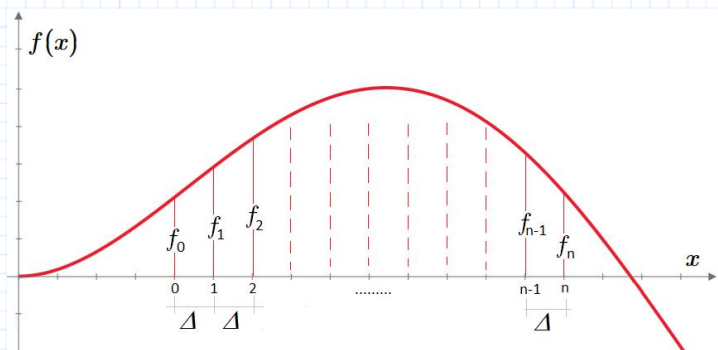


Kwadratura Simpsona korzysta z aproksymacji funkcji $f(x)$ wielomianem 2 stopnia.
W obszarze 2 przedziałów o szerokości Δ wzór tej kwadratury ma postać:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{\Delta}{3} (f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$$

- **Należy wyprowadzić ten wzór!**
- Podać postać tego wzoru dla n przedziałów, zakładając $n \gg 2$.
- Jaki warunek powinna spełniać wartość n aby zastosowanie tego wzoru było możliwe?



Dla wygody i uproszczenia obliczeń zakładamy lokalny układ współrzędnych o początku w centralnym punkcie (x_i), gdzie współrzędne lokalne punktów $i-1$, i , $i+1$ są równe: $-\Delta$, 0 , $+\Delta$.

Przyjmujemy postać funkcji aproksymującej: $g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$

Dla punktów $i-1$, i , $i+1$ (lub $0, 1, 2$ gdy $i=1$) układamy równania zgodności wartości funkcji: $f(x_i) = g(x_i)$.

$$g(x_0) = c_0 - c_1\Delta + c_2\Delta^2 = f_0$$

$$g(x_1) = c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = f_1 \quad \text{Po rozwiązaniu tych równań mamy:} \quad c_0 = f_1 \quad c_1 = \frac{1}{2\Delta} (f_2 - f_0) \quad c_2 = \frac{1}{2\Delta^2} (f_0 - 2f_1 + f_2)$$

$$g(x_2) = c_0 + c_1\Delta + c_2\Delta^2 = f_2$$

Całkując funkcję $g(x)$ w przedziale x_0, x_1 otrzymamy: $C = \int_{-\Delta}^{\Delta} g(x) dx = \left(c_0 \cdot 2\Delta + c_2 \cdot \frac{2}{3} \Delta^3 \right) = \frac{\Delta}{3} (f_0 + 4f_1 + f_2)$ czyli:

Dla liczby przedziałów $n > 2$ mamy:

Uwaga! n musi być liczbą parzystą!

$$C = \frac{\Delta}{3} \left[(f_0 + 4f_1 + f_2) + (f_2 + 4f_3 + f_4) + (f_4 + 4f_5 + f_6) \dots (f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n) \right]$$

Sumując wartości funkcji o parzystych indeksach otrzymamy wygodną do obliczeń formę tego wzoru:

$$C = \frac{\Delta}{3} \left[f_0 + f_n + 4 \left(\sum_{i=1,3,\dots,n-1} f_i \right) + 2 \left(\sum_{j=2,4,\dots,n-2} f_j \right) \right]$$

ORIGIN := 0

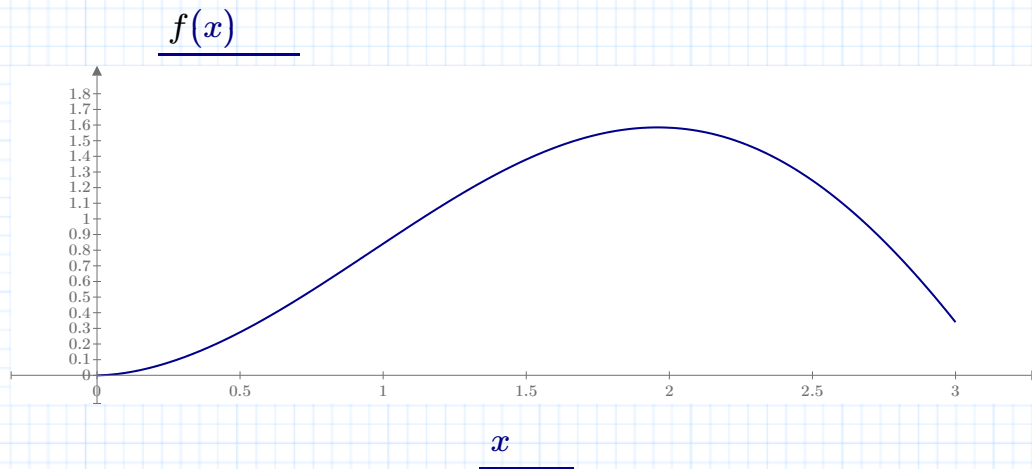
$$a := 0$$

$$b := 2$$

$$n := 10$$

$$\Delta := \frac{b-a}{n} = 0.2$$

$$f(x) := x^{0.8} \cdot \sin(x) \quad i := 0..n \quad y_i := f(a + i \cdot \Delta) \quad C_A := \int_a^b f(x) dx = 1.64696 \quad \text{<----- wartość obliczona analitycznie}$$



$$y = \begin{bmatrix} 0.00000 \\ 0.05482 \\ 0.18710 \\ 0.37523 \\ 0.60008 \\ 0.84147 \\ 1.07840 \\ 1.28984 \\ 1.45583 \\ 1.55851 \\ 1.58318 \end{bmatrix}$$

Wzór Simpsona ---->

$$C_S = \frac{\Delta}{3} \left[f_0 + f_n + 4 \left(\sum_{i=1,3..n-1} f_i \right) + 2 \left(\sum_{j=2,4..n-2} f_j \right) \right]$$

$$i := 1, 3..n-1$$

$$j := 2, 4..n-2$$

$$C_S := \frac{\Delta}{3} \left(y_0 + y_n + 4 \sum_i y_i + 2 \sum_j y_j \right) = 1.64703$$

błąd kwadratury Simpsona ---->

$$\varepsilon := 1 - \frac{C_S}{C_A} = -0.00004471$$