Drgania własne belki swobodnie podpartej

$\mathrm{ORIGIN} := 1$

$E := 10\ GPa$ $\quad b := 10\ cm$ $\quad h := 10\ cm$ $\quad L := 10\ m$ $\quad \rho := 600\ \dfrac{kg}{m^3}$

$A := b \cdot h$ $\quad J := \dfrac{A \cdot h^2}{12}$ $\quad \mu := \rho \cdot A$ $\quad c := \sqrt{\dfrac{E \cdot J}{\mu}}$

$A = 100\ cm^2$ $\quad J = 833.333\ cm^4$ $\quad \mu = 6\ \dfrac{kg}{m}$ $\quad c = 117.851\ \dfrac{m^2}{s}$ $\quad EJ := E \cdot J = 83.333333\ kN \cdot m^2$

Warunki brzegowe: $\quad y(0) = 0 \quad y(L) = 0$

$M(0) = 0 \quad M(L) = 0$

$M(x) = \dfrac{d^2}{dx^2} y(x)$

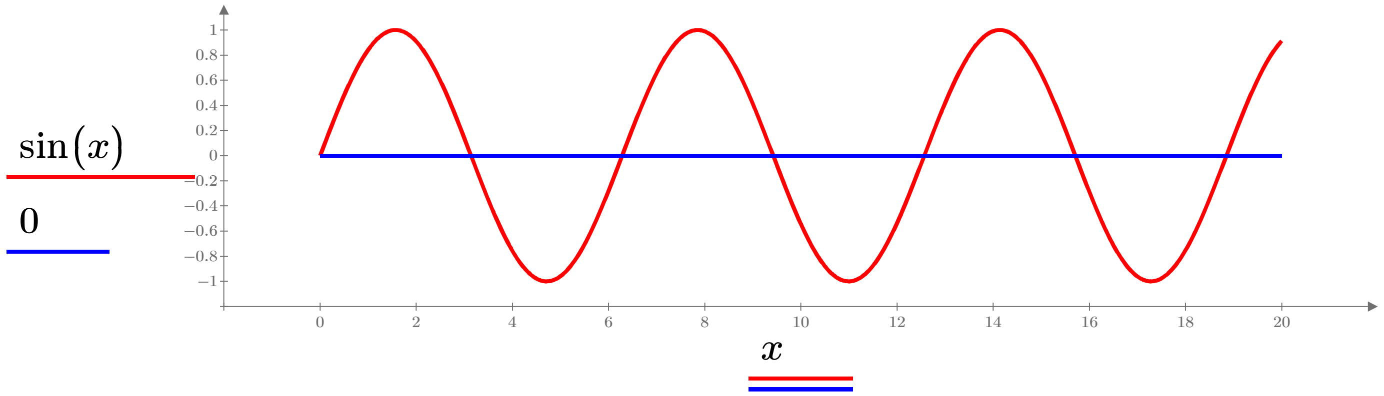
Równanie różniczkowe opisujące swobodne drgania (bez tłumienia) pręta prostego przy zastosowaniu modelu Bernoulliego (bez udziału sił poprzeczych i bezwładności obrotowej).

$$EJ \cdot \frac{d^4}{dx^4} w(x,t) + \mu \cdot \frac{d^2}{dt^2} w(x,t) = 0 \qquad (1)$$

Przyjmując rozwiązanie w postaci $\quad w(x,t) = y(x) \cdot sin(\omega \cdot t)$ $\quad$ *otrzymamy:*

$$\left[\frac{d^4}{dx^4} y(x) - \frac{\mu \cdot \omega^2}{EJ} \cdot y(x)\right] \cdot sin(\omega \cdot t) = 0 \quad \text{--------->} \quad \frac{d^4}{dx^4} y(x) - \frac{\varphi^4}{L^4} \cdot y(x) = 0 \qquad \varphi = L \cdot \sqrt{\frac{\omega}{c}}$$

Równanie przestępne, wynikające z warunków brzegowych, dające częstości drgań własnych: $sin(\varphi)=0$



