Rozwiazanie układu równań liniowych metodą eliminacji Gaussa

$ORIGIN := 1$ *- Ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy*

$$A0 := \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 17 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 18 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

Generowanie wektora "prawej strony" dla rozwiązania jednostkowego

$N := rows(A0)$ $i := 1..N$ $b0_i := i$

$$b0 = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 2.000 \\ 3.000 \\ 4.000 \\ 5.000 \end{pmatrix}$$

$W := 1$

Eliminacja Nr 1

$n := 1$

$k := n .. N$ $\qquad$ $W := W \cdot A0_{n,n}$

$A1_{n,k} := \dfrac{A0_{n,k}}{A0_{n,n}}$ $\qquad$ $b1_n := \dfrac{b0_n}{A0_{n,n}}$ *- dzielenie pierwszego wiersza przez wyraz w lewym górnym "rogu" macierzy*

$i := n + 1 .. N$ *- odejmowanie pierwszego równania od pozostałych równań*

$k := n .. N$

$A1_{i,k} := A0_{i,k} - A1_{n,k} \cdot A0_{i,n}$ $\qquad$ $b1_i := b0_i - b1_n \cdot A0_{i,n}$

$$A1 = \begin{pmatrix} 1.0000 & -0.1000 & 0.2000 & 0.1000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 12.0000 & 2.0000 & 1.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.2000 & 16.6000 & -0.2000 & 1.0000 \\ 0.0000 & 4.0000 & -3.0000 & 18.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 1.2000 & 0.6000 & -0.2000 & 13.0000 \end{pmatrix} \qquad b1 = \begin{pmatrix} 0.100 \\ 2.000 \\ 2.800 \\ 4.000 \\ 4.800 \end{pmatrix}$$

Eliminacja Nr 2

$n := 2$

$k := n .. N$ $\qquad W := W \cdot A1_{n,n}$

$A2_{n,k} := \dfrac{A1_{n,k}}{A1_{n,n}} \qquad b2_n := \dfrac{b1_n}{A1_{n,n}}$

$i := n + 1 .. N$

$k := n .. N$

$A2_{i,k} := A1_{i,k} - A2_{n,k} \cdot A1_{i,n} \qquad b2_i := b1_i - b2_n \cdot A1_{i,n}$

$$A2 = \begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.167 & 0.083 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 16.400 & -0.300 & 1.000 \\ 0.000 & 0.000 & -3.667 & 17.667 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.400 & -0.300 & 13.000 \end{pmatrix} \qquad b2 = \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.167 \\ 2.600 \\ 3.333 \\ 4.600 \end{pmatrix}$$

Eliminacja Nr 3

$n := 3$

$k := n .. N \qquad W := W \cdot A2_{n,n}$

$A3_{n,k} := \dfrac{A2_{n,k}}{A2_{n,n}} \qquad b3_n := \dfrac{b2_n}{A2_{n,n}}$

$i := n + 1 .. N$

$k := n .. N$

$A3_{i,k} := A2_{i,k} - A3_{n,k} \cdot A2_{i,n} \qquad b3_i := b2_i - b3_n \cdot A2_{i,n}$

$$A3 = \begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & -0.018 & 0.061 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 17.600 & 0.224 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.293 & 12.976 \end{pmatrix} \qquad b3 = \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.159 \\ 3.915 \\ 4.537 \end{pmatrix}$$

Eliminacja Nr 4

$n := 4$

$k := n .. N \qquad W := W \cdot A3_{n,n}$

$A4_{n,k} := \dfrac{A3_{n,k}}{A3_{n,n}} \quad b4_n := \dfrac{b3_n}{A3_{n,n}}$

$i := n + 1 .. N$

$k := n .. N$

$A4_{i,k} := A3_{i,k} - A4_{n,k} \cdot A3_{i,n} \qquad b4_i := b3_i - b4_n \cdot A3_{i,n}$

$$A4 = \begin{pmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.013 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 12.979 \end{pmatrix} \qquad b4 = \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.222 \\ 4.602 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie układu równań przez podstawienie wstecz

$n := 5 \quad x_n := \dfrac{b4_n}{A4_{n,n}} \qquad x_5 = 0.355 \qquad W := W \cdot A4_{n,n}$

$n := 4 \quad x_n := b4_n - \sum_{k=n+1}^{N} \left(x_k \cdot A4_{n,k}\right) \quad x_4 = 0.218$

$W = 449552.000$ *- wyznacznik obliczony w czasie eliminacji Gaussa*

$|A0| = 449552.000$ *- wyznacznik obliczony procedurą MathCada*

$n := 3 \quad x_n := b3_n - \sum_{k=n+1}^{N} \left(x_k \cdot A3_{n,k}\right) \quad x_3 = 0.141$

