

Rozwiązanie układu równań liniowych metodą iteracyjną Kaczmarza

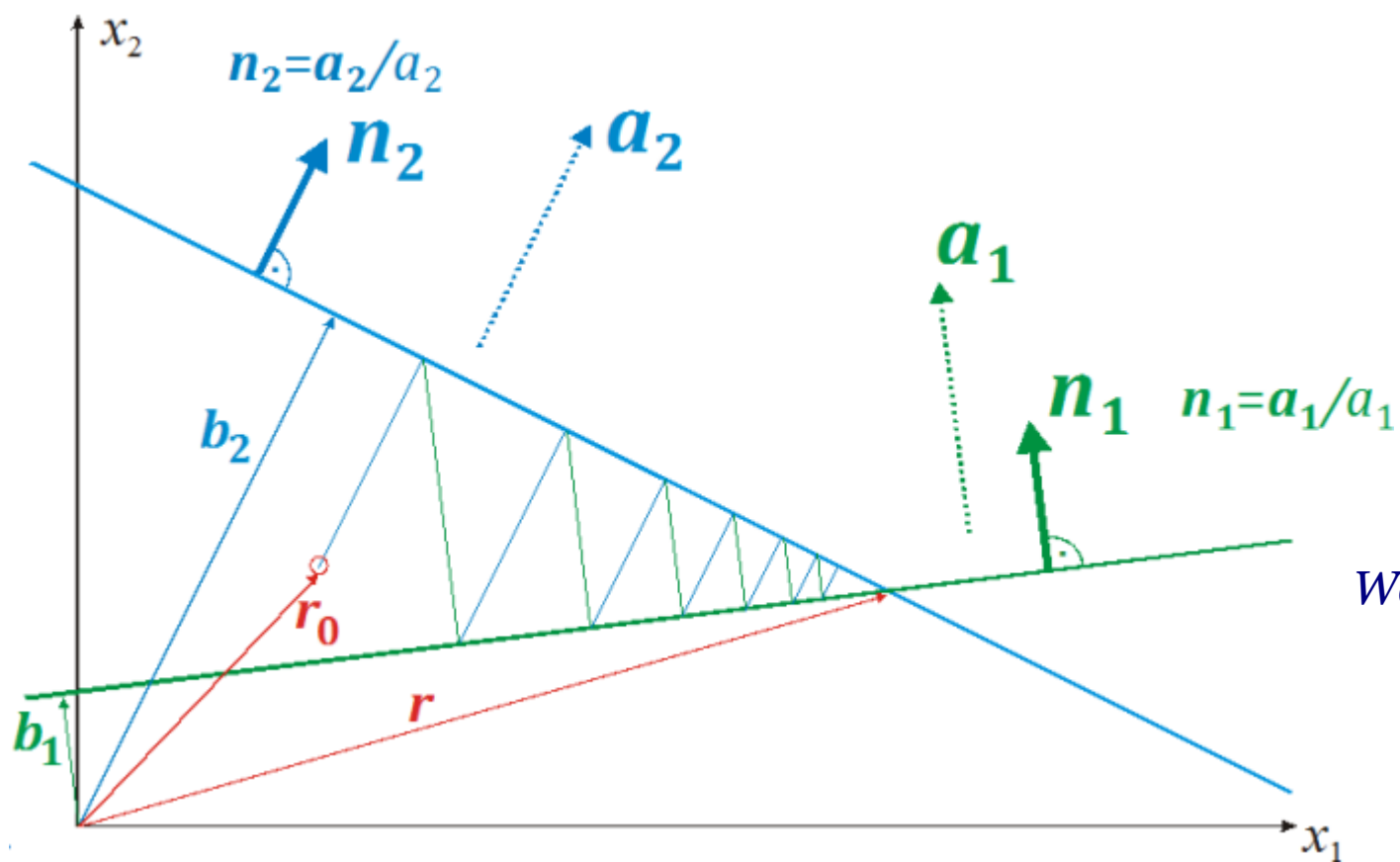
ORIGIN := 1 - Ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy

N := 5

$$A := \begin{pmatrix} 11 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 15 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 16 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 17 & -1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 & 10 \end{pmatrix} \quad |A| = 330311$$