$n:=8$

$i:=1..2\ n$ $\qquad \varphi_i:=i\cdot\pi$ $\qquad \omega_A:=\frac{c}{L^2}\cdot\varphi^2$

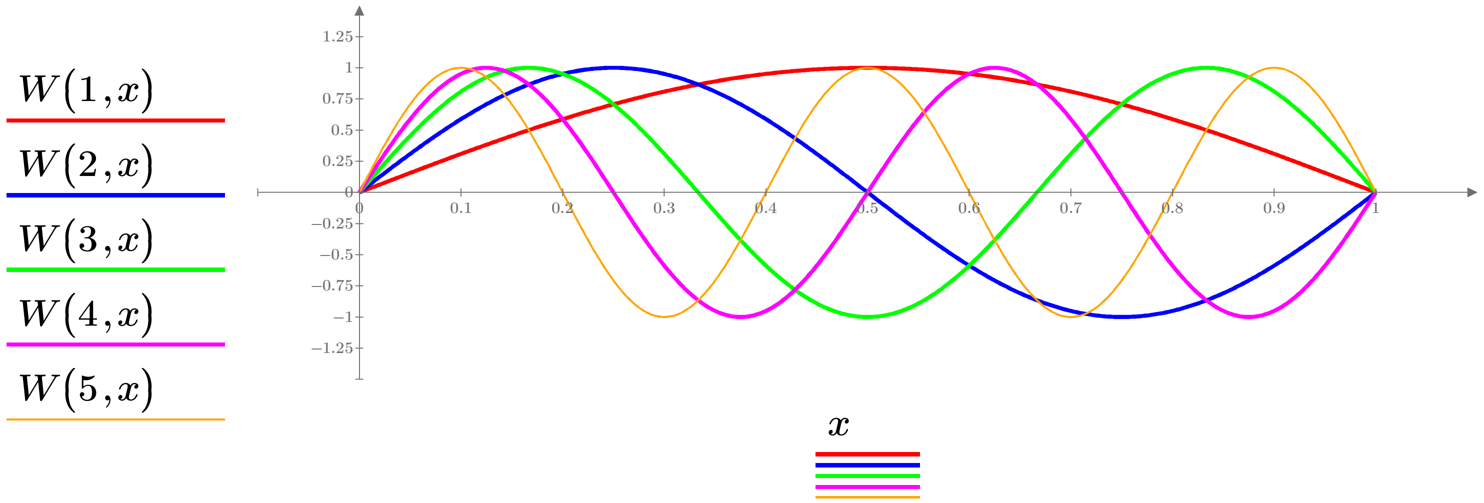
$$\varphi=\begin{array}{c|c} 0 & 3.141593 \\ 1 & 6.283185 \\ 2 & 9.424778 \\ 3 & 12.566371 \\ 4 & 15.707963 \\ 5 & 18.849556 \\ 6 & 21.991149 \\ 7 & 25.132741 \\ 8 & 28.274334 \\ 9 & 31.415927 \\ 10 & 34.557519 \\ 11 & 37.699112 \\ \vdots & \vdots \\ 15 & \end{array}$$

$$\omega_A=\begin{array}{c|c} 0 & 11.63144 \\ 1 & 46.525761 \\ 2 & 104.682963 \\ 3 & 186.103045 \\ 4 & 290.786008 \\ 5 & 418.731852 \\ \vdots & \vdots \\ 15 & \end{array}\ \frac{rad}{s}$$

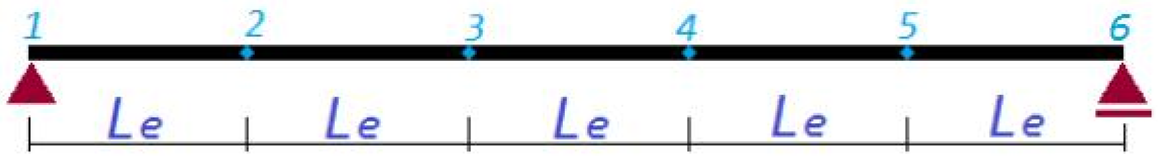
$$\frac{\omega_A}{2\cdot\pi}=\begin{array}{c|c} 0 & 1.851 \\ 1 & 7.405 \\ 2 & 16.661 \\ 3 & 29.619 \\ 4 & 46.28 \\ 5 & 66.643 \\ 6 & 90.709 \\ 7 & 118.477 \\ 8 & 149.947 \\ 9 & 185.12 \\ 10 & 223.995 \\ 11 & 266.573 \\ \vdots & \vdots \\ 15 & \end{array}\ \frac{1}{s}$$

