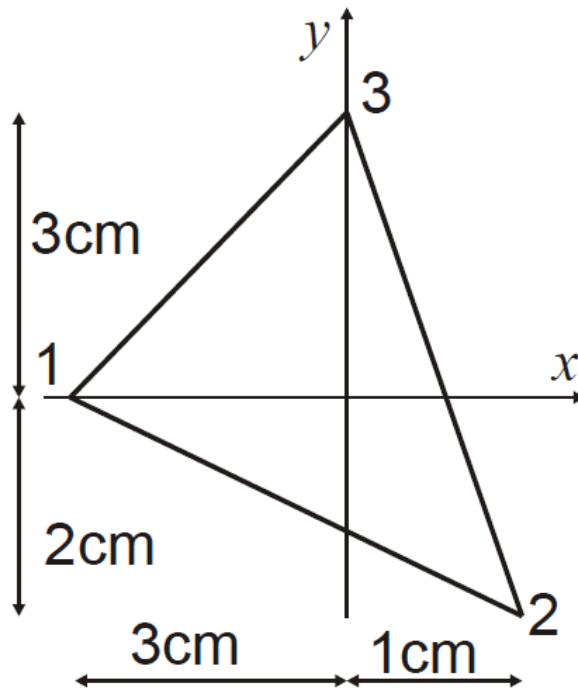


Podać składowe wektora odkształceń elementu CST z dokładnością do 5-ciu miejsc znaczących



$$u^e = \begin{bmatrix} +2 \\ -2 \\ +3 \\ -1 \\ +2 \\ -3 \end{bmatrix} \text{mm}$$

wektor współrzędnych elementu

$$x^e = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad x^e := \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \text{cm}$$

wektor przemieszczeń elementu

$$u^e = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} \quad u^e := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \text{mm}$$

Funkcje przemieszczeń elementu

$$u_x(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) \cdot u_{xi} \quad u_y(x, y) = \sum_{i=1}^3 N_i(x, y) \cdot u_{yi}$$

Wektor odkształceń elementu

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_x = \frac{d}{dx} u_x(x, y) \quad \varepsilon_y = \frac{d}{dy} u_y(x, y) \quad \gamma_{xy} = \frac{d}{dy} u_x(x, y) + \frac{d}{dx} u_y(x, y)$$

$$N_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y \quad - \text{funkcja kształtu węzła "i" (i=1,2,3)}$$

$$dN_{x_i}(x, y) = \frac{d}{dx} N_i(x, y) = b_i \quad - \text{pochodna funkcji kształtu węzła "i" względem "x"}$$

$$dN_{y_i}(x, y) = \frac{d}{dy} N_i(x, y) = c_i \quad - \text{pochodna funkcji kształtu węzła "i" względem "y"}$$

Składowe wektora odkształcenia można obliczyć teraz za pomocą sumowania:

$$\varepsilon_x = \sum_{i=1}^3 b_i u_{xi} \quad \varepsilon_y = \sum_{i=1}^3 c_i u_{yi} \quad \gamma_{xy} = \sum_{i=1}^3 (c_i u_{xi} + b_i u_{yi})$$

Wyznaczanie współczynników funkcji kształtu dzięki warunkom zgodności przemieszczeń w węzłach uzyskamy przez rozwiązanie 3 układów równań liniowych:

$$Me \cdot \alpha_i = \delta_i \quad (*) \quad - \text{gdzie oznaczono:}$$

$$Me = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad - \text{macierz współrzędnych elementu} \quad \alpha_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} \quad - \text{współczynniki funkcji kształtu węzła "i"}$$

$$\delta_i = \begin{bmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \delta_{3i} \end{bmatrix} \quad - \text{wektor prawych stron, zawiera "delty Kroneckera" ----> } \delta_{ii} = 1 \quad \delta_{ij} = 0 \text{ gdy } i \neq j$$

$$\delta_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \delta_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \delta_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Po rozwiązaniu tych układów równań otrzymamy:

$$A2 \cdot \alpha_1 = \begin{bmatrix} 0.03 \text{ m} \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ cm} \quad A2 \cdot \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0.09 \text{ m} \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ cm} \quad A2 \cdot \alpha_3 = \begin{bmatrix} 0.06 \text{ m} \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ cm}$$

gdzie przez $A2$ oznaczono podwojone pole powierzchni elementu: $A2 = |Me| \quad A2 = 18 \text{ cm}^2$

$$\varepsilon_x = \sum_{i=1}^3 b_i u_{xi} \quad \varepsilon_y = \sum_{i=1}^3 c_i u_{yi} \quad \gamma_{xy} = \sum_{i=1}^3 (c_i u_{xi} + b_i u_{yi}) \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad Me = \begin{bmatrix} 1 & -3 \text{ cm} & 0 \text{ cm} \\ 1 & 1 \text{ cm} & -2 \text{ cm} \\ 1 & 0 \text{ cm} & 3 \text{ cm} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 1.6667 \cdot 10^{-2} \\ -3.8889 \cdot 10^{-2} \\ -1.1111 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}, \quad \text{lub:} \quad \varepsilon := B \cdot ue = \begin{bmatrix} 1.6667 \cdot 10^{-2} \\ -3.8889 \cdot 10^{-2} \\ -1.1111 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \quad 10 \cdot A2 \cdot \varepsilon = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ cm}^2$$

Macierz geometryczna elementu

$$B = [B_1 \ B_2 \ B_3] \quad B_1 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & c_1 \\ c_1 & b_1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & c_2 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} b_3 & 0 \\ 0 & c_3 \\ c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad 100 \cdot A2 \cdot B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & -5 & -3 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ m}$$