Statyka kratownicy stalowej o 2 różnych przekrojach prętów, obciążonej siłami i temperaturą

$ORIGIN := 1$ *- ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy*

$E := 208GPa$ *- moduł Younga stali*

$\alpha t := 1.2 \cdot 10^{-5}$ *- współczynnik rozszerzalności cieplnej*

$D1 := 7cm$ $g1 := 4mm$ $\rho := 8500 \frac{kg}{m^3}$

$D2 := 5cm$ $g2 := 3mm$

$A1 := \pi g1 \cdot (D1 - g1)$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 1,2,6,7,8,9* $A1 = 8.294 \cdot cm^2$

$A2 := \pi \cdot g2 \cdot (D2 - g2)$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 3,4,6,10* $A2 = 4.430 \cdot cm^2$

Parametry pomocnicze:

$Lss := 2$ *- Liczba stopni swobody węzła*

$Le := 10$ *- Liczba elementów*

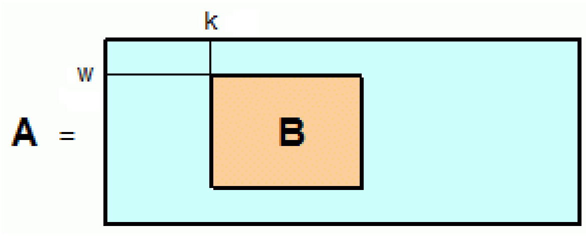
$Lw := 6$ *- Liczba węzłów*

$Lr := Lss \cdot Lw$ *- Liczba równań*

$Ko_{Lr, Lr} := 0$ *Deklaracja globalnej macierzy sztywności i wypełnienie jej zerami*

Funkcja LBM - Lokuj Blok Macierzy, używana przy agregacji macierzy sztywności i wektora obciążeń termicznych

LBM (A, B, w, k)
ZNACZENIE PARAMETRÓW:
A - nazwa macierzy
B - nazwa bloku
w - numer wiersza, od którego zostanie wprowadzony blok
k - numer kolumny, od której zostanie wprowadzony blok
UWAGA: Macierz B zostanie ulokowana w większej macierzy A, poczynając od elementu usytuowanego w wierszu o numerze "w" i kolumnie o numerze "k".



$$LBM(A, B, w, k) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..\ rows(B) \\ \quad \text{for } j \in 1..\ cols(B) \\ \quad\quad A_{w+i-1,\, k+j-1} \leftarrow B_{i,\, j} \\ A \end{array} \right.$$

Współrzędne węzłów kratownicy

Numery węzłów początkowych (Wp) i końcowych (Wk) elementów

Przekroje elementów

Przyrosty temperatury w elementach

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 9 \\ 13 \\ 10 \end{pmatrix} m \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ \frac{9}{5}-5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} m$$

$$Wp := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad Wk := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} A1 \\ A1 \\ A2 \\ A2 \\ A1 \\ A2 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \\ A2 \end{pmatrix} \qquad T := \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ -30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

