

Podać składowe wektora odkształceń elementu CST z dokładnością do 5-ciu miejsc znaczących

wektory współrzędnych węzłów

$$x := \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} cm \quad y := \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot cm$$

wektor przemieszczeń węzłów

$$ux := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} mm \quad uy := \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} mm$$

Definiujemy funkcje kształtu elementu CST:

$$N_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y$$

Funkcja kształtu $N_i(x, y)$ jest liniową funkcją opisującą przemieszczenia punktów elementu trójkątnego, przy jednostkowym przemieszczeniu węzła "i" oraz zerowych przemieszczeniach dwóch pozostałych węzłów, powinna więc spełniać warunki:

$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad \text{dla } i \text{ oraz } j \text{ przyjmujących wartości: } 1, 2, 3. \quad \delta_{ij} \text{ oznacza tu "deltę" Kroneckera, która przyjmuje wartość 1, gdy } i=j \text{ lub 0 w pozostałych przypadkach.}$$

Warunki powyższe pozwalają obliczyć 9 stałych: (a_i, b_i, c_i) Do rozwiązania zadania potrzebne będą tylko stałe "b" i "c", bo one występują w równaniach dających składowe wektora odkształcenia

Wyznaczenie stałych występujących w funkcji kształtu węzła "1"

$$\begin{aligned} N_1(x_1, y_1) &= a_1 + b_1 \cdot x_1 + c_1 \cdot y_1 = 1 \\ N_1(x_2, y_2) &= a_1 + b_1 \cdot x_2 + c_1 \cdot y_2 = 0 \\ N_1(x_3, y_3) &= a_1 + b_1 \cdot x_3 + c_1 \cdot y_3 = 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} (1) & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad M \cdot \alpha_1 = \delta_1 \quad M = \begin{bmatrix} (1) & -3cm & 0cm \\ (1) & 1cm & -4cm \\ (1) & 0cm & 3cm \end{bmatrix}$$

Rozwiązujemy ten układ równań jedną ze znanych metod...

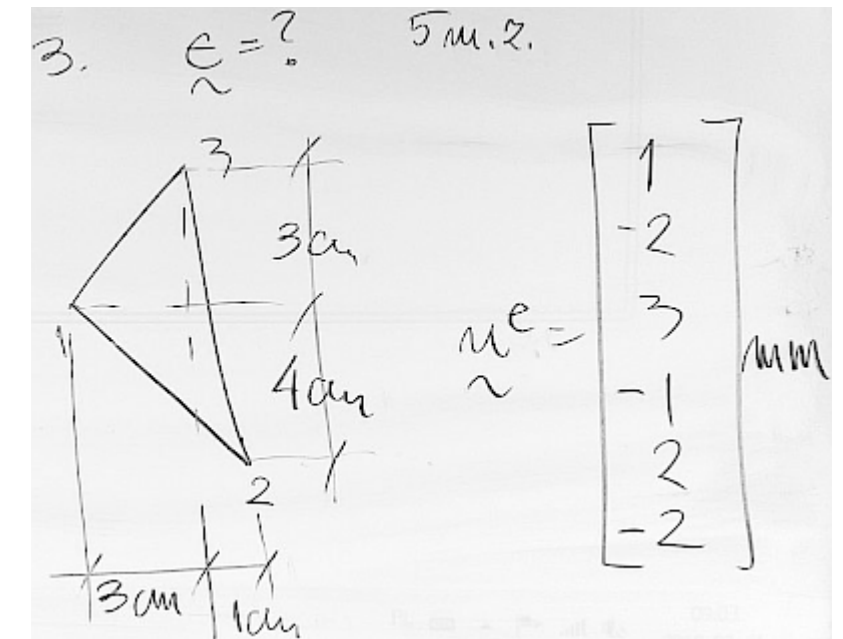
1. Rozwiązanie za pomocą macierzy odwrotnej: $\alpha_1 = M^{-1} \cdot \delta_1$

2. Rozwiązanie metodą eliminacji Gaussa dostępną w MathCadzie: $\alpha_1 = \text{lsolve}(M, \delta_1)$

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} (1.25000 \times 10^{-1}) \\ -2.91667 \times 10^{-1} \\ -4.16667 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \frac{1}{cm}$$

3. Rozwiązanie metodą Cramera: $m = |M| \quad m = 24 \cdot cm^2$

$$M_b = \begin{bmatrix} 1 & (1) & 0cm \\ 1 & 0 & -4cm \\ 1 & 0 & 3cm \end{bmatrix} \quad M_c = \begin{bmatrix} 1 & -3cm & (1) \\ 1 & 1cm & 0 \\ 1 & 0cm & 0 \end{bmatrix} \quad m_b = |M_b| \quad m_c = |M_c| \quad m_b = -7 \cdot cm \quad m_c = -1 \cdot cm \quad b_1 := \frac{m_b}{m} = -2.91667 \times 10^{-1} \cdot \frac{1}{cm} \quad c_1 := \frac{m_c}{m} = -4.16667 \times 10^{-2} \cdot \frac{1}{cm}$$



Wyznaczenie stałych występujących w funkcji kształtu węzła "2"

$$\begin{aligned} N_2(x_1, y_1) &= a_2 + b_2 \cdot x_1 + c_2 \cdot y_1 = 0 \\ N_2(x_2, y_2) &= a_2 + b_2 \cdot x_2 + c_2 \cdot y_2 = 1 \\ N_2(x_3, y_3) &= a_2 + b_2 \cdot x_3 + c_2 \cdot y_3 = 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} (1) & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (a_2) \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ (1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad M \cdot \alpha_2 = \delta_2 \quad M = \begin{bmatrix} (1) & -3cm & 0cm \\ (1) & 1cm & -4cm \\ (1) & 0cm & 3cm \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań

$$\alpha_2 = M^{-1} \cdot \delta_2 \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} (3.75000 \times 10^{-1}) \\ 1.25000 \times 10^{-1} \\ -1.25000 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{cm} \quad b_2 = 1.25000 \times 10^{-1} \cdot \frac{1}{cm} \quad c_2 = -1.25000 \times 10^{-1} \cdot \frac{1}{cm}$$

