Statyka kratownicy o 3 różnych przekrojach prętów, obciążonej siłami, temperaturą i ciężarem własnym

$ORIGIN := 1$ *- ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy*

$E := 70GPa$ *- moduł Younga aluminium*

$\alpha t := 2.3 \cdot 10^{-5}$ *- wspólczynnik rozszerzalności cieplnej*

$\rho := 2700 \frac{kg}{m^3}$ *- gęstość materiału*

$\gamma := \rho \cdot g$ *- ciężar właściwy*

Parametry przekrojów kratownicy (rury kwadratowe)

$a1 := 7cm$ $\quad a2 := 6cm$ $\quad a3 := 5cm$

$g1 := 5mm$ $\quad g2 := 5mm$ $\quad g3 := 4mm$

$A1 := 4 \cdot g1 \cdot (a1 - g1)$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 1...4* $\quad A1 = 13.000 \cdot cm^2$

$A2 := 4 \cdot g2 \cdot (a2 - g2)$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 5...7* $\quad A2 = 11.000 \cdot cm^2$

$A3 := 4 \cdot g3 \cdot (a3 - g3)$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 8...12* $\quad A3 = 7.360 \cdot cm^2$

$$Q := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 3 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Numery węzłów początkowych (Wp) i końcowych (Wk) elementów

$$Wp := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad Wk := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 3 \\ 7 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} A1 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A3 \\ A3 \\ A3 \\ A3 \\ A3 \end{pmatrix} \quad T := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 30 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Współrzędne węzłów

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \\ 7 \\ 12 \\ 17 \\ 14 \end{pmatrix} m \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3 \cdot 6}{7} \\ \frac{-7}{17} \\ 6 \\ \frac{5 \cdot 7}{10} - 1 \\ -1 \\ \frac{3}{17} - 1 \end{pmatrix} m$$

Parametry pomocnicze:

$Lss := 2$ *- Liczba stopni swobody węzła*

$Le := \text{rows}(Wp)$ *- Liczba elementów*

$Lw := \text{rows}(X)$ *- Liczba węzłów*

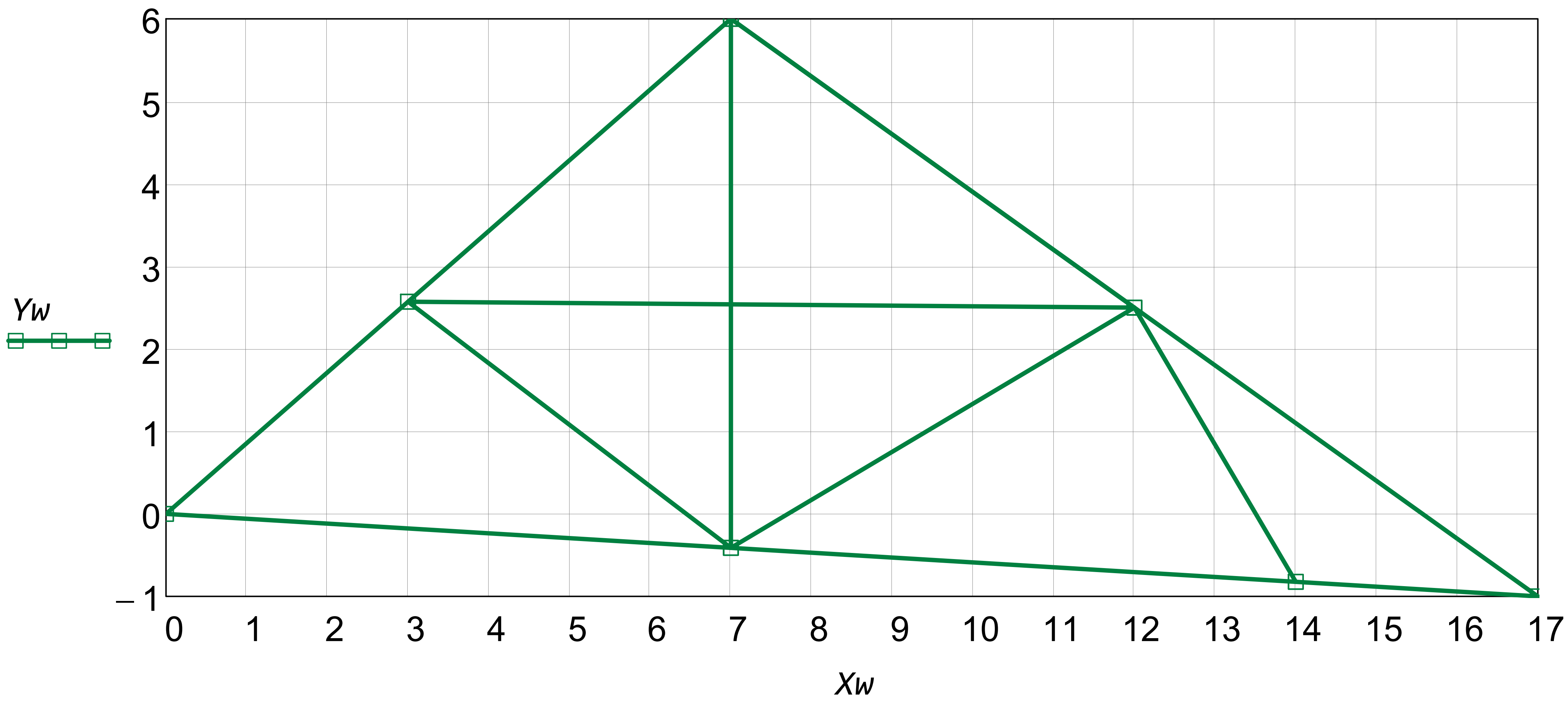
$Lr := Lss \cdot Lw$ *- Liczba równań* $\quad Lr = 14$