Postacie drgań własnych

$W(n,x):=\sin\left(\varphi_n\cdot x\right)$



Drgania własne belki obliczone metodą elementów skończonych



$l := 1\ m$ <--- jednostka długości lub długość porównawcza

$Le := \dfrac{L}{n}$ $\quad \kappa := \dfrac{EJ}{Le^2} = 53.333333\ kN$ $\quad \lambda e := \dfrac{Le}{l} = 1.25$

$Ls := 2$ $\quad Lw := n + 1$ - Liczba węzłów $\quad Lr := Ls \cdot Lw$ - Liczba równań

$n_1 := 7$ $\quad n_2 := 13$

$\omega_0 := \dfrac{20}{s}$ $\quad p_{Lr} := 0$ $\quad p_{n_1} := 1$ $\quad p_{n_2} := -0.8$

Funkcja DBM - Dodaj Blok Macierzy

```
DBM(A,B,w,k) := ‖ for i ∈ 1..rows(B)
                ‖  ‖ for j ∈ 1..cols(B)
                ‖  ‖  ‖ A[w+i-1,k+j-1] ← B[i,j] + A[w+i-1,k+j-1]
                ‖ A
```

Agregacja macierzy globalnych belki

```
Agrg_B(N,Aa,Ab,Ac) := ‖ Lss ← 2
                      ‖ Lr ← Lss (N+1)
                      ‖ A[Lr,Lr] ← 0
                      ‖ for e ∈ 1..N
                      ‖  ‖ n ← e·Lss − 1
                      ‖  ‖ k ← n + 2
                      ‖  ‖ A ← DBM(A,Aa,n,n)
                      ‖  ‖ A ← DBM(A,Ac,k,k)
                      ‖  ‖ A ← DBM(A,Ab,n,k)
                      ‖  ‖ A ← DBM(A,Ab^T,k,n)
                      ‖ A
```

$$Ae = \begin{bmatrix} Aa & Ab \\ Ab^{T} & Ac \end{bmatrix}$$

```
P1(t) := ‖ S ← 0·kN
         ‖ if t < π/ω0
         ‖  ‖ S ← 1 kN·sin(ω0·t)
         ‖ S
```

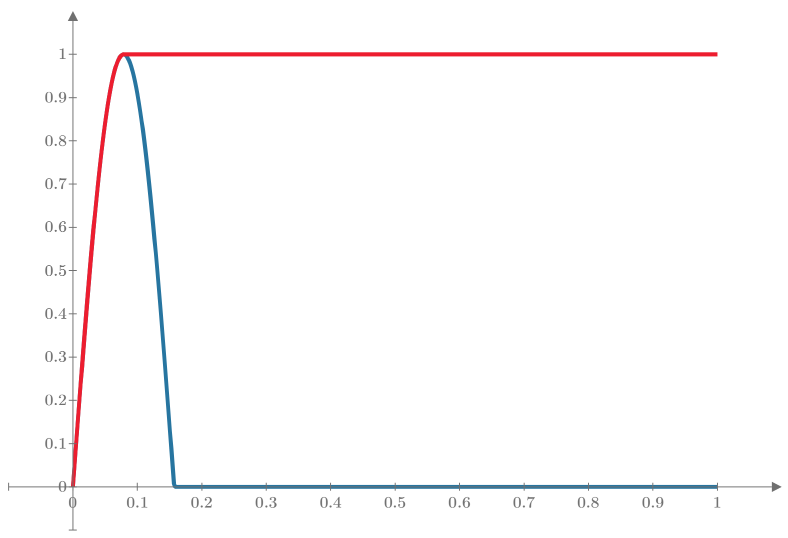
```
P2(t) := ‖ S ← 1·kN
         ‖ if t < π/(2 ω0)
         ‖  ‖ S ← 1 kN·sin(ω0·t)
         ‖ S
```

