

Macierz elementu bez przegubów



$$[u_x \cdot u_y \cdot \varphi_z]$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} & 0 & -\frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} & 0 & -\frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 EJ}{L^3} & -\frac{6 EJ}{L^2} & 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & -\frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} & 0 & -\frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$$

Macierz elementu z przegubem w węźle początkowym



$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & 0 & 0 & \frac{-3 EJ}{L^3} & \frac{3 EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3 EJ}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & \frac{-3 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^2} & 0 & 0 & \frac{-3 EJ}{L^2} & \frac{3 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

Macierz elementu z przegubem w węźle końcowym



$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & \frac{3 EJ}{L^2} & 0 & \frac{-3 EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^2} & \frac{3 EJ}{L} & 0 & \frac{-3 EJ}{L^2} & 0 \\ \frac{-EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3 EJ}{L^3} & \frac{-3 EJ}{L^2} & 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć składowe macierzy sztywności elementów ramy płaskiej.  
 Podać postacie bloków A, B i C macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych z dokładnością do 5-ciu miejsc znaczących

$$E := 13 \text{ GPa} \quad d := 19 \text{ cm}$$

$$J := \frac{\pi \cdot d^4}{64} = 6397.117 \text{ cm}^4 \quad A := \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 283.529 \text{ cm}^2 \quad EJ := E \cdot J \quad EA := E \cdot A$$

$$EJ = 831.625 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 \quad EA = 368587.358 \text{ kN}$$

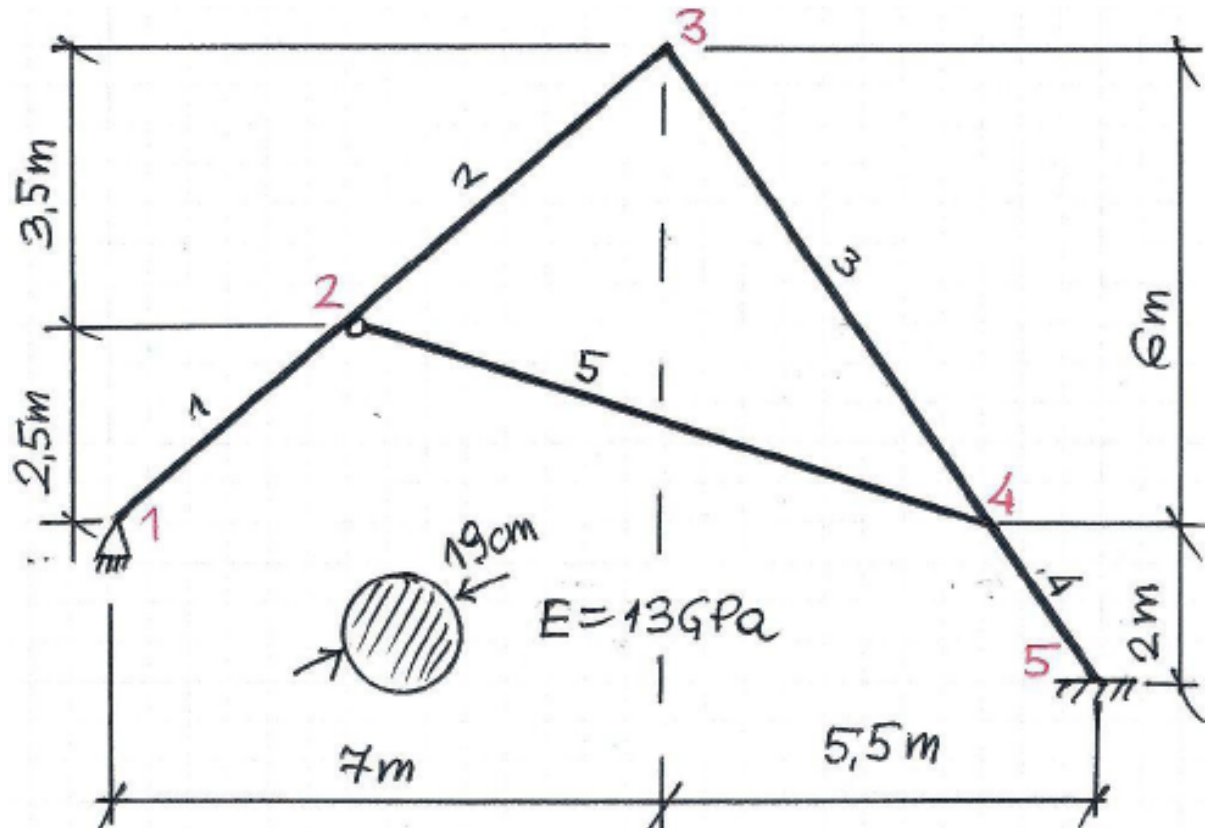
Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$$

