

## Macierz elementu bez przegubów



$$[u_x \cdot u_y \cdot \varphi_z]$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} & 0 & -\frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} & 0 & -\frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 EJ}{L^3} & -\frac{6 EJ}{L^2} & 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & -\frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} & 0 & -\frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$$

Macierz elementu z przegubem w węźle początkowym



$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3 EJ}{L^3} & \frac{3 EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3 EJ}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & -\frac{3 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3 EJ}{L^2} & \frac{3 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

Macierz elementu z przegubem w węźle końcowym



$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & \frac{3 EJ}{L^2} & 0 & -\frac{3 EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^2} & \frac{3 EJ}{L} & 0 & -\frac{3 EJ}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3 EJ}{L^3} & -\frac{3 EJ}{L^2} & 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć składowe macierzy sztywności elementów ramy płaskiej.  
 Podać postacie bloków A, B i C macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych z dokładnością do 5-ciu miejsc znaczących

$$E := 11 \text{ GPa} \quad b := 20 \text{ cm} \quad h := 25 \text{ cm} \quad b1 := 10 \text{ cm} \quad h1 := 15 \text{ cm}$$

$$J := \frac{b \cdot h^3 - b1 \cdot h1^3}{12} = 23229.167 \text{ cm}^4 \quad A := b \cdot h - b1 \cdot h1 = 350.000 \text{ cm}^2 \quad EJ := E \cdot J \quad EA := E \cdot A$$

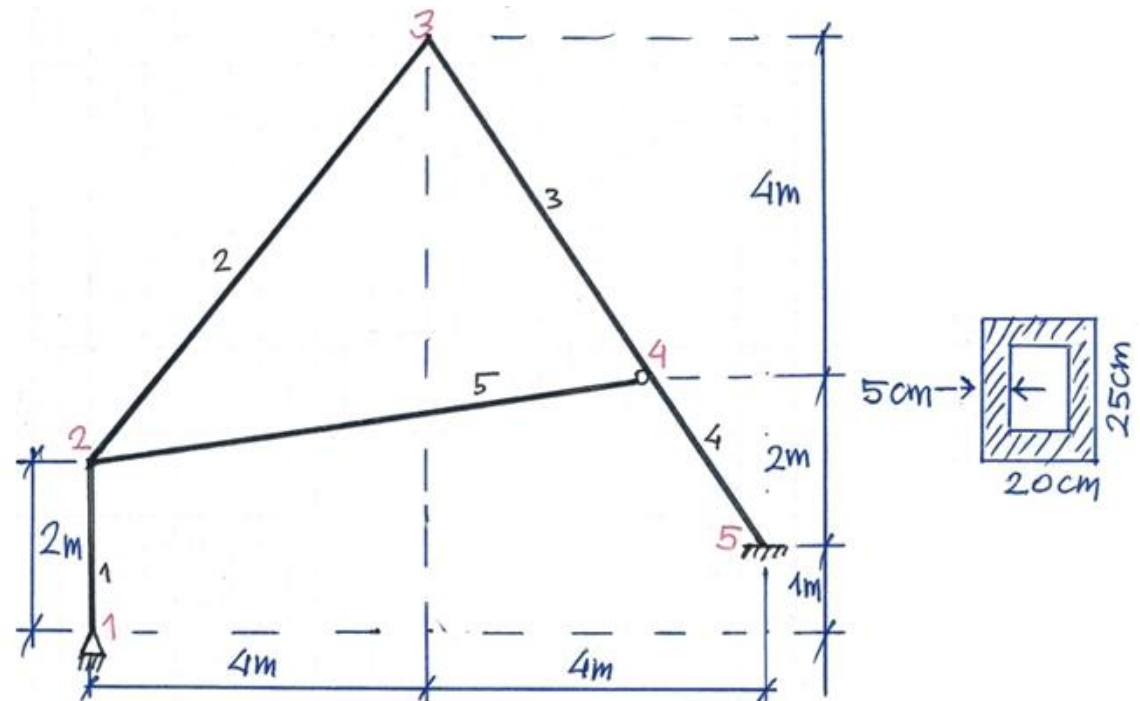
$$EJ = 2555.208 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \quad EA = 385000.000 \text{ kN}$$

Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$$

Warunki brzegowe (podporowe)

$$\begin{aligned} u_{X1} &= 0 & u_{Y1} &= 0 \\ u_{X5} &= 0 & u_{Y5} &= 0 & \varphi_5 &= 0 \end{aligned}$$



## Element "2" - Bloki macierzy elementu bez przegubów

$$Lx := 4 \text{ m}$$

$$Ly := 5 \text{ m}$$

$$L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 6.403124 \text{ m}$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

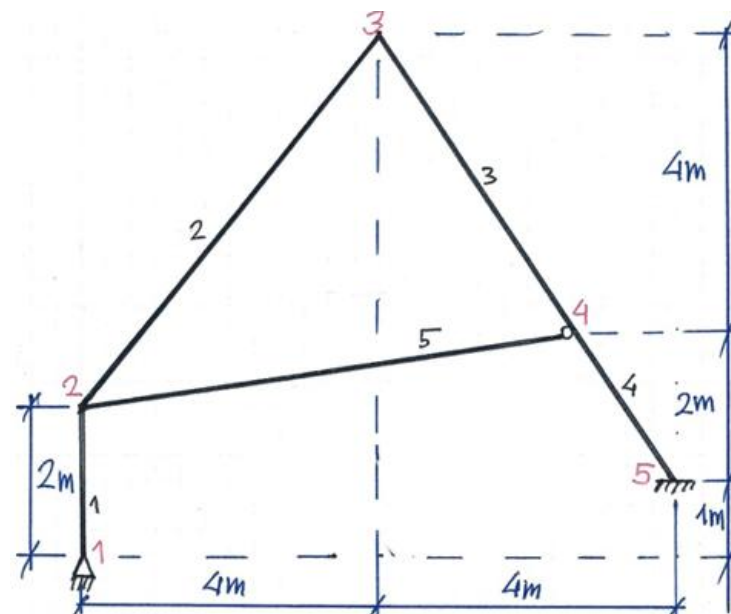
$$A = \begin{bmatrix} 60127 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 116.80 \frac{1}{m} & 373.93 \\ 0 & 373.93 & 1596.2 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{-6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{-6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 60127 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 116.80 \frac{1}{m} & -373.93 \\ 0 & -373.93 & 1596.2 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -60127 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -116.80 \frac{1}{m} & 373.93 \\ 0 & -373.93 & 798.11 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$



### Element "3" - Bloki macierzy elementu bez przegubów

$$Lx := \frac{4 \cdot 4}{6} \text{ m} = 2.6667 \text{ m} \quad Ly := -4 \text{ m} = -4 \text{ m} \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 4.807402 \text{ m}$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