Generowanie wektora "prawy strony" dla rozwiązania jednostkowego

$$i := 1 .. N \quad b_i := \sum_{j=1}^N A_{i,j} \quad b = \begin{pmatrix} 15.000 \\ 26.000 \\ 25.000 \\ 27.000 \\ 22.000 \end{pmatrix}$$



Wektorowe równania prostych

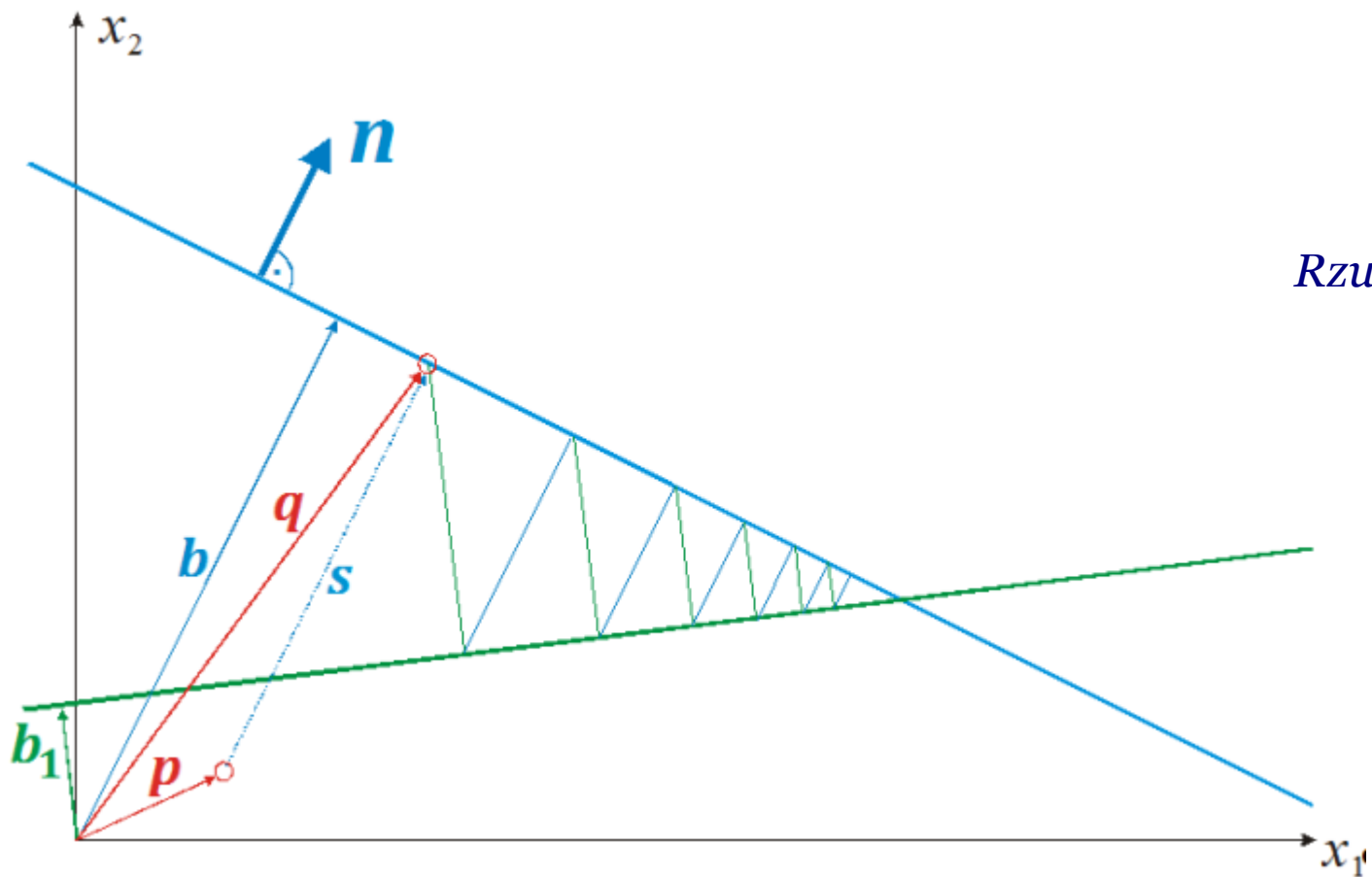
$$n_{11}x_1 + n_{12}x_2 = b_1$$

$$n_{21}x_1 + n_{22}x_2 = b_2$$

Układ równań liniowych

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2$$



Rzutowanie punktu na prostą

$$q = p + \frac{b - a \cdot p}{a^2} a$$

Iteracja Kaczmarza

$$x_i := \theta$$

$$\Delta_N := \theta$$

$$a2_i := \sum_{j=1}^N (A_{i,j})^2$$

$$a2 = \begin{pmatrix} 139.000 \\ 268.000 \\ 279.000 \\ 335.000 \\ 154.000 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{a2} = \begin{pmatrix} 11.790 \\ 16.371 \\ 16.703 \\ 18.303 \\ 12.410 \end{pmatrix}$$

Iteracja 1

$n := 1$ - numer równania

$$x_i := x_i + \frac{b_n - \sum_{j=1}^N (A_{n,j} \cdot x_j)}{a_{2n}} \cdot A_{n,i}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.187 \\ -0.028 \\ 0.041 \\ 0.025 \\ 0.012 \end{pmatrix}$$

$n := 2$ - numer równania

$$x_i := x_i + \frac{b_n - \sum_{j=1}^N (A_{n,j} \cdot x_j)}{a_{2n}} \cdot A_{n,i}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.280 \\ 1.362 \\ 0.100 \\ 0.095 \\ 0.025 \end{pmatrix}$$

$n := 3$ - numer równania

$$x_i := x_i + \frac{b_n - \sum_{j=1}^N (A_{n,j} \cdot x_j)}{a_{2n}} \cdot A_{n,i}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.343 \\ 1.552 \\ 1.079 \\ 0.110 \\ 0.035 \end{pmatrix}$$

$n := 4$ - numer równania

$$x_i := x_i + \frac{b_n - \sum_{j=1}^N (A_{n,j} \cdot x_j)}{a_{2n}} \cdot A_{n,i}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.408 \\ 1.680 \\ 1.231 \\ 0.591 \\ 0.031 \end{pmatrix}$$

$n := 5$ - numer równania