$p1(t) := p \cdot P1(t)$

$P1(0.2\ s) = 0\ kN$

$p2(t) := p \cdot P2(t)$

$P2(0.2\ s) = 1\ kN$



$P1(t \cdot 1\ s)\ (kN)$

$P2(t \cdot 1\ s)\ (kN)$

t

Macierz sztywności elementów belki

$$K=\frac{EJ}{Le^2}\cdot\begin{bmatrix}\frac{12}{Le} & 6 & \frac{-12}{Le} & 6\\ 6 & 4\cdot Le & -6 & 2\cdot Le\\ \frac{-12}{Le} & -6 & \frac{12}{Le} & -6\\ 6 & 2\cdot Le & -6 & 4\cdot Le\end{bmatrix}$$

$$K=\kappa\cdot\begin{bmatrix}Ka & Kb\\ Kb^{\mathrm{T}} & Kc\end{bmatrix}$$

$$\kappa=53.333333\ kN$$

Bloki bezwymiarowej macierzy sztywności elementu

$$Ka:=\begin{bmatrix}\frac{12}{\lambda e} & 6\\ 6 & 4\cdot\lambda e\end{bmatrix}\qquad Kb:=\begin{bmatrix}\frac{-12}{\lambda e} & 6\\ -6 & 2\cdot\lambda e\end{bmatrix}\qquad Kc:=\begin{bmatrix}\frac{12}{\lambda e} & -6\\ -6 & 4\cdot\lambda e\end{bmatrix}$$

Agregacja globalnej bezwymiarowej macierzy sztywności belki

$$K:=Agrg\_B(n,Ka,Kb,Kc)$$

$$K=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 6 & 5 & -6 & 2.5 & 0 & 0 & 0 & \\ -9.6 & -6 & 19.2 & 0 & -9.6 & 6 & 0 & \\ 6 & 2.5 & 0 & 10 & -6 & 2.5 & 0 & \\ 0 & 0 & -9.6 & -6 & 19.2 & 0 & -9.6 & \\ 0 & 0 & 6 & 2.5 & 0 & 10 & -6 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9.6 & -6 & 19.2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2.5 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -9.6 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & & & \ddots\end{bmatrix}$$

$$p_{F_{13}}:=-0.8\ kN$$

$$p_{F_{Lr}}:=0\ kN\qquad p_{F_7}:=1\ kN\qquad f_F:=\frac{p_F}{\kappa}$$

$$i:=1..Lr$$

$$w:=1\qquad K_{w,i}:=0\qquad K_{w,w}:=1$$

$$w:=Lr-1\qquad K_{w,i}:=0\qquad K_{w,w}:=1$$

$$y:=\mathrm{lsolve}(K,f_F)$$

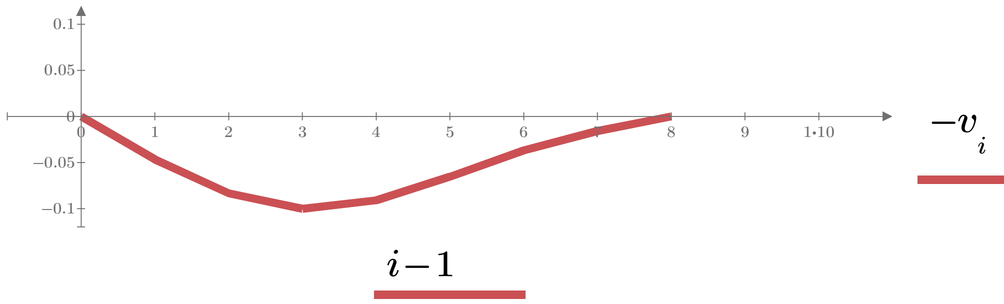
$$i:=1..\frac{Lr}{2}$$

$$v_i:=y_{2\cdot i-1}$$

$$v=\begin{bmatrix}0\\0.04668\\0.083398\\0.100195\\0.091016\\0.06543\\0.036914\\0.01582\\0\end{bmatrix}$$

$$y=\begin{bmatrix}0\\0.0386719\\0.0466797\\0.0346875\\0.0833984\\0.0227344\\0.1001953\\0.0028125\\0.0910156\\-0.0157031\\0.0654297\\-0.0234375\\0.0369141\\-0.0203906\\0.0158203\\-0.0140625\\0\\-0.0119531\end{bmatrix}\qquad p_F=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\-0.8\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}kN$$