Warunki brzegowe (podporowe)

$$u_{X1} = 0 \quad u_{Y1} = 0$$

$$u_{X5} = 0 \quad u_{Y5} = 0 \quad \varphi_5 = 0$$



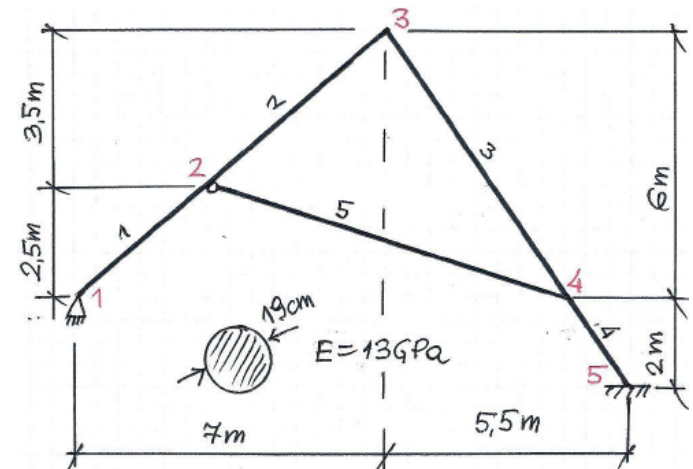
## Element "2" - Bloki macierzy elementu bez przegubów

$$Lx := \frac{3.5 \cdot 7}{6} \text{ m} \quad Ly := 3.5 \text{ m} \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 5.378068 \text{ m}$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 68535 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 64.155 \frac{1}{m} & 172.51 \\ 0 & 172.51 & 618.53 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{-6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{-6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 68535 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 64.155 \frac{1}{m} & -172.51 \\ 0 & -172.51 & 618.53 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{-6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -68535 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -64.155 \frac{1}{m} & 172.51 \\ 0 & -172.51 & 309.27 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$



### Element "3" - Bloki macierzy elementu bez przegubów

$$Lx := \frac{6}{8} \cdot 5.5 \text{ m} = 4.125 \text{ m} \quad Ly := -6 \text{ m} \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 7.281183 \text{ m}$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

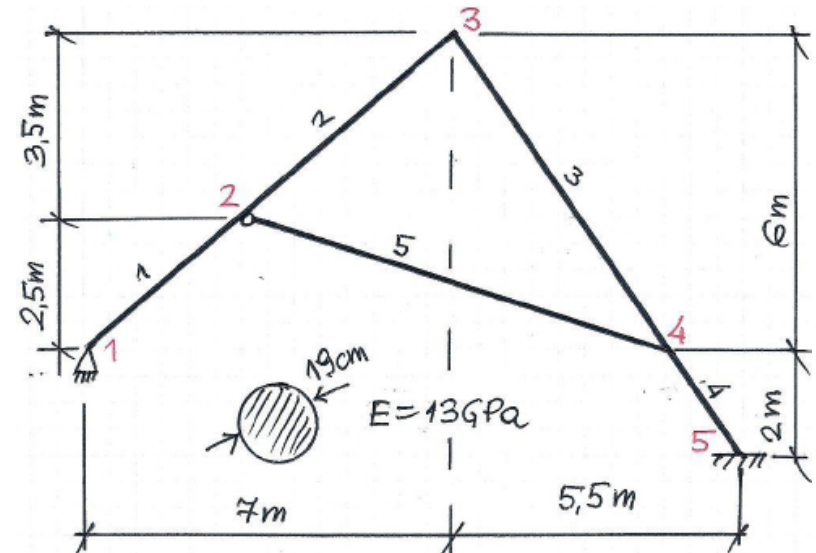
$$A = \begin{bmatrix} 50622 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 25.853 \frac{1}{m} & 94.119 \\ 0 & 94.119 & 456.86 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{-6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{-6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 50622 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 25.853 \frac{1}{m} & -94.119 \\ 0 & -94.119 & 456.86 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -50622 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -25.853 \frac{1}{m} & 94.119 \\ 0 & -94.119 & 228.43 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$