$Ko_{Lr,\,Lr} := 0$ *Deklaracja globalnej macierzy sztywności i wypełnienie jej zerami*

Pętla po wszystkich elementach kratownicy

$e := 1 .. \; Le$

Rysunek elementów kratownicy pozwala kontrolować poprawność wprowadzonych danych



Macierze sztywności elementów kratownicy

$$Lx_e := X_{(Wk_e)} - X_{(Wp_e)} \qquad Ly_e := Y_{(Wk_e)} - Y_{(Wp_e)} \qquad L_e := \sqrt{\left(Lx_e\right)^2 + \left(Ly_e\right)^2}$$

$$J_e := \frac{E \cdot A_e}{\left(L_e\right)^3} \cdot \begin{bmatrix} \left(Lx_e\right)^2 & Lx_e \cdot Ly_e \\ Lx_e \cdot Ly_e & \left(Ly_e\right)^2 \end{bmatrix}$$

$Lx =$ (m)

	1
1	3.000
2	4.000
3	5.000
4	5.000
5	7.000
6	7.000
7	-3.000
8	4.000
9	0.000
10	9.000
11	5.000
12	2.000

$Ly =$ (m)

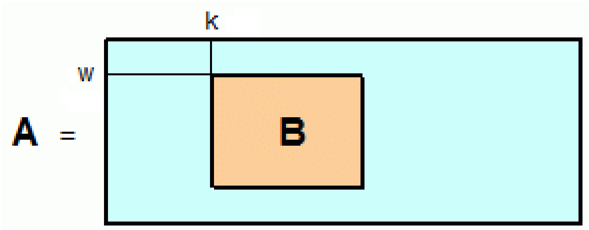
	1
1	2.571
2	3.429
3	-3.500
4	-3.500
5	-0.412
6	-0.412
7	0.176
8	-2.983
9	6.412
10	-0.071
11	2.912
12	-3.324

$L =$ (m)

	1
1	3.951
2	5.268
3	6.103
4	6.103
5	7.012
6	7.012
7	3.005
8	4.990
9	6.412
10	9.000
11	5.786
12	3.879

Funkcja LBM - Lokuj Blok Macierzy, używana przy agregacji macierzy sztywności i wektora obciążeń termicznych

LBM (A, B, w, k)
ZNACZENIE PARAMETRÓW:
A - nazwa macierzy
B - nazwa bloku
w - numer wiersza, od którego zostanie wprowadzony blok
k - numer kolumny, od której zostanie wprowadzony blok
UWAGA: Macierz B zostanie ulokowana w większej macierzy A, poczynając od elementu usytuowanego w wierszu o numerze "w" i kolumnie o numerze "k".



$$LBM(A, B, w, k) := \begin{array}{|l} \text{for } i \in 1 .. \ rows(B) \\ \quad \text{for } j \in 1 .. \ cols(B) \\ \quad\quad A_{w+i-1,\, k+j-1} \leftarrow B_{i,\, j} \\ A \end{array}$$

Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej

$n_e := Lss \cdot Wp_e - 1 \quad k_e := Lss \cdot Wk_e - 1$ *<--- numery stopni swobody węzłów początkowych (n_e) i końcowych (k_e)*

$$K := \sum_e \left(LBM\left(Ko, J_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, J_e, k_e, k_e\right) - LBM\left(Ko, J_e, n_e, k_e\right) - LBM\left(Ko, J_e, k_e, n_e\right) \right)$$

$K =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	24220	10736	-13277	-11380	-10943	644	0	0	0	0	0	0	0	0
2	10736	9792	-11380	-9754	644	-38	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-13277	-11380	35592	14921	-6635	4948	-9957	-8535	-5724	45	0	0	0	0
4	-11380	-9754	14921	20760	4948	-3690	-8535	-7316	45	-0	0	0	0	0
5	-10943	644	-6635	4948	35170	-2363	0	0	-6649	-3872	0	0	-10943	644
6	644	-38	4948	-3690	-2363	14056	0	-8035	-3872	-2255	0	0	644	-38
7	0	0	-9957	-8535	0	0	19964	1530	-10007	7005	0	0	0	0
8	0	0	-8535	-7316	0	-8035	1530	20254	7005	-4903	0	0	0	0
9	0	0	-5724	45	-6649	-3872	-10007	7005	35918	-16051	-10007	7005	-3531	5868
10	0	0	45	-0	-3872	-2255	7005	-4903	-16051	21813	7005	-4903	5868	-9751
11	0	0	0	0	0	0	0	0	-10007	7005	35541	-8507	-25534	1502
12	0	0	0	0	0	0	0	0	7005	-4903	-8507	4992	1502	-88
13	0	0	0	0	-10943	644	0	0	-3531	5868	-25534	1502	40008	-8014
14	0	0	0	0	644	-38	0	0	5868	-9751	1502	-88	-8014	9877

$\cdot \dfrac{kN}{m}$

$$\left| K \cdot \frac{m}{kN} \right| = -2.728 \times 10^{11}$$

Globalna macierz sztywności ***K*** *bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.* $|\mathbf{K}|=0$

Aby obliczyć wyznacznik macierzy, której elementy nie są liczbami bezwymiarowymi musimy macierz pomnożyć przez odwrotność jednostek aby doprowadzić elementy do postaci bezwymiarowej - to jest wymóg MatCada.

Zamiast zera wyznacznik może być "bardzo małą" liczbą ze względu na niedostateczną dokładność wyrazów macierzy sztywności.

Wektor sił węzłowych $pP_{Lr} := 0$

$pP_7 := 12kN \cdot sin(70deg)$ $pP_8 := -12kN \cdot cos(70deg)$

$pP_9 := -8kN \cdot sin(35deg)$ $pP_{10} := -8kN \cdot cos(35deg)$

$pP =$ (in kN)

	1
1	0.000
2	0.000
3	0.000
4	0.000
5	0.000
6	0.000
7	11.276
8	-4.104
9	-4.589
10	-6.553
11	0.000
12	0.000
13	0.000
14	0.000

$\cdot kN$

Wektory obciążeń termicznych elementów

$$t_e := \alpha t \cdot T_e \cdot \frac{E \cdot A_e}{L_e} \cdot \begin{pmatrix} Lx_e \\ Ly_e \end{pmatrix} \qquad pTo_{Lr} := 0$$

Agregacja wektora obciążeń termicznychobalny wektor obciążeń termicznych

$$pT := \sum_e \left(LBM\left(pTo, t_e, n_e, 1\right) - LBM\left(pTo, t_e, k_e, 1\right)\right)$$

Wektory obciążeń grawitacyjnych

$$q_e := \frac{A_e \cdot L_e \cdot \gamma}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad pGo_{Lr} := 0$$

Agregacja wektora obciążeń termicznychobalny wektor obciążeń termicznych

$$pG := \sum_e \left(LBM\left(pGo, q_e, n_e, 1\right) + LBM\left(pGo, q_e, k_e, 1\right)\right)$$

$$p0 := pP - pT + pG$$

p *- Wektor prawej strony układu równań*

$pG =$

	1
1	0.000
2	-0.170
3	0.000
4	-0.295
5	0.000
6	-0.372
7	0.000
8	-0.258
9	0.000
10	-0.392
11	0.000
12	-0.149
13	0.000