Ugięcie statyczne belki $\quad u_{max}:=l\cdot\max(y)=10.019531\ cm$



Ugięcie statyczne belki obciążonej siłą **1***kN w środku rozpiętości* $\quad\frac{1\ kN\cdot L^3}{48\cdot EJ}=25\ cm$

Diagonalna macierz bezwładności elementów belki

$$M=\frac{\mu\cdot Le^2}{24}\cdot\begin{bmatrix}\frac{12}{Le} & 0 & 0 & 0\\ 0 & Le & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{12}{Le} & 0\\ 0 & 0 & 0 & Le\end{bmatrix}\qquad M=\eta\cdot\begin{bmatrix}Ma & 0\\ 0 & Ma\end{bmatrix}$$

$$\eta:=\frac{\mu\cdot Le^2}{24}=\left(3.90625\cdot10^{-1}\right)\ \mathbf{kg\cdot m}\qquad Ma:=\begin{bmatrix}\frac{12}{\lambda e} & 0\\ 0 & \lambda e\end{bmatrix}\qquad M0:=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\theta:=\frac{\eta}{\kappa}=\left(7.324219\cdot10^{-6}\right)\ \mathbf{s}^2$$

Aby zmniejszyć wpływ bezwładności obrotowej można przyjąć Ma ze współczynnikiem 0<a<1

$$a:=0.1\qquad Ma:=\begin{bmatrix}\frac{12}{\lambda e} & 0\\ 0 & a\cdot\lambda e\end{bmatrix}$$

Agregacja diagonalnej bezwymiarowej macierzy bezwładności

$$M:=Agrg\_B\left(n,Ma,M0,Ma\right)$$

$$M=\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccccccccccc}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots & 17\end{array}\\
\begin{array}{c}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\\10\\11\\12\\13\\ \vdots\\17\end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0.125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 19.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 19.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19.2 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19.2 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & & & & & & \ddots
\end{bmatrix}
\end{array}$$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$$i:=1\,..\,Lr$$

$$w:=1\qquad K_{w,i}:=0\qquad K_{i,w}:=0\qquad K_{w,w}:=1\qquad M_{w,i}:=0\qquad M_{w,w}:=1$$

$$w:=Lr-1\qquad K_{w,i}:=0\qquad K_{i,w}:=0\qquad K_{w,w}:=1\qquad M_{w,i}:=0\qquad M_{w,w}:=1$$

$$\kappa\cdot\left[K-\omega^2\ \theta\cdot M\right]\ y=0\qquad \left|M^{-1}\cdot K-\sigma\cdot I\right|=0\qquad \omega^2\cdot\theta=\sigma\qquad |M|=9.172943\cdot10^2$$

$$\sigma:=\text{eigenvals}\left(M^{-1}\cdot K\right)\qquad \omega:=\text{sort}\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\theta}}\right)$$

$$\omega^{\mathrm{T}}=\left[11.62\ \ 46.39\ \ 103.91\ \ 183.03\ \ 280.6\ \ 369.5\ \ 369.5\ \ 387.75\ \ 482.09\ \ 1652.47\ \ 1723.02\ \ 1900.84\ \ 2127.53\ \ 2358.89\ \ \ldots\right]\ \frac{\mathbf{rad}}{\mathbf{s}}$$