$$x_i := x_i + \frac{b_n - \sum_{j=1}^N (A_{n,j} \cdot x_j)}{a_{2n}} \cdot A_{n,i}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.575 \\ 1.717 \\ 1.453 \\ 0.619 \\ 0.312 \end{pmatrix}$$

```

KaczmarzItr(A, b, a2, x) := | N ← rows(A)
                             | for n ∈ 1.. N
                             |   An ← submatrix(A, n, n, 1, N)
                             |   x ← x +  $\frac{b_n - An \cdot x}{a2_n} \cdot An^T$ 
                             | x

```

$$x_i := 0 \quad x = \begin{pmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{pmatrix} \quad x1_i := 1$$

$x := \text{KaczmarzItr}(A, b, a2, x)$

$$x = \begin{pmatrix} 1.460 \\ 1.335 \\ 1.306 \\ 0.860 \\ 0.613 \end{pmatrix}$$

```

Iteruj(A, b, a2, m) := | n ← rows(b)
                       | for i ∈ 1.. n
                       |   xi ← 0
                       |   for i ∈ 1.. m
                       |     x ← KaczmarzItr(A, b, a2, x)
                       | x

```

Iteracja -----> $\underline{m} := 1$

$$\Delta_n := \max(x^2 - x1) \cdot 100$$

$$x_n := \text{KaczmarzItr}(A, b, a2, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.178 \\ 1.157 \\ 1.279 \\ 0.907 \\ 0.755 \end{pmatrix}$$

Iteracja -----> $n := 2$

$$\Delta_n := \max(x^2 - x1) \cdot 100$$

$$x_n := \text{KaczmarzItr}(A, b, a2, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.072 \\ 1.050 \\ 1.200 \\ 0.954 \\ 0.851 \end{pmatrix}$$

Iteracja -----> $n := 3$

$$\Delta_n := \max(x^2 - x1) \cdot 100$$

$$x_n := \text{KaczmarzItr}(A, b, a2, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.024 \\ 1.004 \\ 1.127 \\ 0.981 \\ 0.916 \end{pmatrix}$$

Iteracja -----> $n := 4$

$$\Delta_n := \max(x^2 - x1) \cdot 100$$

$$\underline{x} := \text{KaczmarzItr}(A, b, a2, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.004 \\ 0.988 \\ 1.074 \\ 0.995 \\ 0.956 \end{pmatrix}$$

