

## Macierz elementu bez przegubów



$$[u_x \cdot u_y \cdot \varphi_z]$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} & 0 & -\frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} & 0 & -\frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 EJ}{L^3} & -\frac{6 EJ}{L^2} & 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & -\frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} & 0 & -\frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$$

Macierz elementu z przegubem w węźle początkowym



$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3 EJ}{L^3} & \frac{3 EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3 EJ}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & -\frac{3 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3 EJ}{L^2} & \frac{3 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

Macierz elementu z przegubem w węźle końcowym



$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & \frac{3 EJ}{L^2} & 0 & -\frac{3 EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^2} & \frac{3 EJ}{L} & 0 & -\frac{3 EJ}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3 EJ}{L^3} & -\frac{3 EJ}{L^2} & 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć składowe macierzy sztywności elementów ramy płaskiej.  
 Podać postacie bloków A, B i C macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych z dokładnością do 5-ciu miejsc znaczących

$$E := 11 \text{ GPa} \quad b := 15 \text{ cm} \quad h := 20 \text{ cm}$$

$$J := \frac{b \cdot h^3}{36} = 3333.333 \text{ cm}^4 \quad A := \frac{b \cdot h}{2} = 150.000 \text{ cm}^2 \quad EJ := E \cdot J \quad EA := E \cdot A$$

$$EJ = 366.667 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \quad EA = 165000.000 \text{ kN}$$

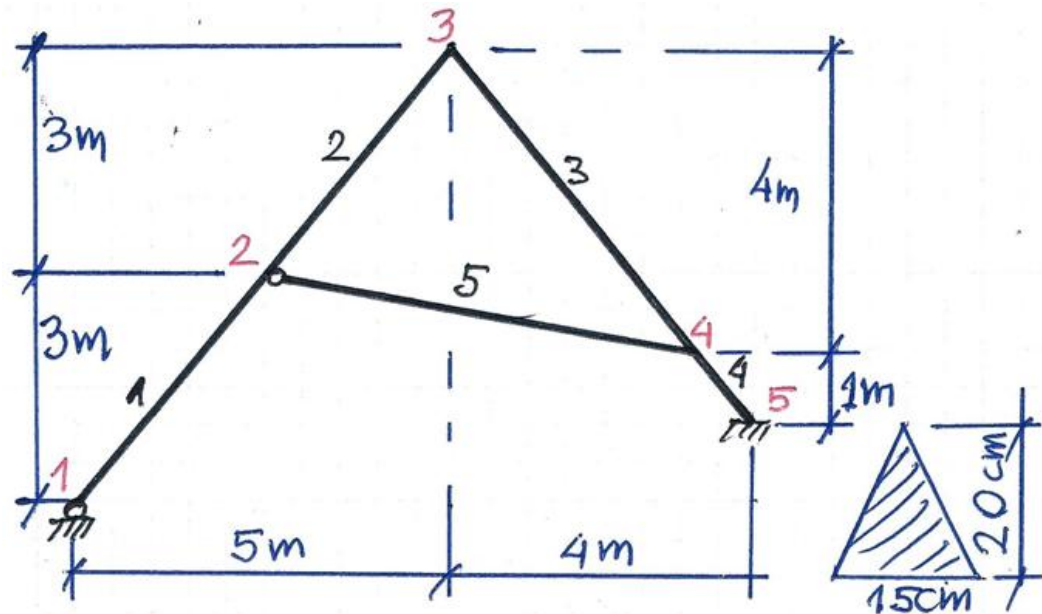
Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$$

Warunki brzegowe (podporowe)

$$u_{X1} = 0 \quad u_{Y1} = 0$$

$$u_{X5} = 0 \quad u_{Y5} = 0 \quad \varphi_5 = 0$$



# Element "1" - Bloki macierzy elementu bez przegubów

$$Lx := 2.5 \text{ m}$$

$$Ly := 3 \text{ m}$$

$$L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 3.905125 \text{ m}$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

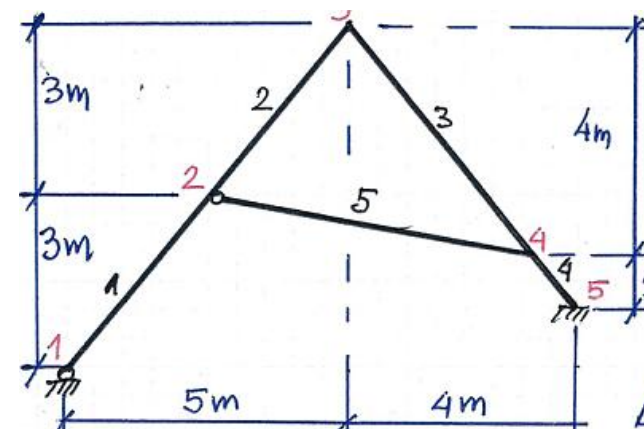
$$A = \begin{bmatrix} 42252 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 73.884 \frac{1}{m} & 144.26 \\ 0 & 144.26 & 375.57 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{-6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{-6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 42252 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 73.884 \frac{1}{m} & -144.26 \\ 0 & -144.26 & 375.57 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -42252 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -73.884 \frac{1}{m} & 144.26 \\ 0 & -144.26 & 187.79 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$