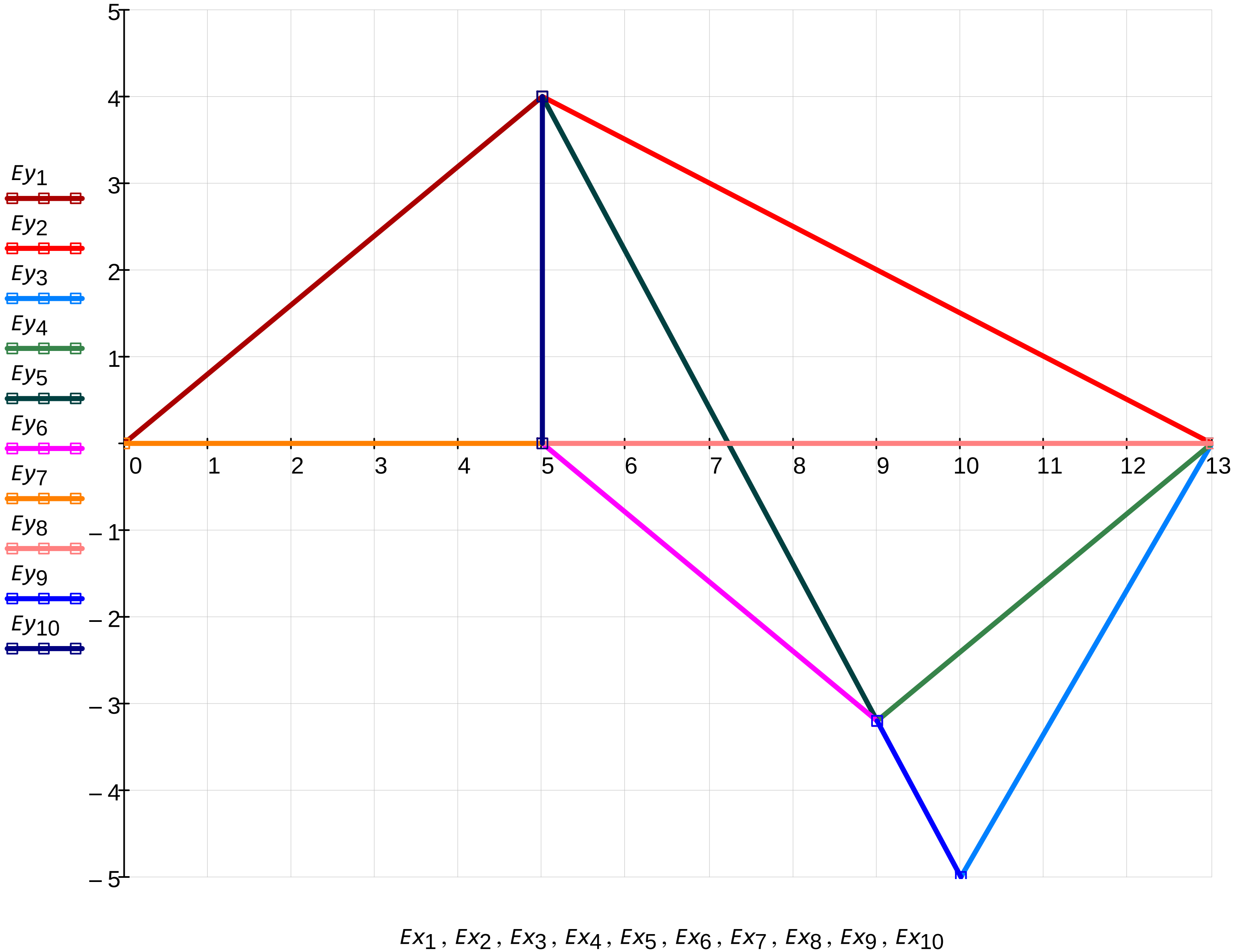
Pętla po wszystkich elementach kratownicy

$e := 1 .. \ Le$

Rysunek elementów kratownicy pozwala kontrolować poprawność wprowadzonych danych

$$Ex_e := \begin{bmatrix} X_{(Wp_e)} \\ X_{(Wk_e)} \end{bmatrix} \qquad Ey_e := \begin{bmatrix} Y_{(Wp_e)} \\ Y_{(Wk_e)} \end{bmatrix}$$

Ex, Ey - współrzędne węzłów elementów kratownicy



Ey1
Ey2
Ey3
Ey4
Ey5
Ey6
Ey7
Ey8
Ey9
Ey10
5
4
3
2
1
0
− 1
− 2
− 3
− 4
− 5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
Ex1 , Ex2 , Ex3 , Ex4 , Ex5 , Ex6 , Ex7 , Ex8 , Ex9 , Ex10

Macierze sztywności elementów kratownicy

$$Lx_e := X_{(Wk_e)} - X_{(Wp_e)} \qquad Ly_e := Y_{(Wk_e)} - Y_{(Wp_e)} \qquad L_e := \sqrt{\left(Lx_e\right)^2 + \left(Ly_e\right)^2}$$

$Lx =$ (m)

	1
1	5.000
2	8.000
3	3.000
4	4.000
5	4.000
6	4.000
7	5.000
8	8.000
9	1.000
10	0.000

$Ly =$ (m)

	1
1	4.000
2	-4.000
3	5.000
4	3.200
5	-7.200
6	-3.200
7	0.000
8	0.000
9	-1.800
10	4.000

$L =$ (m)

	1
1	6.403
2	8.944
3	5.831
4	5.122
5	8.237
6	5.122
7	5.000
8	8.000
9	2.059
10	4.000

$$J_e := \frac{E \cdot A_e}{\left(L_e\right)^3} \cdot \begin{bmatrix} \left(Lx_e\right)^2 & Lx_e \cdot Ly_e \\ Lx_e \cdot Ly_e & \left(Ly_e\right)^2 \end{bmatrix}$$