$n := 2 \quad x_n := b2_n - \sum_{k=n+1}^{N} \left(x_k \cdot A2_{n,k}\right) \quad x_2 = 0.125$

$n := 1 \quad x_n := b1_n - \sum_{k=n+1}^{N} \left(x_k \cdot A1_{n,k}\right) \quad x_1 = 0.063$

$x^T = \begin{pmatrix} 0.063 & 0.125 & 0.141 & 0.218 & 0.355 \end{pmatrix}$ *- wynik rozwiazania*

$y := \mathrm{lsolve}(A0, b0)$

$y^T = \begin{pmatrix} 0.063 & 0.125 & 0.141 & 0.218 & 0.355 \end{pmatrix}$

Różnica miedzy rozwiązaniami uzyskanymi z eliminacji Gaussa i funkcją MathCada "lsolve"

$err := y - x \qquad err^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Teraz to samo... ale trochę sprytniej, wykorzystamy trzy funkcje zaprogramowane w MathCadzie

Funkcja `E1_Gauss` - *Eliminacja Gaussa, wykonuje jedną eliminację począwszy od równania o numerze "n" w dół*
`B` - *macierz prostokątna utworzona z macierzy* `A` *z dołączonym prawostronnie wektorem* `b` *układu równań* `A*x=b`
`B=[A,b]`, `n` - *numer równania od którego rozpoczyna się eliminacja*

```
E1_Gauss(B, n) := | N ← cols(B)
                  | D ← B[n,n]
                  | for j ∈ n .. N
                  |    B[n,j] ← B[n,j] / D
                  | return B if n + 1 ≥ N
                  | for i ∈ n + 1 .. N − 1
                  |    | a ← B[i,n]
                  |    | for j ∈ n .. N
                  |    |    B[i,j] ← B[i,j] − B[n,j]·a
                  | B
```

Funkcja `B_subst` *- Podstawienie "wstecz", rozwiazuje układ równań z macierzą prostokątną* `U`, *otrzymaną po eliminacji Gaussa.* `x` *-wektor niewiadomych,* `U` *- macierz prostokątna po eliminacji Gaussa z jedynkami na głównej przekatnej*

```
B_subst(U) := | N ← rows(U)
              | for  i ∈ N − 1 ..  1
              |
              |                             N
              |   x_i ← U_(i, N+1) −        Σ      (x_j U_(i, j))   if  i < N
              |                        j = i+1
              |
              | x
```

$$B\_subst(U) := \begin{array}{|l} N \leftarrow rows(U) \\ \text{for } i \in N-1 \,..\, 1 \\ \quad x_i \leftarrow U_{i,N+1} - \sum_{j=i+1}^{N} \left(x_j U_{i,j}\right) \quad \text{if } i < N \\ x \end{array}$$

Funkcja `EL_Gauss` *- wykonuje eliminację Gaussa w macierzy prostokątnej* `B=[A,b]` *utworzonej z macierzy* `A` *oraz wektora* `b` *układu równań* `A*x=b`

$$El\_Gauss(B) := \begin{array}{|l} N \leftarrow rows(B) \\ \text{for } i \in 1 \,..\, N \\ \quad \begin{array}{|l} D \leftarrow B_{i,i} \\ \text{for } k \in i \,..\, N+1 \\ \quad B_{i,k} \leftarrow \dfrac{B_{i,k}}{D} \\ \text{return } B \text{ if } i = N \\ \text{for } j \in i+1 \,..\, N \\ \quad \begin{array}{|l} a \leftarrow B_{j,i} \\ \text{for } k \in i \,..\, N+1 \\ \quad B_{j,k} \leftarrow B_{j,k} - B_{i,k} \cdot a \end{array} \end{array} \\ B \end{array}$$

Dane początkowe:

$$A0 = \begin{pmatrix} 10.000 & -1.000 & 2.000 & 1.000 & 0.000 \\ 0.000 & 12.000 & 2.000 & 1.000 & 0.000 \\ 2.000 & 1.000 & 17.000 & 0.000 & 1.000 \\ 0.000 & 4.000 & -3.000 & 18.000 & 0.000 \\ 2.000 & 1.000 & 1.000 & 0.000 & 13.000 \end{pmatrix} \qquad b0 = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 2.000 \\ 3.000 \\ 4.000 \\ 5.000 \end{pmatrix}$$