$\cdot kN$

$pT =$

	1
1	0.000
2	0.000
3	54.545
4	-14.451
5	-39.477
6	2.242
7	0.000
8	0.000
9	-15.068
10	12.208
11	0.000
12	0.000
13	0.000

$\cdot kN$

$pP =$

	1
1	0.000
2	0.000
3	0.000
4	0.000
5	0.000
6	0.000
7	11.276
8	-4.104
9	-4.589
10	-6.553
11	0.000
12	0.000

$\cdot kN$

13	0.000
14	-0.184

13	0.000
14	0.000

13	0.000
14	0.000

*Kopiowanie macierzy **K** przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$K0 := K$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$s := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$ *- globalne numery przemieszczeń więzów blokowanych na podporach*

$j := 1 .. \ rows(s) \qquad i := 1 .. \ Lr$

$K0_{s_j, i} := 0$ *zerowanie wierszy* $\qquad p0_{(s_j)} := 0$

$K0_{s_j, s_j} := 1 \dfrac{kN}{m}$ *wstawianie jedności na przekątną macierzy sztywności*

$K0 =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-13277	-11380	35592	14921	-6635	4948	-9957	-8535	-5724	45	0	0	0	0
4	-11380	-9754	14921	20760	4948	-3690	-8535	-7316	45	-0	0	0	0	0
5	-10943	644	-6635	4948	35170	-2363	0	0	-6649	-3872	0	0	-10943	644
6	644	-38	4948	-3690	-2363	14056	0	-8035	-3872	-2255	0	0	644	-38
7	0	0	-9957	-8535	0	0	19964	1530	-10007	7005	0	0	0	0
8	0	0	-8535	-7316	0	-8035	1530	20254	7005	-4903	0	0	0	0
9	0	0	-5724	45	-6649	-3872	-10007	7005	35918	-16051	-10007	7005	-3531	5868
10	0	0	45	-0	-3872	-2255	7005	-4903	-16051	21813	7005	-4903	5868	-9751
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
13	0	0	0	0	-10943	644	0	0	-3531	5868	-25534	1502	40008	-8014
14	0	0	0	0	644	-38	0	0	5868	-9751	1502	-88	-8014	9877

$\cdot \dfrac{kN}{m}$

$\left| K0 \cdot 1 \dfrac{m}{kN} \right| = 6.248131 \times 10^{41}$ *- wyznacznik macierzy **K** jest zawsze większy od zera,* $|\mathbf{K}| > 0$

Rozwiązanie układu równań:

$u := \mathrm{lsolve}(K0, p0)$

u - wektor przemieszczeń węzłowych

$\max(u) = 3.323 \cdot mm$

$\min(u) = -3.250 \cdot mm$

$u =$ (mm)

	1
1	-0.000
2	-0.000
3	-2.964
4	3.323
5	-0.389
6	0.566
7	1.370
8	-0.702
9	-0.660
10	-3.250
11	0.000
12	-0.000
13	-0.310
14	-3.059

$\cdot mm$

$p0 =$

	1
1	0.000
2	0.000
3	-54.545
4	14.156
5	39.477
6	-2.614
7	11.276
8	-4.362
9	10.479
10	-19.154
11	0.000
12	0.000
13	0.000
14	-0.184