Równanie wymuszonych, tłumionych drgań belki

$$\psi_i = \frac{u_i}{l}$$

e
i ||===============|| j
<--------- Le ---------->

$$y_e = \begin{bmatrix} \psi_i \\ \varphi_i \\ \psi_j \\ \varphi_j \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \therefore \\ y_N \end{bmatrix}$$

$$K_@ \cdot u(t) + C_@ \cdot u'(t) + M_@ \cdot u''(t) = p(t) \qquad u' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u$$

$$C_@ = \alpha \cdot M_@ + \beta \cdot K_@$$ *<--- macierz tłumienia Rayleigha*

$$C_@ = \alpha \cdot \eta \cdot M + \beta \cdot \kappa \cdot K = \beta \cdot \kappa \cdot \left[K + \frac{\alpha \cdot \theta}{\beta} \cdot M\right]$$

$$\kappa \cdot K \cdot y(t) + \kappa \cdot \beta \cdot C \cdot y'(t) + \eta \cdot M \cdot y''(t) = p(t)$$

$$K \cdot y(t) + \beta \cdot C \cdot y'(t) + \theta \cdot M \cdot y''(t) = f(t)$$

$$\kappa = 53.3\ kN \qquad \eta = 0.391\ N \cdot s^2 \qquad \theta := \frac{\eta}{\kappa} = \left(7.324219 \cdot 10^{-6}\right)\ s^2$$

Macierze K, C, M, y, f - są bezwymiarowe

$$C = K + \frac{\alpha \cdot \theta}{\beta} \cdot M \qquad f(t) := \frac{1}{\kappa} \cdot p1(t)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \\ \frac{1}{\omega_2} & \omega_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}$$ *Współczynniki (a,b) macierzy tłumienia*

$$\omega_1 := \omega_{A_1} \qquad \omega_2 := \omega_{A_2} \qquad \zeta_1 := 0.05 \qquad \zeta_2 := 0.07$$

$$\beta := 2\,\frac{\omega_1 \cdot \zeta_1 - \omega_2 \cdot \zeta_2}{\omega_1^{\,2} - \omega_2^{\,2}} \qquad \beta = \left(2.636532 \cdot 10^{-3}\right)\ s$$

$$\alpha := \omega_1 \cdot \left(2 \cdot \zeta_1 - \omega_1 \cdot \beta\right) \qquad \alpha = \left(8.064465 \cdot 10^{-1}\right)\ \frac{1}{s}$$

Metoda Newmarka. *Chwile* $t, (t+\Delta t)$ *oznaczane są indeksami górnymi*
Przyjęto następujące aproksymacje prędkości i przemieszczenia:

$$\frac{d}{dt}y^{t+\Delta t} = \frac{d}{dt}y^t + \left[(1-\gamma)\frac{d^2}{dt^2}y^t + \gamma\cdot\frac{d^2}{dt^2}y^{t+\Delta t}\right]\cdot\Delta t$$

$$y^{t+\Delta t} = y^t + \frac{d}{dt}y^t\cdot\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2}-\delta\right)\frac{d^2}{dt^2}y^t + \delta\cdot\frac{d^2}{dt^2}y^{t+\Delta t}\right]\cdot(\Delta t)^2$$

Najczęściej przyjmuje się stałe $\delta=1/4$ *i* $\gamma=1/2$ *(trapezoid rule) co daje bezwarunkową stabilność algotytmu bez względu na długość kroku całkowania* Δt

Po podstawieniu tych aproksymacji do do równania równowagi dynamicznej otrzymamy:

$$\left[M_@ + \frac{\Delta t}{2}\cdot C_@ + \frac{(\Delta t)^2}{4}\cdot K_@\right]\cdot(y'')^{t+\Delta t} = \left[M_@ - \frac{\Delta t}{2}\cdot C_@ - \frac{(\Delta t)^2}{4}\cdot K_@\right]\cdot(y'')^t - \Delta t\cdot K_@\cdot(y')^t + p^{t+\Delta t} - p^t$$

$$(y')^{t+\Delta t} = (y')^t + \frac{\Delta t}{2}\left[(y'')^{t+\Delta t} + (y'')^t\right] \qquad y^{t+\Delta t} = y^t + \Delta t\cdot(y')^t + \frac{(\Delta t)^2}{4}\left[(y'')^{t+\Delta t} + (y'')^t\right]$$