$B0 := A0$

$i := 1 .. N \quad B0_{i,N+1} := b0_i$ *- macierz* B *powstaje z macierzy* A0 *do której doklejamy z prawej strony wektor* b

$$B0 = \begin{pmatrix} 10.000 & -1.000 & 2.000 & 1.000 & 0.000 & 1.000 \\ 0.000 & 12.000 & 2.000 & 1.000 & 0.000 & 2.000 \\ 2.000 & 1.000 & 17.000 & 0.000 & 1.000 & 3.000 \\ 0.000 & 4.000 & -3.000 & 18.000 & 0.000 & 4.000 \\ 2.000 & 1.000 & 1.000 & 0.000 & 13.000 & 5.000 \end{pmatrix}$$

Niestety (to tajemnica MathCada) nie można tu zastosować pętli: `i:=1.. N E1_Gauss(B,i),` *która by jeszcze bardziej uprościła obliczenia, stosujemy więc kolejne eliminacje zmieniając numery eliminowanych równań "ręcznie"*

$B := E1\_Gauss(B0, 1)$

$$B = \begin{pmatrix} 1.000 & -0.100 & 0.200 & 0.100 & 0.000 & 0.100 \\ 0.000 & 12.000 & 2.000 & 1.000 & 0.000 & 2.000 \\ 0.000 & 1.200 & 16.600 & -0.200 & 1.000 & 2.800 \\ 0.000 & 4.000 & -3.000 & 18.000 & 0.000 & 4.000 \\ 0.000 & 1.200 & 0.600 & -0.200 & 13.000 & 4.800 \end{pmatrix}$$

$B := E1\_Gauss(B, 2)$

$$B = \begin{pmatrix} 1.000 & -0.100 & 0.200 & 0.100 & 0.000 & 0.100 \\ 0.000 & 1.000 & 0.167 & 0.083 & 0.000 & 0.167 \\ 0.000 & 0.000 & 16.400 & -0.300 & 1.000 & 2.600 \\ 0.000 & 0.000 & -3.667 & 17.667 & 0.000 & 3.333 \\ 0.000 & 0.000 & 0.400 & -0.300 & 13.000 & 4.600 \end{pmatrix}$$

$B := E1\_Gauss(B, 3)$

$$B = \begin{pmatrix} 1.000 & -0.100 & 0.200 & 0.100 & 0.000 & 0.100 \\ 0.000 & 1.000 & 0.167 & 0.083 & 0.000 & 0.167 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & -0.018 & 0.061 & 0.159 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 17.600 & 0.224 & 3.915 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & -0.293 & 12.976 & 4.537 \end{pmatrix}$$

$B := \mathrm{E1\_Gauss}(B, 4)$

$$B = \begin{pmatrix} 1.000 & -0.100 & 0.200 & 0.100 & 0.000 & 0.100 \\ 0.000 & 1.000 & 0.167 & 0.083 & 0.000 & 0.167 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & -0.018 & 0.061 & 0.159 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.013 & 0.222 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 12.979 & 4.602 \end{pmatrix}$$

$B := \mathrm{E1\_Gauss}(B, 5)$

$$B = \begin{pmatrix} 1.000 & -0.100 & 0.200 & 0.100 & 0.000 & 0.100 \\ 0.000 & 1.000 & 0.167 & 0.083 & 0.000 & 0.167 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & -0.018 & 0.061 & 0.159 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.013 & 0.222 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.355 \end{pmatrix}$$

- ostateczna postać macierzy B po eliminacji

Na koniec, najbardziej elegancka metoda, wykorzystanie funkcji El_Gauss:

$B1 := \mathrm{El\_Gauss}(B0)$

$$B1 = \begin{pmatrix} 1.000 & -0.100 & 0.200 & 0.100 & 0.000 & 0.100 \\ 0.000 & 1.000 & 0.167 & 0.083 & 0.000 & 0.167 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & -0.018 & 0.061 & 0.159 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.013 & 0.222 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.355 \end{pmatrix}$$

- ostateczna postać macierzy B1 po eliminacji

$x1 := \mathrm{B\_subst}(B1)$

$$x1 = \begin{pmatrix} 0.063 \\ 0.125 \\ 0.141 \\ 0.218 \\ 0.355 \end{pmatrix}$$

- otrzymaliśmy oczywiście ten sam wynik, który poprzednio został uzyskany innymi metodami

Iteracja Gaussa

$x_N := 0 \qquad \Delta_N := 0$

$n := 1$ *- numer iteracji*

$x0 := x$

$i := 2 .. N \qquad SL_i := \sum_{k=1}^{i-1} \left(A0_{i,k} \cdot x_k\right) \qquad SL_1 := 0$ *- suma "lewostronna"*

$i := 1 .. N-1 \qquad SP_i := \sum_{k=i+1}^{N} \left(A0_{i,k} \cdot x_k\right) \qquad SP_N := 0$ *- suma "prawostronna"*

