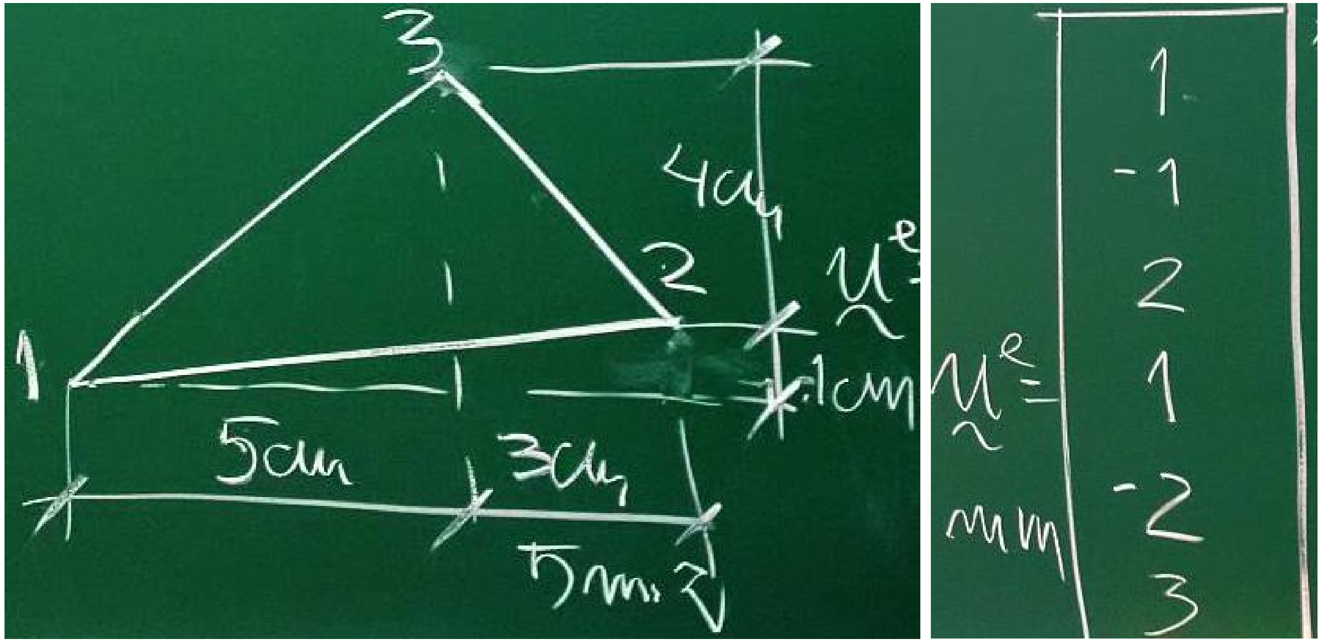
Grupa 2 — Podać składowe wektora odkształceń elementu CST z dokładnością do 5-ciu miejscznaczących



wektor współrzędnych elementu

$$xe = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \qquad xe := \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot cm$$

wektor przemieszczeń elementu

$$ue = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} \qquad ue := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot mm$$

Funkcje przemieszczeń elementu

$$u_x(x,y) = \sum_{i=1}^{3} N_i(x,y) \cdot u_{xi} \qquad u_y(x,y) = \sum_{i=1}^{3} N_i(x,y) \cdot u_{yi}$$

Wektor odkształceń elementu

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_x = \frac{d}{dx} u_x(x,y) \qquad \varepsilon_y = \frac{d}{dy} u_y(x,y) \qquad \gamma_{xy} = \frac{d}{dy} u_x(x,y) + \frac{d}{dx} u_y(x,y)$$

$N_i(x,y) = a_i + b_i x + c_i y$ - *funkcja kształtu węzła "i" (i=1,2,3)*

$dNx_i(x,y) = \frac{d}{dx} N_i(x,y) = b_i$ - *pochodna funkcji kształtu węzła "i" względem "x"*

$dNy_i(x,y) = \frac{d}{dy} N_i(x,y) = c_i$ - *pochodna funkcji kształtu węzła "i" względem "y"*