Te równania można względem czasu scałkować metodą "explicit":

$$\frac{(\Delta t)^2}{4}\left[\theta_t\cdot M + \beta_t\cdot C + K\right]\cdot(y'')^{t+\Delta t} = \frac{(\Delta t)^2}{4}\left[\theta_t\cdot M - \beta_t\cdot C - K\right]\cdot(y'')^t - \Delta t\cdot K\cdot(y')^t + f^{t+\Delta t} - f^t$$

$$M1 = \left[\theta_t\cdot M + \beta_t\cdot C + K\right]^{-1} \qquad \overline{M} = M1\cdot\left[\theta_t\cdot M - \beta_t\cdot C - K\right] \qquad \frac{4\,\theta}{(\Delta t)^2} = \theta_t \qquad \frac{2\,\beta}{\Delta t} = \beta_t$$

$$(y'')^{t+\Delta t} = \overline{M}\cdot(y'')^t - \overline{K}\cdot(y')^t + \overline{M1}\left(f^{t+\Delta t} - f^t\right) \qquad \overline{K} = M1\cdot K\cdot\frac{4}{\Delta t} \qquad \overline{M1} = \frac{4}{(\Delta t)^2}\cdot M1$$

Implementacja:

$$\Delta t := 0.05\ s \qquad a_M := (4 + 2\ \alpha\cdot\Delta t)\cdot\frac{\theta}{(\Delta t)^2} = 1.195501\cdot 10^{-2}$$

$$a_K := 1 + \frac{2\ \beta}{\Delta t} = 1.105461 \qquad a_C := (4 - 2\ \alpha\cdot\Delta t)\cdot\frac{\theta}{(\Delta t)^2} = 1.148249\cdot 10^{-2}$$

$$M1 := \left(a_M\cdot M + a_K\cdot K\right)^{-1} \qquad M := M1\cdot\left(a_C\cdot M - a_K\cdot K\right)$$

$$K := \frac{4\ s}{\Delta t}\cdot M1\cdot K \qquad M1 := \frac{4\ s^2}{(\Delta t)^2}\cdot M1$$

$$Explicit\_Newmark(A,v,a,N,\Delta) := \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..N \\ \quad k \leftarrow \text{cols}(A) \\ \quad t \leftarrow (k-1)\cdot\Delta \\ \quad a1 \leftarrow M1\cdot(f(t+\Delta)-f(t))+M\cdot a-K\cdot v \\ \quad y \leftarrow A^{\langle k\rangle}+\dfrac{\Delta}{s}\cdot v+\dfrac{\Delta^2}{4\cdot s^2}\cdot(a1+a) \\ \quad v \leftarrow v+\dfrac{\Delta}{2\ s}\cdot(a1+a) \\ \quad a \leftarrow a1 \\ \quad A \leftarrow \text{augment}(A,y) \\ A \end{array}$$

$$(y'')^{t+\Delta t} = \overline{M}\cdot(y'')^t - \overline{K}\cdot(y')^t + \overline{M1}\ (f^{t+\Delta t}-f^t)$$

$$(y')^{t+\Delta t} = (y')^t + \frac{\Delta t}{2}\left[(y'')^{t+\Delta t}+(y'')^t\right]$$