$i := 1 .. N$

$$x_i := \frac{b0_i - SL_i - SP_i}{A0_{i,i}} \qquad x = \begin{pmatrix} 0.063 \\ 0.125 \\ 0.162 \\ 0.218 \\ 0.355 \end{pmatrix}$$

$\Delta_n := \max(|x - x0|)$ *- błąd iteracji*

$\Delta_n = 0.355$

$n := 2$ *- numer iteracji*

$x0 := x$

$i := 2 .. N \qquad SL_i := \sum_{k=1}^{i-1} \left(A0_{i,k} \cdot x_k\right) \qquad SL_1 := 0$

$i := 1 .. N-1 \qquad SP_i := \sum_{k=i+1}^{N} \left(A0_{i,k} \cdot x_k\right) \qquad SP_N := 0$

$i := 1 .. N$

$$x_i := \frac{b0_i - SL_i - SP_i}{A0_{i,i}} \qquad x = \begin{pmatrix} 0.058 \\ 0.122 \\ 0.141 \\ 0.221 \\ 0.353 \end{pmatrix}$$

$\Delta_n := \max\left(\left|x - x0\right|\right)$

$\Delta_n = 0.022$

$n := 3$ *- numer iteracji*

$x0 := x$

$i := 2 .. N \qquad SL_i := \sum_{k=1}^{i-1} \left(A0_{i,k} \cdot x_k\right) \qquad SL_1 := 0$

$i := 1 .. N-1 \qquad SP_i := \sum_{k=i+1}^{N} \left(A0_{i,k} \cdot x_k\right) \qquad SP_N := 0$

$i := 1 .. N$

$$x_i := \frac{b0_i - SL_i - SP_i}{A0_{i,i}} \qquad x = \begin{pmatrix} 0.062 \\ 0.125 \\ 0.142 \\ 0.219 \\ 0.355 \end{pmatrix}$$

$\Delta_n := \max\left(\left|x - x0\right|\right)$

$\Delta_n = 0.006$

$n := 4$ *- numer iteracji*

$x0 := x$

$i := 2 .. N \qquad SL_i := \sum_{k=1}^{i-1} \left(A0_{i,k} \cdot x_k\right) \qquad SL_1 := 0$

$i := 1 .. N-1 \qquad SP_i := \sum_{k=i+1}^{N} \left(A0_{i,k} \cdot x_k\right) \qquad SP_N := 0$

$i := 1 .. N$

$$x_i := \frac{b0_i - SL_i - SP_i}{A0_{i,i}} \qquad x = \begin{pmatrix} 0.062 \\ 0.125 \\ 0.141 \\ 0.218 \\ 0.355 \end{pmatrix}$$

$\Delta_n := \max(|x - x0|)$

$\Delta_n = 0.001$

$n := 5$ *- numer iteracji*

$x0 := x$

$i := 2 .. N \qquad SL_i := \sum_{k=1}^{i-1} \left(A0_{i,k} \cdot x_k\right) \qquad SL_1 := 0$

$i := 1 .. N-1 \qquad SP_i := \sum_{k=i+1}^{N} \left(A0_{i,k} \cdot x_k\right) \qquad SP_N := 0$

$i := 1 .. N$

$$x_i := \frac{b0_i - SL_i - SP_i}{A0_{i,i}} \qquad x = \begin{pmatrix} 0.062 \\ 0.125 \\ 0.141 \\ 0.218 \\ 0.355 \end{pmatrix}$$

$\Delta_n := \max\left(\left|x - x0\right|\right)$

$\Delta_n = 0.000$

$n := 6$ *- numer iteracji*

$x0 := x$

$i := 2 .. N \qquad SL_i := \sum_{k=1}^{i-1} \left(A0_{i,k} \cdot x_k\right) \qquad SL_1 := 0$

$i := 1 .. N-1 \qquad SP_i := \sum_{k=i+1}^{N} \left(A0_{i,k} \cdot x_k\right) \qquad SP_N := 0$

$i := 1 .. N$

$$x_i := \frac{b0_i - SL_i - SP_i}{A0_{i,i}} \qquad x = \begin{pmatrix} 0.063 \\ 0.125 \\ 0.141 \\ 0.218 \\ 0.355 \end{pmatrix}$$

$\Delta_n := \max\left(\left|x - x0\right|\right)$

$\Delta_n = 0.000$

Wykres zmiany błędu iteracji w skali logarytmicznej

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0.35515 \\ 0.02189 \\ 0.00604 \\ 0.00134 \\ 0.00031 \\ 0.00008 \end{pmatrix}$$