

## Macierz elementu bez przegubów



$$[u_x \cdot u_y \cdot \varphi_z]$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} & 0 & -\frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} & 0 & -\frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 EJ}{L^3} & -\frac{6 EJ}{L^2} & 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & -\frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} & 0 & -\frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$$

Macierz elementu z przegubem w węźle początkowym



$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & 0 & 0 & \frac{-3 EJ}{L^3} & \frac{3 EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3 EJ}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & \frac{-3 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^2} & 0 & 0 & \frac{-3 EJ}{L^2} & \frac{3 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

Macierz elementu z przegubem w węźle końcowym



$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & \frac{3 EJ}{L^2} & 0 & \frac{-3 EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^2} & \frac{3 EJ}{L} & 0 & \frac{-3 EJ}{L^2} & 0 \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3 EJ}{L^3} & \frac{-3 EJ}{L^2} & 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć składowe macierzy sztywności elementów ramy płaskiej.  
 Podać postacie bloków A, B i C macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych z dokładnością do 5-ciu miejsc znaczących

$$E := 13 \text{ GPa} \quad b := 9 \text{ cm} \quad h := 17 \text{ cm}$$

$$J := \frac{b \cdot h^3}{12} = 3684.750 \text{ cm}^4 \quad A := b \cdot h = 153.000 \text{ cm}^2 \quad EJ := E \cdot J \quad EA := E \cdot A$$

$$EJ = 479.018 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \quad EA = 198900.000 \text{ kN}$$

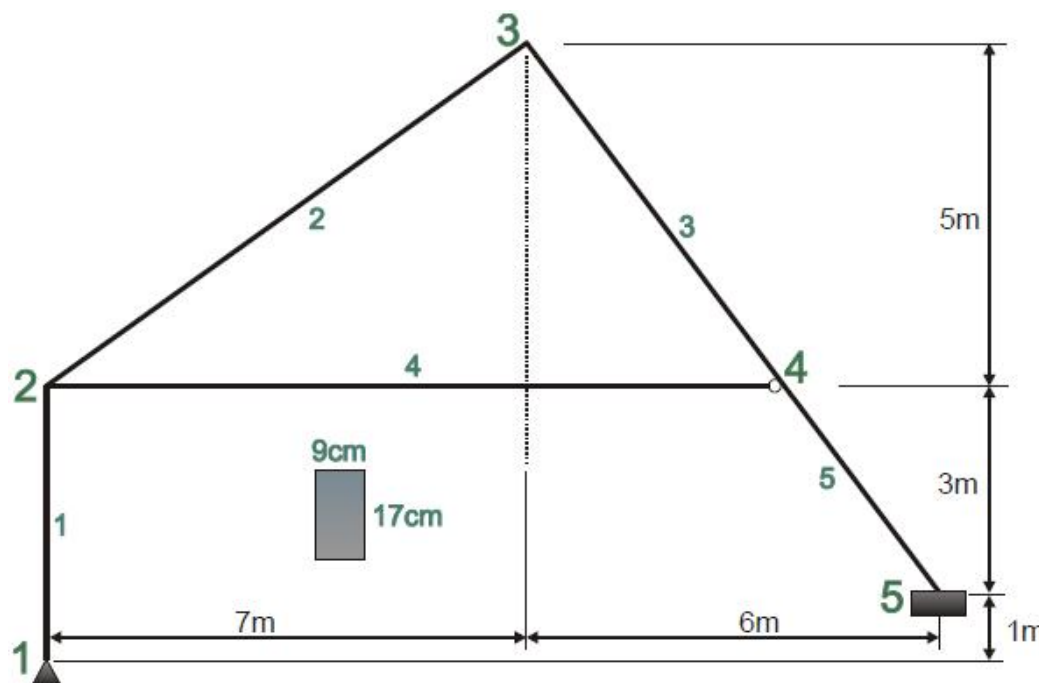
Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$$

Warunki brzegowe (podporowe)

$$u_{X1} = 0 \quad u_{Y1} = 0$$

$$u_{X5} = 0 \quad u_{Y5} = 0 \quad \varphi_5 = 0$$



## Element "2" - Bloki macierzy elementu bez przegubów

$$Lx := 7 \text{ m}$$

$$Ly := 5 \text{ m}$$

$$L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 8.602325 \text{ m}$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

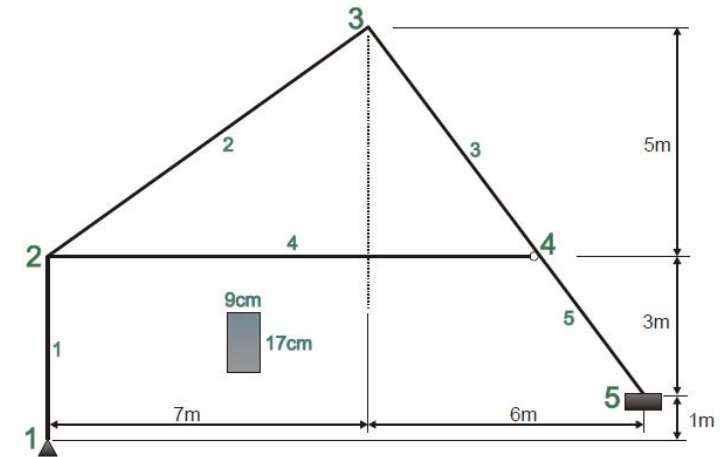
$$A = \begin{bmatrix} 23122 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 9.0299 \frac{1}{m} & 38.839 \\ 0 & 38.839 & 222.74 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{-6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{-6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 23122 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 9.0299 \frac{1}{m} & -38.839 \\ 0 & -38.839 & 222.74 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{-6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -23122 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -9.0299 \frac{1}{m} & 38.839 \\ 0 & -38.839 & 111.37 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$



