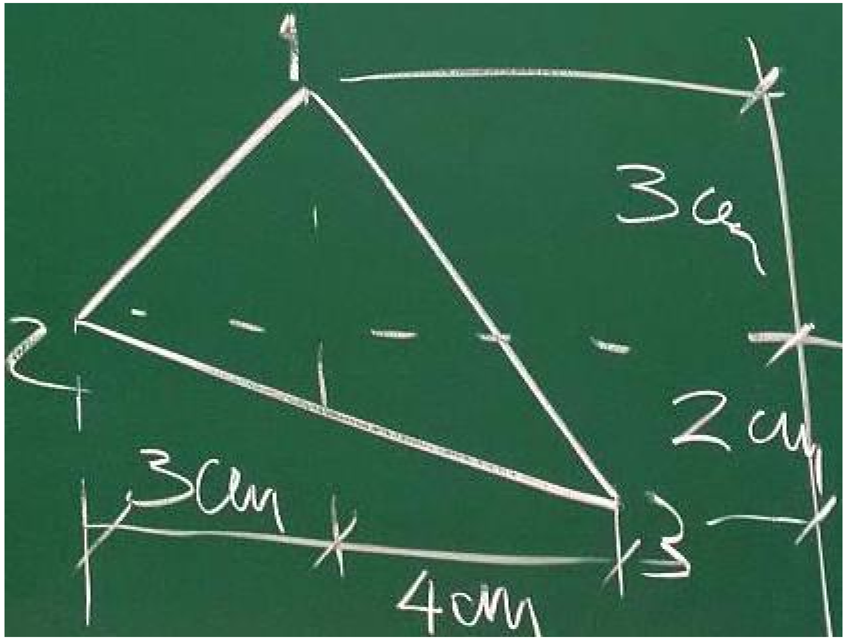
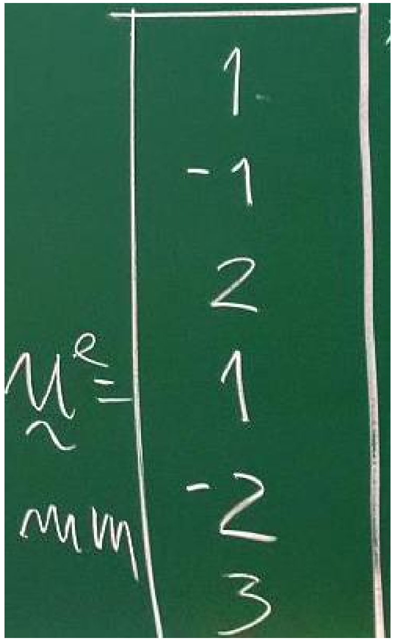
Grupa 1 — *Podać składowe wektora odkształceń elementu CST z dokładnością do 5-ciu miejscznaczących*





wektor współrzędnych elementu

$$xe = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \qquad xe := \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot cm$$

wektor przemieszczeń elementu

$$ue = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} \qquad ue := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot mm$$

Funkcje przemieszczeń elementu

$$u_x(x,y) = \sum_{i=1}^{3} N_i(x,y) \cdot u_{xi} \qquad u_y(x,y) = \sum_{i=1}^{3} N_i(x,y) \cdot u_{yi}$$

Wektor odkształceń elementu

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_x = \frac{d}{dx} u_x(x,y) \qquad \varepsilon_y = \frac{d}{dy} u_y(x,y) \qquad \gamma_{xy} = \frac{d}{dy} u_x(x,y) + \frac{d}{dx} u_y(x,y)$$

$N_i(x,y) = a_i + b_i x + c_i y$ - funkcja kształtu węzła"i" (i=1,2,3)

$dNx_i(x,y) = \frac{d}{dx} N_i(x,y) = b_i$ - pochodna funkcji kształtu węzła "i"względem "x"

$dNy_i(x,y) = \frac{d}{dy} N_i(x,y) = c_i$ - pochodna funkcji kształtu węzła "i" względem "y"

Składowe wektora odkształcenia można obliczyć teraz za pomoca sumowania:

$$\varepsilon_x = \sum_{i=1}^{3} b_i u_{xi} \qquad \varepsilon_y = \sum_{i=1}^{3} c_i u_{yi} \qquad \gamma_{xy} = \sum_{i=1}^{3} \left(c_i u_{xi} + b_i u_{yi}\right)$$

Wyznaczanie współczynników funkcji kształtu przez rozwiązanie 3 układów równań liniowych:

$Me \cdot \alpha_i = \delta_i$ (*) - gdzie oznaczono:

$Me = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$ - macierz współrzędnych elementu $\qquad \alpha_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}$ - współczynniki funkcji kształtu węzła "i"

$$\delta_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \delta_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \delta_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Po rozwązaniu tych układów równań otrzymamy:

$$A2 \cdot \alpha_1 = \begin{bmatrix} 0.06\ m \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} cm \qquad A2 \cdot \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0.12\ m \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix} cm \qquad A2 \cdot \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0.09\ m \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} cm$$

gdzie przez A2 oznaczono podwojone pole powierzchni elementu: $A2 = 27\ cm^2$

Metoda "kalkulatorowa" --> $\varepsilon_x = \sum_{i=1}^{3} b_i u_{xi} \quad \varepsilon_y = \sum_{i=1}^{3} c_i u_{yi} \quad \gamma_{xy} = \sum_{i=1}^{3} \left(c_i u_{xi} + b_i u_{yi}\right) \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -5.1852 \cdot 10^{-2} \\ -7.4074 \cdot 10^{-2} \\ 2.5926 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} , \qquad lub: \quad 10 \cdot A2 \cdot \varepsilon = \begin{bmatrix} -14 \\ -20 \\ 7 \end{bmatrix} cm^2$$

Liniowy uklad równań (*) można łatwo rozwiązać wyznaczając tylko współczynniki b_i oraz c_i bo a_i nie są potrzebne do wyznaczenia odkształceń.
Dla przykładu pierwszy układ równań (i=1) można przekształcić do postaci:

$$\left.\begin{aligned} b_1\left(x_1 - x_2\right) + c_1\left(y_1 - y_2\right) &= 1 \\ b_1\left(x_2 - x_3\right) + c_1\left(y_2 - y_3\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ i rozwiązać ---->} \quad b_1 = -c_1 \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} \qquad c_1\left(y_1 - y_2 - \frac{\left(x_1 - x_2\right)\left(y_2 - y_3\right)}{x_2 - x_3}\right) = 1$$

Metoda "komputerowa" --> $\varepsilon = B \cdot ue$ <-- wektor odkształceń elementu CST

Macierz geometryczna elementu

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{bmatrix}$$

$$100 \cdot A2 \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -4 & 0 & -3 \\ 7 & 2 & -4 & -5 & -3 & 3 \end{bmatrix} \; m \qquad 100 \cdot A2 = 2700 \; cm^2$$

B_i - macierz geometryczna węzła "i"

$$B_i = \begin{bmatrix} dNx_i & 0 \\ 0 & dNy_i \\ dNy_i & dNx_i \end{bmatrix} \quad B_i = \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \quad B_1 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & c_1 \\ c_1 & b_1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & c_2 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} b_3 & 0 \\ 0 & c_3 \\ c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$