Iteracja -----> $\underline{n} := 5$

$$\Delta_n := \max(x^2 - x1) \cdot 100$$

$$\underline{x} := \text{KaczmarzItr}(A, b, a2, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 0.997 \\ 0.986 \\ 1.040 \\ 1.000 \\ 0.979 \end{pmatrix}$$

Iteracja -----> $\underline{n} := 6$

$$\Delta_n := \max(x^2 - x1) \cdot 100$$

$$\underline{x} := \text{KaczmarzItr}(A, b, a2, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 0.995 \\ 0.989 \\ 1.019 \\ 1.002 \\ 0.991 \end{pmatrix}$$

Iteracja -----> $\underline{n} := 7$

$$\Delta_n := \max(x^2 - x1) \cdot 100$$

$$\underline{x} := \text{KaczmarzItr}(A, b, a2, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 0.996 \\ 0.992 \\ 1.009 \\ 1.002 \\ 0.997 \end{pmatrix}$$

$$\text{Iteracja} \text{ -----} \rightarrow \underline{n} := 8$$

$$\Delta_n := \max(x^2 - x1) \cdot 100$$

$$\underline{x} := \text{KaczmarzItr}(A, b, a2, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 0.997 \\ 0.995 \\ 1.003 \\ 1.001 \\ 1.000 \end{pmatrix}$$

$$\text{Iteracja} \text{ -----} \rightarrow \underline{n} := 9$$

$$\Delta_n := \max(x^2 - x1) \cdot 100$$

$$\underline{x} := \text{KaczmarzItr}(A, b, a2, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 0.998 \\ 0.997 \\ 1.001 \\ 1.001 \\ 1.000 \end{pmatrix}$$

$$\text{Iteracja} \text{ -----} \rightarrow \underline{n} := 10$$

$$\Delta_n := \max(x^2 - x1) \cdot 100$$

$$\underline{x} := \text{KaczmarzItr}(A, b, a2, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 0.999 \\ 0.999 \\ 1.000 \\ 1.001 \\ 1.001 \end{pmatrix}$$

$$\text{Iteracja} \text{ -----} \rightarrow \underline{n} := 11$$

$$\Delta_n := \max(x^2 - x1) \cdot 100$$

$$\underline{x} := \text{KaczmarzItr}(A, b, a2, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 0.999 \\ 0.999 \\ 1.000 \\ 1.000 \\ 1.001 \end{pmatrix}$$

$$\text{Iteracja} \text{ -----} \rightarrow \underline{n} := 12$$

$$\Delta_n := \max(x^2 - x1) \cdot 100$$

$$\underline{x} := \text{KaczmarzItr}(A, b, a2, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \end{pmatrix}$$

$$\text{Iteracja} \text{ -----} \rightarrow \underline{n} := 13$$

$$\Delta_n := \max(x^2 - x1) \cdot 100$$

$$\underline{x} := \text{KaczmarzItr}(A, b, a2, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \end{pmatrix}$$

Iteracja -----> $\underline{n} := 14$

$$\Delta_n := \max(x^2 - x1) \cdot 100$$

$$\underline{x} := \text{KaczmarzItr}(A, b, a2, x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \end{pmatrix}$$

Iteracja -----> $\underline{n} := 15$

$$\Delta_n := \max(x^2 - x1) \cdot 100$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0.999913 \\ 0.999974 \\ 0.999593 \\ 1.000066 \\ 1.000275 \end{pmatrix}$$

$$\Delta 1 := 0.5 \cdot \begin{pmatrix} 304.443 \\ 88.507 \\ 115.958 \\ 48.959 \\ 45.080 \\ 24.558 \\ 18.688 \\ 11.422 \\ 8.050 \\ 5.160 \\ 3.523 \\ 2.306 \\ 1.552 \\ 1.025 \\ 0.686 \end{pmatrix}$$

Zbieżność iteracji Kaczmarza - - - - - i iteracji Gaussa - - - - -

$$m := 16 \quad x_2 := \text{Iteruj}(A, b, a_2, m) \quad \Delta_m := \max(x_2^2 - x_1) \cdot 100$$

$i := 1..m$