Element "4" - Bloki macierzy elementu bez przegubów

$$Lx := \frac{2}{8} \cdot 5.5 \text{ m} \quad Ly := -2 \text{ m}$$

$$L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 2.427061 \text{ m}$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

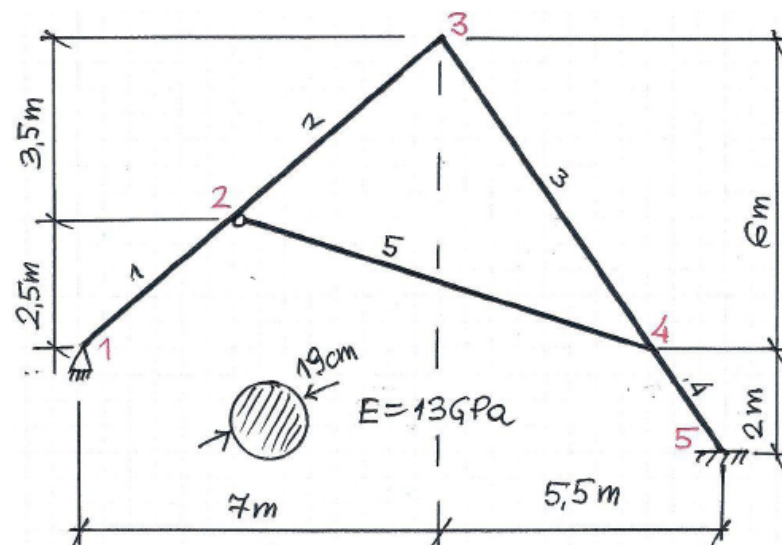
$$A = \begin{bmatrix} 151870 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 698.02 \frac{1}{m} & 847.07 \\ 0 & 847.07 & 1370.6 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EJ}{L^3} & \frac{-6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{-6 EJ}{L^2} & \frac{4 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 151870 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 698.02 \frac{1}{m} & -847.07 \\ 0 & -847.07 & 1370.6 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12 EJ}{L^3} & \frac{6 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{6 EJ}{L^2} & \frac{2 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -151870 \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -698.02 \frac{1}{m} & 847.07 \\ 0 & -847.07 & 685.29 \text{ m} \end{bmatrix} \text{ kN}$$



Element "5" - Bloki macierzy elementu z przegubem w węźle początkowym

$$Lx := \left( \frac{3.5 \cdot 7}{6} + \frac{6 \cdot 5.5}{8} \right) m \quad Ly := -2.5 m \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 8.580602 m$$

$$A := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 42956 & 0 & 0 \\ 0 & 3.9491 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3 EJ}{L^3} & \frac{-3 EJ}{L^2} \\ 0 & \frac{-3 EJ}{L^2} & \frac{3 EJ}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 42956 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 3.9491 & \frac{1}{m} & -33.885 \\ 0 & -33.885 & 290.76 & m \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$C := \begin{bmatrix} \frac{-EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3 EJ}{L^3} & \frac{3 EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -42956 & 0 & 0 \\ 0 & -3.9491 & \frac{1}{m} & 33.885 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