Składowe wektora odkształcenia można obliczyć teraz za pomoca sumowania:

$$\varepsilon_x = \sum_{i=1}^{3} b_i u_{xi} \qquad \varepsilon_y = \sum_{i=1}^{3} c_i u_{yi} \qquad \gamma_{xy} = \sum_{i=1}^{3} \left(c_i u_{xi} + b_i u_{yi}\right)$$

Wyznaczanie współczynników funkcji kształtu dzięki warunkom zgodności przemieszczeń w węzłach uzyskamy przez rozwiązanie 3 układów równań liniowych:

$Me \cdot \alpha_i = \delta_i$ *(*) - gdzie oznaczono:*

$$Me = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$ - *macierz współrzędnych elementu*

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}$$ - *współczynniki funkcji kształtu węzła "i"*

$$\delta_i = \begin{bmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \delta_{3i} \end{bmatrix}$$ - *wektor prawych stron, zawiera "delty Kroneckera" ---->* $\delta_{ii} = 1$

$\delta_{ij} = 0$ *gdy* $i \neq j$

$$\delta_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \delta_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \delta_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Po rozwązaniu tych układów równań otrzymamy:

$$A2 \cdot \alpha_1 = \begin{bmatrix} 0.15 \; m \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix} \; cm \qquad A2 \cdot \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0.25 \; m \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} \; cm \qquad A2 \cdot \alpha_3 = \begin{bmatrix} -0.05 \; m \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} \; cm$$

gdzie przez A2 oznaczono podwojone pole powierzchni elementu: $A2 = |Me| \qquad A2 = 35 \; cm^2$

Metoda "kalkulatorowa" -->

$$\varepsilon_x = \sum_{i=1}^{3} b_i u_{xi} \quad \varepsilon_y = \sum_{i=1}^{3} c_i u_{yi} \quad \gamma_{xy} = \sum_{i=1}^{3} \left(c_i u_{xi} + b_i u_{yi}\right) \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 2.2857 \cdot 10^{-2} \\ 6.2857 \cdot 10^{-2} \\ -6.5714 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}, \qquad lub: \quad 10 \cdot A2 \cdot \varepsilon = \begin{bmatrix} 8 \\ 22 \\ -23 \end{bmatrix} \; cm^2$$

Liniowy uklad równań (*) można łatwo rozwiązać wyznaczając tylko współczynniki b_i oraz c_i, a_i nie są potrzebne do wyznaczenia odkształceń. Można to zrobić np. metodą Cramera lub eliminacji Gaussa. Dla przykładu pierwszy układ równań (i=1) można przekształcić do postaci:

$$\left.\begin{matrix} b_1\left(x_1 - x_2\right) + c_1\left(y_1 - y_2\right) = 1 \\ b_1\left(x_2 - x_3\right) + c_1\left(y_2 - y_3\right) = 0 \end{matrix}\right\} \; i \;\; rozwiązać \text{ ----> } \quad b_1 = -c_1 \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} \qquad c_1\left(y_1 - y_2 - \frac{\left(x_1 - x_2\right)\left(y_2 - y_3\right)}{x_2 - x_3}\right) = 1$$

$$c_1 = \frac{x_2 - x_3}{\left(x_2 - x_3\right)\left(y_1 - y_2\right) - \left(x_1 - x_2\right)\left(y_2 - y_3\right)} \qquad c_1 = \frac{x_3 - x_2}{A2} \qquad b_1 = \frac{y_2 - y_3}{A2}$$

Metoda "komputerowa" --> $\varepsilon = B \cdot ue$ <-- wektor odkształceń elementu CST

Macierz geometryczna elementu

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix}$$

$$100 \cdot A2 \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 5 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -5 & 0 & 8 \\ -3 & -4 & -5 & 5 & 8 & -1 \end{bmatrix} m \qquad 100 \cdot A2 = 3500 \ cm^2$$

B_i *- macierz geometryczna węzła "i"*

$$B_i = \begin{bmatrix} dNx_i & 0 \\ 0 & dNy_i \\ dNy_i & dNx_i \end{bmatrix} \qquad B_i = \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & c_1 \\ c_1 & b_1 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & c_2 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} \qquad B_3 = \begin{bmatrix} b_3 & 0 \\ 0 & c_3 \\ c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$