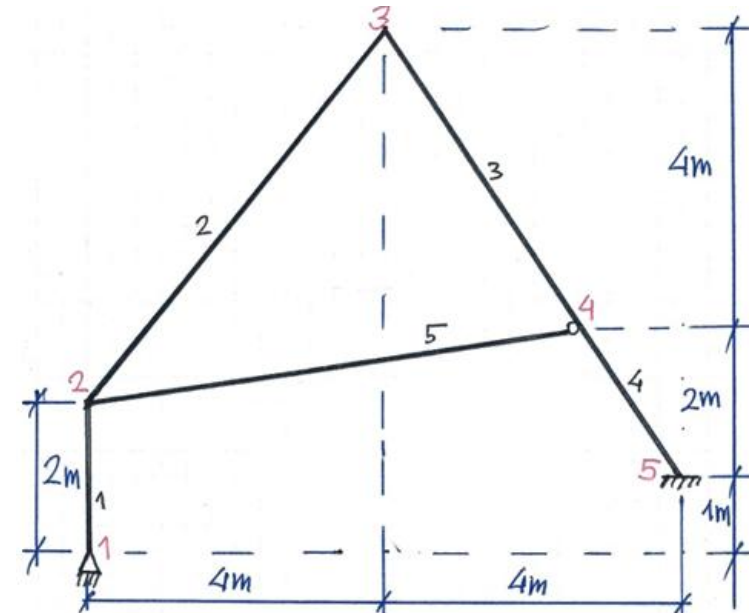
$$A = \begin{bmatrix} 80085 \frac{1}{\text{m}} & 0 & 0 \\ 0 & 275.98 \frac{1}{\text{m}} & 663.37 \\ 0 & 663.37 & 2126.1 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{-6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{-6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 80085 \frac{1}{\text{m}} & 0 & 0 \\ 0 & 275.98 \frac{1}{\text{m}} & -663.37 \\ 0 & -663.37 & 2126.1 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -80085 \frac{1}{\text{m}} & 0 & 0 \\ 0 & -275.98 \frac{1}{\text{m}} & 663.37 \\ 0 & -663.37 & 1063.0 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$



Element "4" - Bloki macierzy elementu bez przegubów

$$Lx := \frac{2}{6} \cdot 4 \text{ m} \quad Ly := -2 \text{ m} \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 2.403701 \text{ m}$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

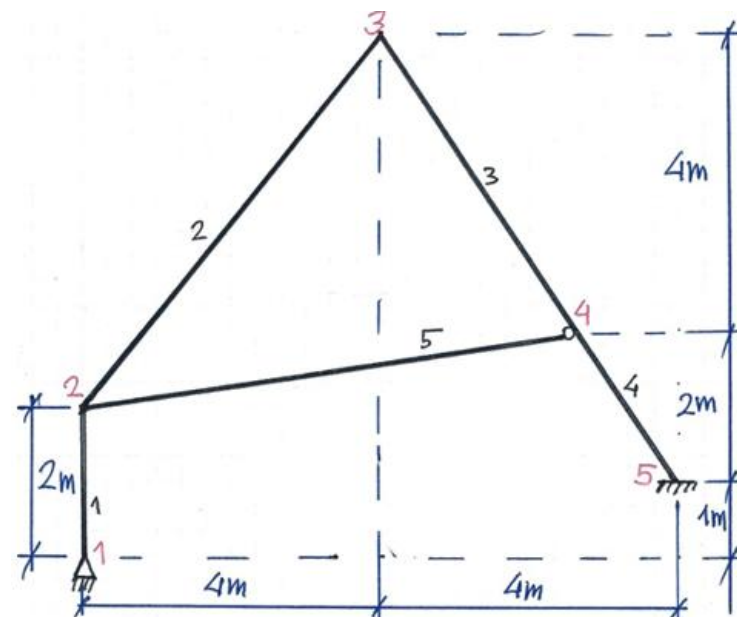
$$A = \begin{bmatrix} 160170 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 2207.8 \frac{1}{m} & 2653.4 \\ 0 & 2653.4 & 4252.1 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & -\frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & -\frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 160170 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 2207.8 \frac{1}{m} & -2653.4 \\ 0 & -2653.4 & 4252.1 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$C := \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & -\frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -160170 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -2207.8 \frac{1}{m} & 2653.4 \\ 0 & -2653.4 & 2126.1 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$



Element "5" - Bloki macierzy elementu z przegubem w węźle końcowym

$$Lx := \left(4 + \frac{4 \cdot 4}{6}\right) m \quad Ly := 1 m \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 6.741249 m$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & \frac{3 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^2} & \frac{3 EJ}{L} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 57111 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 25.022 \frac{1}{m} & 168.68 \\ 0 & 168.68 & 1137.1 m \end{bmatrix} kN$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 57111 & 0 & 0 \\ 0 & 25.022 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3 EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{-3 EJ}{L^2} & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -57111 & 0 & 0 \\ 0 & -25.022 & 0 \\ 0 & -168.68 m & 0 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