Objętość (V) i masa (G) kratownicy

$$V := \sum_e \left(A_e \cdot L_e\right) \qquad V = 0.041 \cdot m^3 \qquad G := \rho \cdot V = 348.013\,kg$$

Mimo, że nie jest to potrzebne w dalczych obliczeniach, można pokazać bloki **J** *macierzy sztywności wszystkich elementów*

$$J_1 = \begin{pmatrix} 16427.9 & 13142.3 \\ 13142.3 & 10513.8 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 15429.9 & -7714.9 \\ -7714.9 & 3857.5 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 4182.7 & 6971.2 \\ 6971.2 & 11618.6 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 10967.5 & 8774.0 \\ 8774.0 & 7019.2 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_5 = \begin{pmatrix} 4939.8 & -8891.6 \\ -8891.6 & 16004.9 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_6 = \begin{pmatrix} 10967.5 & -8774.0 \\ -8774.0 & 7019.2 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_7 = \begin{pmatrix} 34502.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_8 = \begin{pmatrix} 21563.9 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_9 = \begin{pmatrix} 19759.2 & -35566.5 \\ -35566.5 & 64019.7 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_{10} = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 23034.2 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej

$n_e := Lss \cdot Wp_e - 1$ $\qquad$ $k_e := Lss \cdot Wk_e - 1$ $\qquad$ *<--- numery stopni swobody węzłów początkowych (n_e) i końcowych (k_e)*

$$K := \sum_e \left(LBM\left(Ko, J_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, J_e, k_e, k_e\right) - LBM\left(Ko, J_e, n_e, k_e\right) - LBM\left(Ko, J_e, k_e, n_e\right) \right)$$

$K =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	50930.1	13142.3	-16427.9	-13142.3	-34502.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	13142.3	10513.8	-13142.3	-10513.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	-16427.9	-13142.3	36797.5	-3464.3	0.0	0.0	-4939.8	8891.6	-15429.9	7714.9	0.0	0.0
4	-13142.3	-10513.8	-3464.3	53410.4	0.0	-23034.2	8891.6	-16004.9	7714.9	-3857.5	0.0	0.0
5	-34502.2	0.0	0.0	0.0	67033.6	-8774.0	-10967.5	8774.0	-21563.9	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0	-23034.2	-8774.0	30053.3	8774.0	-7019.2	0.0	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	-4939.8	8891.6	-10967.5	8774.0	46633.9	-44458.1	-10967.5	-8774.0	-19759.2	35566.5
8	0.0	0.0	8891.6	-16004.9	8774.0	-7019.2	-44458.1	94062.9	-8774.0	-7019.2	35566.5	-64019.7
9	0.0	0.0	-15429.9	7714.9	-21563.9	0.0	-10967.5	-8774.0	52143.9	8030.2	-4182.7	-6971.2
10	0.0	0.0	7714.9	-3857.5	0.0	0.0	-8774.0	-7019.2	8030.2	22495.3	-6971.2	-11618.6
11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-19759.2	35566.5	-4182.7	-6971.2	23941.9	-28595.3
12	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	35566.5	-64019.7	-6971.2	-11618.6	-28595.3	75638.3

$\cdot \dfrac{kN}{m}$

Globalna macierz sztywności **K** *bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.* $|\mathbf{K}|=0$

$$\left| K \cdot \frac{1m}{kN} \right| = -6.016 \times 10^5$$

Aby obliczyć wyznacznik macierzy, której elementy nie są liczbami bezwymiarowymi musimy macierz pomnożyć przez odwrotność jednostek aby doprowadzić elementy do postaci bezwymiarowej - to jest wymóg MatCada.

Zamiast zera wyznacznik może być "bardzo małą" liczbą ze względu na niedostateczną dokładność wyrazów macierzy sztywności.

