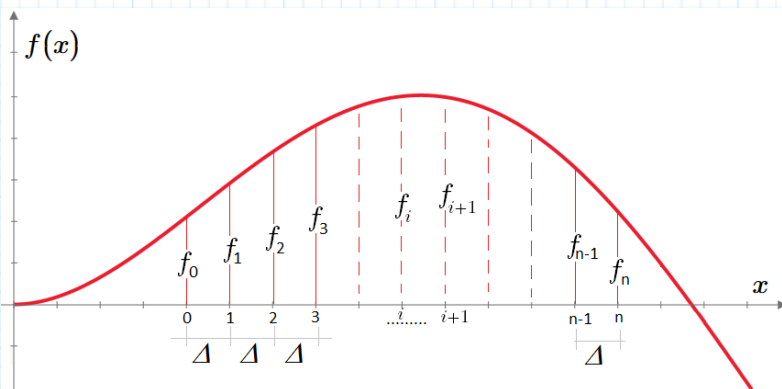


Kwadratura Hermite'a korzysta z aproksymacji funkcji $f(x)$ wielomianem 3 stopnia. W obszarze 1 przedziału o szerokości Δ , wzór tej kwadratury ma postać:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx A \Delta [f_i + f_{i+1} + \alpha \Delta (f'_i - f'_{i+1})]$$

- **Należy obliczyć** wartości współczynników a i b występujące w tym wzorze
- Podać postać tego wzoru dla n przedziałów, zakładając $n \gg 1$.
- Czy wartość n powinna spełniać jakiś warunek aby zastosowanie tego wzoru było możliwe?



Dla wygody i uproszczenia obliczeń zakładamy lokalny układ współrzędnych o początku w centralnym punkcie przedziału całkowania. Współrzędne lokalne punktów i oraz $i+1$ są równe: $-\delta$ i $+\delta$, gdzie $\delta = \Delta/2$

Przyjmujemy postać funkcji aproksymującej: $g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ (1)

Obliczamy pochodną funkcji $g(x)$: $g'(x) = c_1 + 2 c_2 x + 3 c_3 x^2$ (2)

Całkując funkcję $g(x)$ w przedziale x_i, x_{i+1} otrzymamy:

$$C = \int_{-\delta}^{\delta} g(x) dx = \left(c_0 \cdot 2 \delta + c_2 \cdot \frac{2}{3} \delta^3 \right) = 2 \delta \left(c_0 + c_2 \frac{\delta^2}{3} \right) \quad (3)$$

Dla punktów i oraz $i+1$ układamy równania zgodności wartości funkcji: $f(x_i) = g(x_i)$ i pochodnych $f'(x_i) = g'(x_i)$

$$\begin{aligned} a) \quad & g(x_i) = c_0 - c_1 \delta + c_2 \delta^2 - c_3 \delta^3 = f_i \\ b) \quad & g(x_{i+1}) = c_0 + c_1 \delta + c_2 \delta^2 + c_3 \delta^3 = f_{i+1} \\ c) \quad & g'(x_i) = c_1 - 2 c_2 \delta + 3 c_3 \delta^2 = f'_i \\ d) \quad & g'(x_{i+1}) = c_1 + 2 c_2 \delta + 3 c_3 \delta^2 = f'_{i+1} \end{aligned} \quad (4)$$

Dodając do siebie równanie 4a i 4b oraz odejmując 4c od 4d otrzymamy układ równań potrzebny do wyznaczenia c_0 i c_2

$$2 c_0 + 2 c_2 \delta^2 = f_i + f_{i+1} \quad 4 c_2 \delta = f'_{i+1} - f'_i \quad (5)$$

Podstawiając te wyniki do równania (3):

$$C = 2 \delta \left(c_0 + c_2 \frac{\delta^2}{3} \right) = \frac{\Delta}{2} (f_i + f_{i+1}) + \frac{\Delta^2}{12} (f'_i - f'_{i+1}) = \frac{\Delta}{2} \left[f_i + f_{i+1} + \frac{\Delta}{6} (f'_i - f'_{i+1}) \right] \quad \text{czyli:} \quad A = \frac{1}{2} \quad \alpha = \frac{1}{6}$$

Dla liczby przedziałów $n > 1$ mamy:

$$C = \frac{\Delta}{2} \left[(f_0 + f_1) + (f_1 + f_2) + (f_2 + f_3) + (f_3 + f_4) + \dots + (f_{n-1} + f_n) \right] + \frac{\Delta}{12} \left[(f'_0 - f'_1) + (f'_1 - f'_2) + (f'_2 - f'_3) + (f'_3 - f'_4) + \dots + (f'_{n-1} - f'_n) \right]$$

Sumując powtarzające się wartości funkcji otrzymamy wygodną do obliczeń formę tego wzoru:

$$C = \Delta \left(\frac{f_0 + f_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right) + \frac{\Delta^2}{12} (f'_0 - f'_n) = \frac{\Delta}{2} \left[f_0 + f_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + \frac{\Delta}{6} (f'_0 - f'_n) \right]$$

Jak widać jest on bardzo podobny do wzoru trapezów, a redukujące się pochodne na granicach przedziałów skutkują niskim kosztem obliczeń, gdyż musimy znać tylko 2 pochodne: na początku i na końcu obszaru całkowania. Dokładność tej kwadratury jest dużo większa niż wzoru trapezów. Błąd proporcjonalny jest do 4 potęgi Δ :

$$\varepsilon \leq (x_n - x_0) \frac{\Delta^4}{720} \max(|f^{IV}|)$$

Uwaga! "n" może być dowolną liczbą naturalną! Oczywiście dokładność zależy od szerokości przedziału Δ , więc "n" powinno być dostatecznie dużą liczbą, bo $\Delta = (x_n - x_0)/n$.