$\cdot kN$

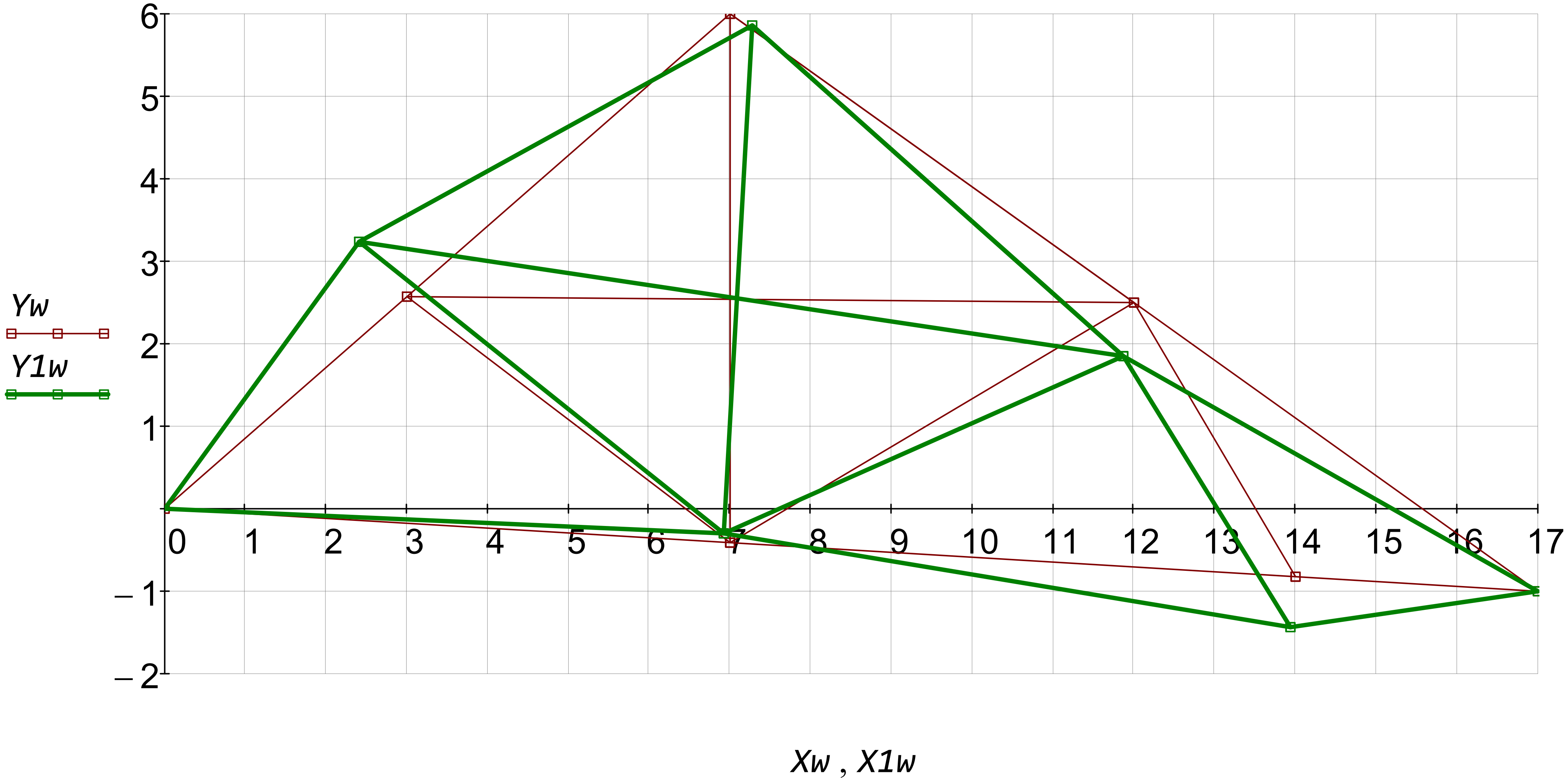
$K \cdot u =$

	1
1	6.155
2	1.042
3	-54.545
4	14.156
5	39.477
6	-2.614
7	11.276
8	-4.362
9	10.479
10	-19.154
11	-12.843
12	11.116
13	0.000
14	-0.184

$\cdot kN$

Rysunek przemieszczeń kratownicy pozwala kontrolować poprawność otrzymanych wyników

$skala := 200$



Obliczenie reakcji podpór

$$r := K \cdot u - pP + pT - pG$$

$$max(r) = 11.264 \cdot kN$$

$r =$

	1
1	6.155
2	1.212
3	0.000
4	0.000
5	0.000
6	0.000
7	0.000
8	0.000
9	0.000
10	0.000
11	-12.843
12	11.264
13	0.000
14	-0.000