Wyznaczenie stałych występujących w funkcji kształtu węzła "3"

$$\begin{aligned} N_3(x_1, y_1) &= a_3 + b_3 \cdot x_1 + c_3 \cdot y_1 = 0 \\ N_3(x_2, y_2) &= a_3 + b_3 \cdot x_2 + c_3 \cdot y_2 = 0 \\ N_3(x_3, y_3) &= a_3 + b_3 \cdot x_3 + c_3 \cdot y_3 = 1 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} (1) & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (a_3) \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1) \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad M \cdot \alpha_3 = \delta_3 \quad M = \begin{bmatrix} (1) & -3cm & 0cm \\ (1) & 1cm & -4cm \\ (1) & 0cm & 3cm \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań

$$\alpha_3 = M^{-1} \cdot \delta_3 \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} (5.00000 \times 10^{-1}) \\ 1.66667 \times 10^{-1} \\ 1.66667 \times 10^{-1} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{cm} \quad b_3 = 1.66667 \times 10^{-1} \cdot \frac{1}{cm} \quad c_3 = 1.66667 \times 10^{-1} \cdot \frac{1}{cm}$$

Aproksymacja przemieszczeń za pomocą funkcji kształtu

$$u_x = \sum_{i=1}^3 (N_i(x, y) \cdot u_{xi}) \quad u_x = N_1 \cdot u_{x1} + N_2 \cdot u_{x2} + N_3 \cdot u_{x3}$$

$$u_y = \sum_{i=1}^3 (N_i(x, y) \cdot u_{yi}) \quad u_y = N_1 \cdot u_{y1} + N_2 \cdot u_{y2} + N_3 \cdot u_{y3}$$

Obliczanie odkształceń:

$$\varepsilon_x = \frac{d}{dx} u_x = \sum_{i=1}^3 \left(b_i \cdot u_{xi} \right) = b_1 \cdot u_{x1} + b_2 \cdot u_{x2} + b_3 \cdot u_{x3}$$

$$\varepsilon_x := b_1 \cdot ux_1 + b_2 \cdot ux_2 + b_3 \cdot ux_3$$

$$\varepsilon_y = \frac{d}{dy} u_y = \sum_{i=1}^3 \left(c_i \cdot u_{yi} \right) = c_1 \cdot u_{y1} + c_2 \cdot u_{y2} + c_3 \cdot u_{y3}$$

$$\varepsilon_y := c_1 \cdot uy_1 + c_2 \cdot uy_2 + c_3 \cdot uy_3$$

$$\gamma_{xy} = \frac{d}{dy} u_x + \frac{d}{dx} u_y = \sum_{i=1}^3 \left(b_i \cdot u_{yi} + c_i \cdot u_{xi} \right)$$

$$\gamma_{xy} := \left(b_1 \cdot uy_1 + b_2 \cdot uy_2 + b_3 \cdot uy_3 \right) + \left(c_1 \cdot ux_1 + c_2 \cdot ux_2 + c_3 \cdot ux_3 \right)$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} 4.1667 \times 10^{(-2)} \\ -1.2500 \times 10^{(-2)} \\ 4.1667 \times 10^{(-3)} \end{bmatrix} \qquad 10\varepsilon \cdot m = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot cm^2$$

$$\textcolor{green}{ORIGIN} := 1$$

$$\textcolor{green}{l} := 1\textit{cm}$$

$$\textcolor{green}{x} := \frac{1}{l} \cdot x \qquad \textcolor{green}{y} := \frac{1}{l} \cdot y \qquad I := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M := \textit{augment}(I, x, y)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textcolor{green}{m} := \textcolor{teal}{cm}^2 \left|M\right| = 2.4 \times 10^{-3} \textcolor{teal}{m}^2$$

$$\delta_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 := M^{-1} \cdot \delta_1 \qquad \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1.25000 \times 10^{-1} \\ -2.91667 \times 10^{-1} \\ -4.16667 \times 10^{-2} \end{pmatrix}$$

$$M_b := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad m_b := \left|M_b\right| \cdot \textcolor{teal}{cm} = -0.07 \textcolor{teal}{m}$$

$$M_c := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad m_c := \left|M_c\right| \cdot \textcolor{teal}{cm} = -0.01 \textcolor{teal}{m}$$

$$\delta_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 := M^{-1} \cdot \delta_2 \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3.75000 \times 10^{-1} \\ 1.25000 \times 10^{-1} \\ -1.25000 \times 10^{-1} \end{pmatrix}$$

$$b_2 := \frac{\alpha_{2_2}}{cm} \qquad c_2 := \frac{\alpha_{2_3}}{cm}$$

$$\delta_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_3 := M^{-1} \cdot \delta_3 \qquad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 5.00000 \times 10^{-1} \\ 1.66667 \times 10^{-1} \\ 1.66667 \times 10^{-1} \end{pmatrix}$$

$$b_3 := \frac{\alpha_{3_2}}{cm} \qquad c_3 := \frac{\alpha_{3_3}}{cm}$$

$$\underline{\varepsilon} := \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 4.1667 \times 10^{-2} \\ -1.2500 \times 10^{-2} \\ 4.1667 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$