sqrt{y^T \cdot M \cdot y}$ $\quad Y := \frac{y}{d}$ $\quad d2 := Y^T \cdot M \cdot Y = 1$

$i := 1 .. Lw$ $\quad w_i := Y_{i \cdot Lss - 1}$ $\quad x_i := \lambda e \cdot (i - 1)$



$\omega 1 := \frac{\sqrt{Y^T \cdot K \cdot Y}}{1s}$ $\quad \omega 1 = 69.788671 \frac{1}{s}$ $\quad \omega_1 = 69.788642 \frac{1}{s}$ $\quad \delta := \frac{\omega 1}{\omega_1} - 1 = 4.206879 \times 10^{-7}$

$y_3 := 1m \qquad y_{Lr-3} := -1m$

$y1 := y \qquad y := lsolve(K, M \cdot y1) \qquad \varepsilon := y - y1 \qquad \varepsilon^T \cdot \varepsilon = 1.999999\, m^2$

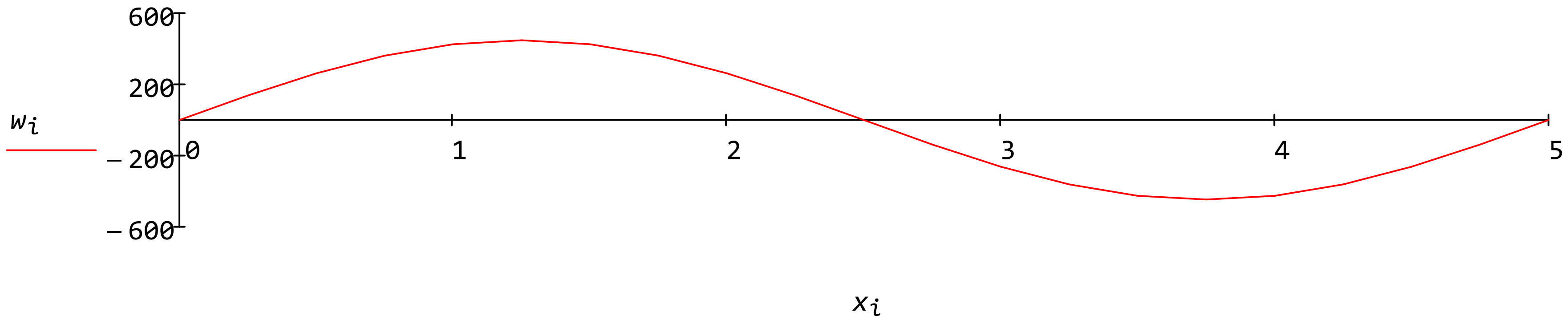
$y1 := y \qquad y := lsolve(K, M \cdot y1) \qquad \varepsilon := y - y1 \qquad \varepsilon^T \cdot \varepsilon = 1.868696 \times 10^{-11}\, m^2$

$y1 := y \qquad y := lsolve(K, M \cdot y1) \qquad \varepsilon := y - y1 \qquad \varepsilon^T \cdot \varepsilon = 0\, m^2$

Normalizacja wektora własnego

$d := \sqrt{y^T \cdot M \cdot y} \qquad Y := \frac{y}{d} \qquad d2 := Y^T \cdot M \cdot Y = 1$

$i := 1 .. Lw \qquad w_i := Y_{i \cdot Lss-1}$



$\omega 2 := \frac{\sqrt{Y^T \cdot K \cdot Y}}{1s} \qquad \omega 2 = 279.147418 \frac{1}{s} \qquad \omega_2 = 279.154568 \frac{1}{s} \qquad \delta := \frac{\omega 2}{\omega_2} - 1 = -2.561322 \times 10^{-5}$