$\cdot kN$

$$max(u) = 3.323 \cdot mm$$
$$min(u) = -3.250 \cdot mm$$

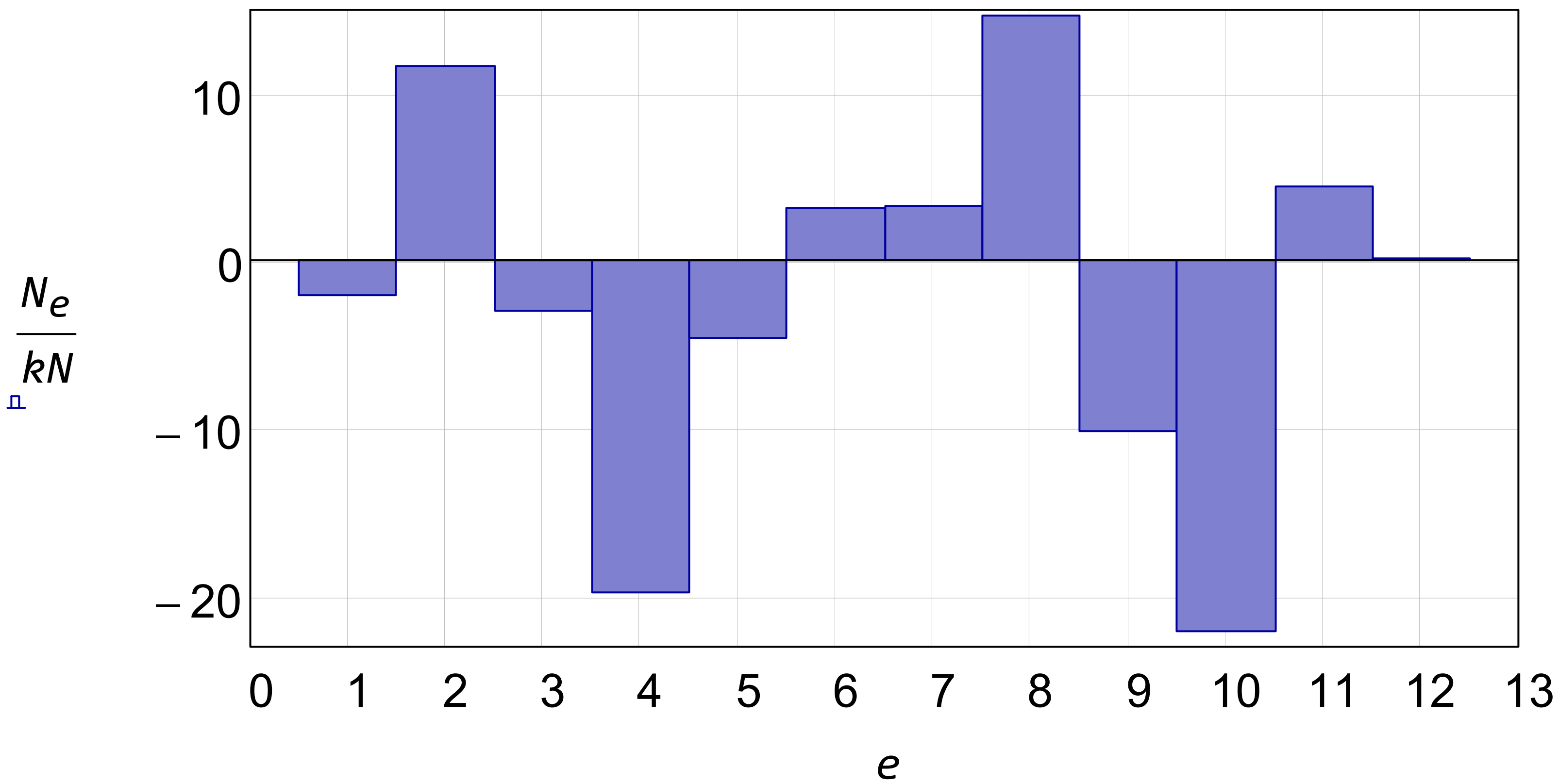
Obliczenie sił wewnętrznych

$$N_e := \frac{E \cdot A_e}{\left(L_e\right)^2} \cdot \left[\left(u_{2 \cdot Wk_e - 1} - u_{2 \cdot Wp_e - 1}\right) \cdot Lx_e + \left(u_{2 \cdot Wk_e} - u_{2 \cdot Wp_e}\right) \cdot Ly_e\right] - E \cdot A_e \cdot \alpha t \cdot T_e$$

$N =$

	1
1	-2.019
2	11.6
3	-3.013
4	-19.724
5	-4.63
6	3.206
7	3.321
8	14.626
9	-10.184
10	-22.066
11	4.515
12	0.222

$\cdot kN$



Obliczenie naprężeń

$$\sigma_e := \frac{N_e}{A_e}$$

$\sigma =$

	1
1	-1.553
2	8.923
3	-2.318
4	-15.172
5	-4.209
6	2.915
7	3.019
8	19.872
9	-13.837
10	-29.980
11	6.134
12	0.302

$\cdot MPa$