### Element "3" - Bloki macierzy elementu bez przegubów

$$Lx := \frac{5 \cdot 6}{8} \text{ m} = 3.75 \text{ m} \quad Ly := -5 \text{ m} = -5 \text{ m} \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 6.250000 \text{ m}$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

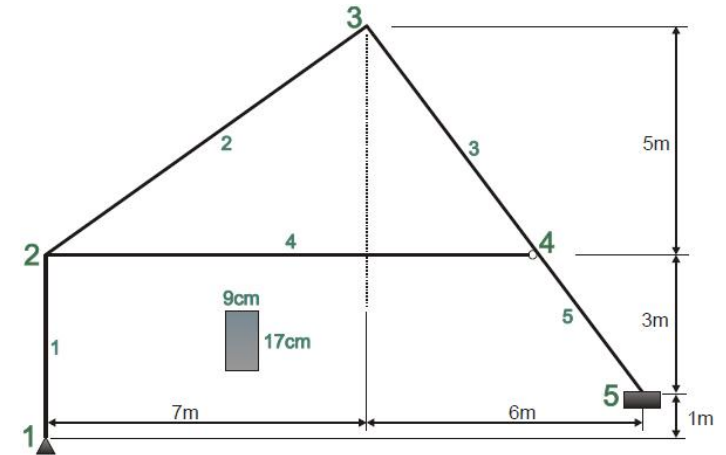
$$A = \begin{bmatrix} 31824 \frac{1}{\text{m}} & 0 & 0 \\ 0 & 23.545 \frac{1}{\text{m}} & 73.577 \\ 0 & 73.577 & 306.57 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{-6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{-6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 31824 \frac{1}{\text{m}} & 0 & 0 \\ 0 & 23.545 \frac{1}{\text{m}} & -73.577 \\ 0 & -73.577 & 306.57 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -31824 \frac{1}{\text{m}} & 0 & 0 \\ 0 & -23.545 \frac{1}{\text{m}} & 73.577 \\ 0 & -73.577 & 153.29 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$



Element "5" - Bloki macierzy elementu bez przegubów

$$Lx := \frac{3}{8} \cdot 6 \text{ m} \quad Ly := -3 \text{ m} \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 3.750000 \text{ m}$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

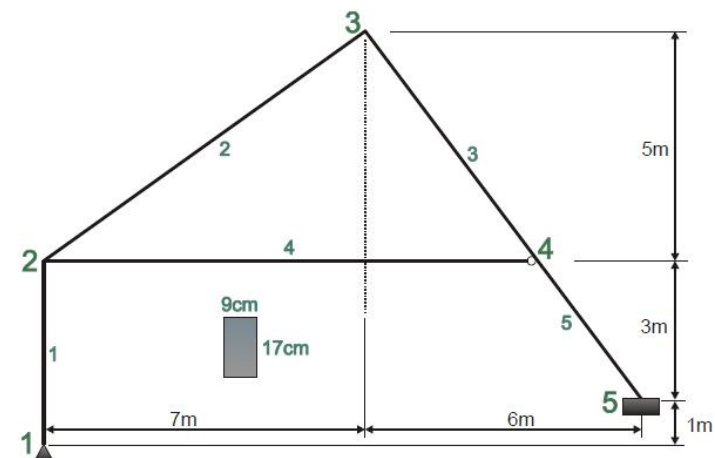
$$A = \begin{bmatrix} 53040 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 109.00 \frac{1}{m} & 204.38 \\ 0 & 204.38 & 510.95 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{-6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{-6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 53040 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 109.00 \frac{1}{m} & -204.38 \\ 0 & -204.38 & 510.95 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{-6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -53040 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -109.00 \frac{1}{m} & 204.38 \\ 0 & -204.38 & 255.48 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$



Element "4" - Bloki macierzy elementu z przegubem w węźle końcowym

$$Lx := \left(7 + \frac{5 \cdot 6}{8}\right) m \quad Ly := 0 m \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 10.750000 m$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & \frac{3 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^2} & \frac{3 EJ}{L} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 18502 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 1.1568 \frac{1}{m} & 12.435 \\ 0 & 12.435 & 133.68 m \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 18502 & 0 & 0 \\ 0 & 1.1568 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3 EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{-3 EJ}{L^2} & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -18502 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1568 & 0 \\ 0 & -12.435 m & 0 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