## Element "2" - Bloki macierzy elementu bez przegubów

$$Lx := 2.5 \text{ m} = 2.5 \text{ m} \quad Ly := 3 \text{ m} = 3 \text{ m} \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 3.905125 \text{ m}$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

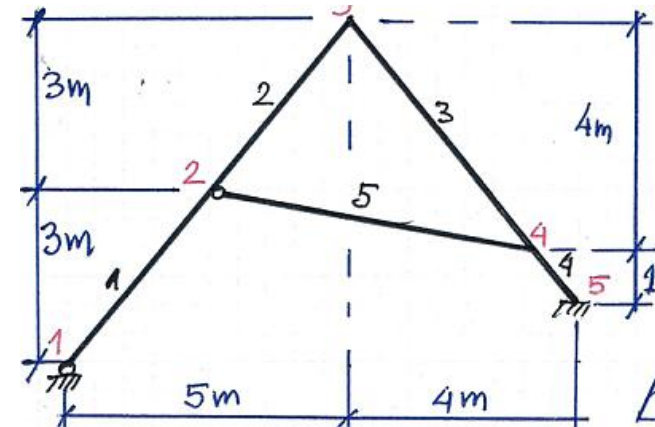
$$A = \begin{bmatrix} 42252 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 73.884 \frac{1}{m} & 144.26 \\ 0 & 144.26 & 375.57 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{-6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{-6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 42252 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 73.884 \frac{1}{m} & -144.26 \\ 0 & -144.26 & 375.57 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -42252 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -73.884 \frac{1}{m} & 144.26 \\ 0 & -144.26 & 187.79 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$



Element "3" - Bloki macierzy elementu bez przegubów

$$Lx := \frac{4}{5} \cdot 4 \text{ m} \quad Ly := -4 \text{ m} \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 5.122499 \text{ m}$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

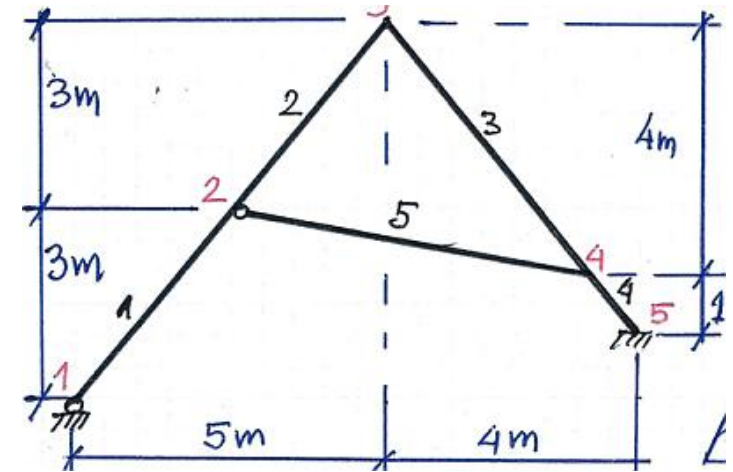
$$A = \begin{bmatrix} 32211 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 32.735 \frac{1}{m} & 83.841 \\ 0 & 83.841 & 286.32 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{-6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{-6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 32211 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 32.735 \frac{1}{m} & -83.841 \\ 0 & -83.841 & 286.32 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -32211 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -32.735 \frac{1}{m} & 83.841 \\ 0 & -83.841 & 143.16 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$



Element "5" - Bloki macierzy elementu z przegubem w węźle początkowym

$$Lx := \left(2.5 + \frac{4 \cdot 4}{5}\right) m \quad Ly := -1 m \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 5.787055 m$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 28512 & 0 & 0 \\ 0 & 5.6757 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & \frac{3 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^2} & \frac{3 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 28512 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 5.6757 & \frac{1}{m} & -32.846 \\ 0 & -32.846 & 190.08 & m \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3 EJ}{L^3} & \frac{3 EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -28512 & 0 & 0 \\ 0 & -5.6757 & 32.846 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

