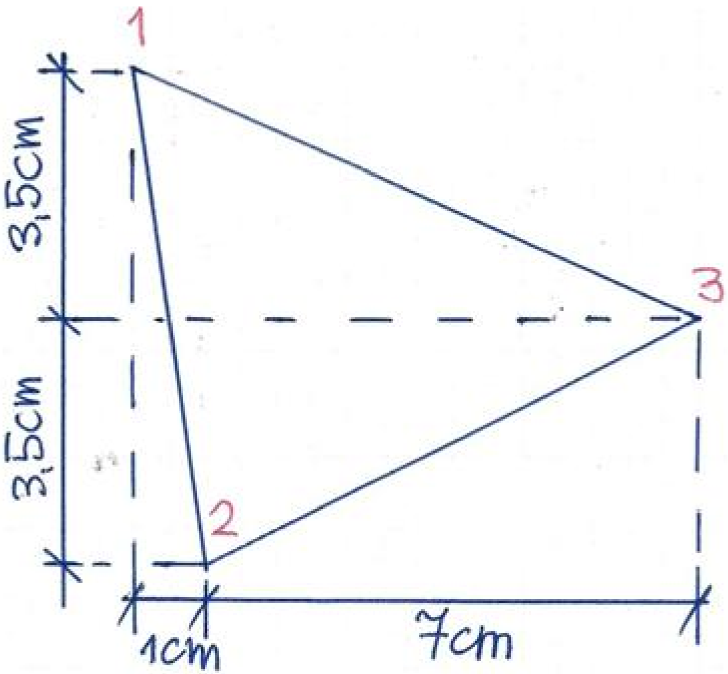
# *Podać składowe wektora odkształceń elementu CST z dokładnością do 5-ciu miejsc znaczących*




$$\boldsymbol{u}^e = \begin{bmatrix} +2 \\ -3 \\ +3 \\ -1 \\ +1 \\ -2 \end{bmatrix} \mathrm{mm}$$

*wektor współrzędnych elementu*

$$xe = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \qquad xe := \begin{bmatrix} 0 \\ 3.5 \\ 1 \\ -3.5 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot cm$$

*wektor przemieszczeń elementu*

$$ue = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} \qquad ue := \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot mm$$

*Funkcje przemieszczeń elementu*

$$u_x(x,y) = \sum_{i=1}^{3} N_i(x,y) \cdot u_{xi} \qquad u_y(x,y) = \sum_{i=1}^{3} N_i(x,y) \cdot u_{yi}$$

*Wektor odkształceń elementu*

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_x = \frac{d}{dx} u_x(x,y) \qquad \varepsilon_y = \frac{d}{dy} u_y(x,y) \qquad \gamma_{xy} = \frac{d}{dy} u_x(x,y) + \frac{d}{dx} u_y(x,y)$$

$N_i(x,y) = a_i + b_i x + c_i y$ - funkcja kształtu węzła"i" (i=1,2,3)

$dNx_i(x,y) = \frac{d}{dx} N_i(x,y) = b_i$ - pochodna funkcji kształtu węzła "i"względem "x"

$dNy_i(x,y) = \frac{d}{dy} N_i(x,y) = c_i$ - pochodna funkcji kształtu węzła "i" względem "y"

Składowe wektora odkształcenia można obliczyć teraz za pomoca sumowania:

$$\varepsilon_x = \sum_{i=1}^{3} b_i u_{xi} \qquad \varepsilon_y = \sum_{i=1}^{3} c_i u_{yi} \qquad \gamma_{xy} = \sum_{i=1}^{3} \left( c_i u_{xi} + b_i u_{yi} \right)$$

Wyznaczanie współczynników funkcji kształtu dzięki warunkom zgodności przemieszczeń w węzłach uzyskamy przez rozwiązanie 3 układów równań liniowych:

$Me \cdot \alpha_i = \delta_i$ (*) - gdzie oznaczono:

$$Me = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$ - macierz współrzędnych elementu

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix}$$ - współczynniki funkcji kształtu węzła "i"

$$\delta_i = \begin{bmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \delta_{3i} \end{bmatrix}$$ - wektor prawych stron, zawiera "delty Kroneckera" ----> $\delta_{ii} = 1$

$\delta_{ij} = 0$ gdy $i \neq j$

$$\delta_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \delta_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \delta_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*Po rozwiązaniu tych układów równań otrzymamy:*

$$A2 \cdot \alpha_1 = \begin{bmatrix} 0.28 \ m \\ -3.5 \\ 7 \end{bmatrix} cm \qquad A2 \cdot \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0.28 \ m \\ -3.5 \\ -8 \end{bmatrix} cm \qquad A2 \cdot \alpha_3 = \begin{bmatrix} -0.035 \ m \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} cm$$

*gdzie przez A2 oznaczono podwojone pole powierzchni elementu:* $A2 = |Me| \quad A2 = 52.5 \ cm^2$

$$\varepsilon_x = \sum_{i=1}^{3} b_i u_{xi} \quad \varepsilon_y = \sum_{i=1}^{3} c_i u_{yi} \quad \gamma_{xy} = \sum_{i=1}^{3} \left( c_i u_{xi} + b_i u_{yi} \right) \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \qquad Me = \begin{bmatrix} 1 & -3 \ cm & 0 \ cm \\ 1 & 1 \ cm & -2 \ cm \\ 1 & 0 \ cm & 3 \ cm \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} -2 \cdot 10^{-2} \\ -2.8571 \cdot 10^{-2} \\ -1.7143 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix},$$

*lub:*

$$\varepsilon := B \cdot ue = \begin{bmatrix} -2.0000 \cdot 10^{-2} \\ -2.8571 \cdot 10^{-2} \\ -1.7143 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \qquad 10 \cdot A2 \cdot \varepsilon = \begin{bmatrix} -10.5 \\ -15 \\ -9 \end{bmatrix} cm^2$$

*Macierz geometryczna elementu*

$$B = \left[ B_1 \ B_2 \ B_3 \right] \qquad B_1 = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & c_1 \\ c_1 & b_1 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & c_2 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix} \qquad B_3 = \begin{bmatrix} b_3 & 0 \\ 0 & c_3 \\ c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$A2 \cdot B = \begin{bmatrix} -3.5 & 0 & -3.5 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -8 & 0 & 1 \\ 7 & -3.5 & -8 & -3.5 & 1 & 7 \end{bmatrix} cm$$