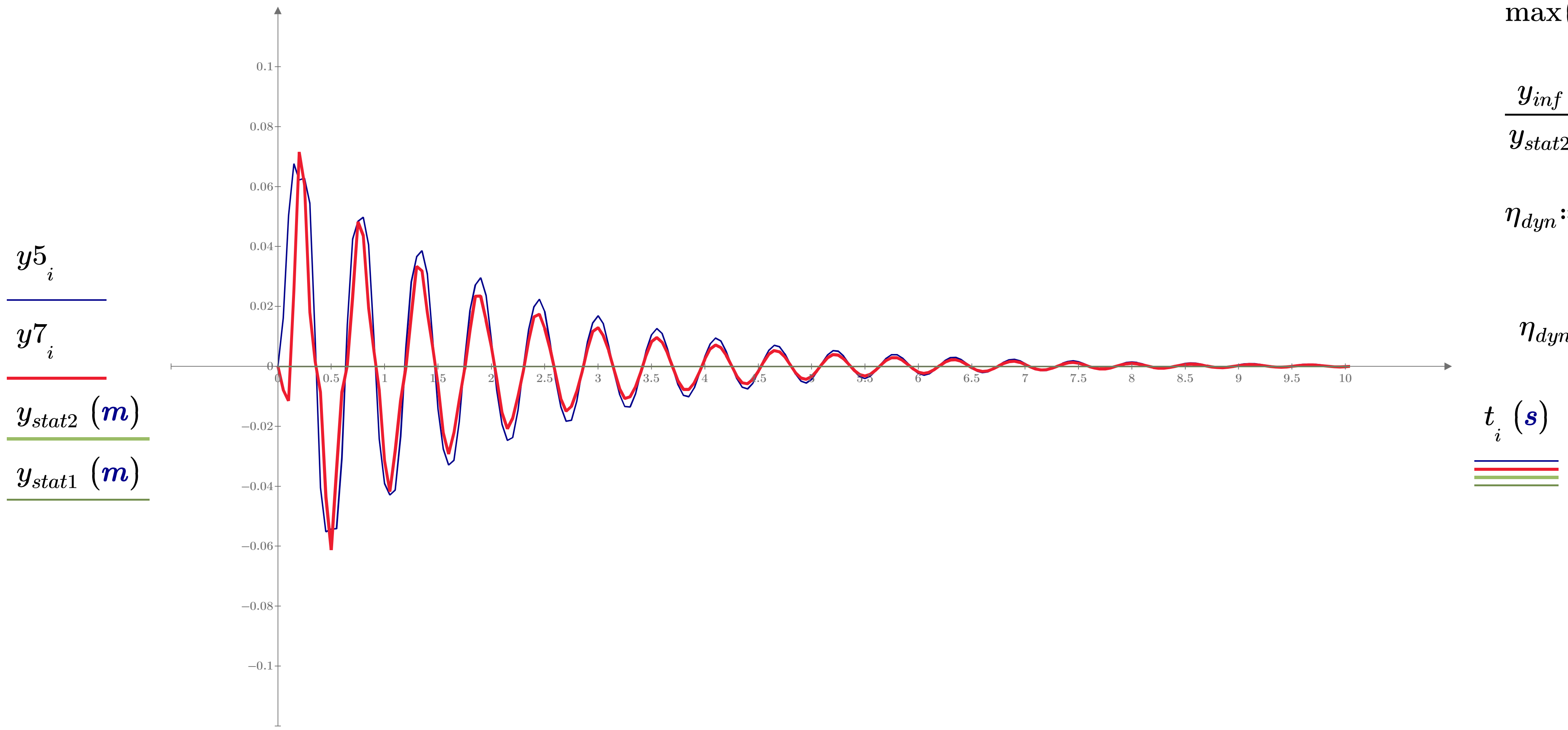
$$y^{t+\Delta t} = y^t + \Delta t\cdot(y')^t + \frac{(\Delta t)^2}{4}\left[(y'')^{t+\Delta t}+(y'')^t\right]$$

$y_{stat2} := u_{max} = 0.100195\ m$ $\quad y_{stat1} := 0$

$Nst := 250$ *<---- liczba kroków czasowych*

$Y_{Lr,1} := 0 \quad v_{Lr} := 0 \quad a_{Lr} := 0$ *<---- inicjacja macierzy rozwiazania i warunków brzegowych* $\quad Y := Explicit\_Newmark(Y,v,a,Nst,\Delta t)$

$i := 1..Nst \quad t_i := (i-1)\cdot\Delta t \qquad y5_i := Y_{n_1,i} \quad y7_i := Y_{n_2,i} \qquad \Delta t = 0.05\ s$



$\max(y5) = 0.067638$ $\qquad y_{inf} := y7_{Nst} = 0.000204$

$$\frac{y_{inf}}{y_{stat2}} = 0.002031\ \frac{1}{m}$$

$$\eta_{dyn} := \frac{\max(y7)}{y_{stat2}} = 0.714009\ \frac{1}{m}$$

$\eta_{dyn2} := 1.715522$