Globalny wektor sił węzłowych $p_{Lr} := 0$

Rzutowanie siły w węźle 2 na osie globalnego układu współrzędnych

$$Fx2 := 7kN \cdot \cos(40deg) = 5.362 \cdot kN$$

$$Fy2 := -7kN \cdot \sin(40deg) = -4.500 \cdot kN$$

Rzutowanie siły w węźle 5 na osie globalnego układu współrzędnych

$$Fx5 := -6kN \cdot \cos(35deg) = -4.915 \cdot kN$$

$$Fy5 := 6kN \cdot \sin(35deg) = 3.441 \cdot kN$$

Wstawianie sił do wektora "prawej strony"

$p_3 := Fx2$ $p_4 := Fy2$

$p_9 := Fx5$ $p_{10} := Fy5$

$p =$ (· kN)

	1
1	0.000
2	0.000
3	5.362
4	-4.500
5	0.000
6	0.000
7	0.000
8	0.000
9	-4.915
10	3.441
11	0.000
12	0.000

- siły węzłowe wywołane temperaturą w elemencie "e"

$$t_e := \alpha t \cdot T_e \cdot \frac{E \cdot A_e}{L_e} \begin{pmatrix} Lx_e \\ Ly_e \end{pmatrix}$$

$pTo_{Lr} := 0$

Agregacja wektora obciążeń termicznych **p**T *(metodą podobną do stosowanej w agregacji macierzy sztywności)*

$$pT := \sum_{e} \left(LBM\left(pTo, t_e, n_e, 1\right) - LBM\left(pTo, t_e, k_e, 1\right) \right)$$

$pT =$ (·kN)

	1
1	0.000
2	0.000
3	74.063
4	-37.032
5	62.104
6	0.000
7	0.000
8	0.000
9	-119.102
10	65.474
11	-17.065
12	-28.442

$\cdot kN$

$p =$

	1
1	0.000
2	0.000
3	5.362
4	-4.500
5	0.000
6	0.000
7	0.000
8	0.000
9	-4.915
10	3.441
11	0.000
12	0.000

$\cdot kN$

Kopiowanie Macierzy **K** *i wektora* **p** *przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$K0 := K \qquad p0 := p - pT$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$s := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$ *- globalne numery przemieszczeń węzłów blokowanych na podporach*

$Lwb := rows(s)$ *- liczba warunków brzegowych*

$i := 1 .. Lr \qquad j := 1 .. Lwb$

$K0_{s_j, i} := 0$ *zerowanie wierszy*

$K0_{s_j, s_j} := 1 \frac{kN}{m}$ *wstawianie jedności na przekątną macierzy sztywności*

$p0_{(s_j)} := 0$ *zerowanie wartości w wektorze "prawej strony"*

$K0 =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	-16427.9	-13142.3	36797.5	-3464.3	0.0	0.0	-4939.8	8891.6	-15429.9	7714.9	0.0	0.0
4	-13142.3	-10513.8	-3464.3	53410.4	0.0	-23034.2	8891.6	-16004.9	7714.9	-3857.5	0.0	0.0
5	-34502.2	0.0	0.0	0.0	67033.6	-8774.0	-10967.5	8774.0	-21563.9	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0	-23034.2	-8774.0	30053.3	8774.0	-7019.2	0.0	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	-4939.8	8891.6	-10967.5	8774.0	46633.9	-44458.1	-10967.5	-8774.0	-19759.2	35566.5
8	0.0	0.0	8891.6	-16004.9	8774.0	-7019.2	-44458.1	94062.9	-8774.0	-7019.2	35566.5	-64019.7
9	0.0	0.0	-15429.9	7714.9	-21563.9	0.0	-10967.5	-8774.0	52143.9	8030.2	-4182.7	-6971.2
10	0.0	0.0	7714.9	-3857.5	0.0	0.0	-8774.0	-7019.2	8030.2	22495.3	-6971.2	-11618.6
11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
12	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

$\cdot \frac{kN}{m}$

$$\left| K0 \cdot 1 \frac{m}{kN} \right| = 1.501 \times 10^{36}$$

- wyznacznik macierzy $\mathbf{K}_o$ *jest zawsze większy od zera,* $|\mathbf{K}_o| > 0$

$p0^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.000	0.000	-68.701	32.532	-62.104	0.000	0.000	0.000	114.187	-62.033	0.000	0.000

$\cdot kN$

Rozwiązanie układu równań: $u := \mathrm{lsolve}(K0, p0)$

u - wektor przemieszczeń węzłowych

$r := K \cdot u - p + pT$ *r - wektor reakcji podpór*

$u =$ (·mm)

	1
1	0.0000
2	0.0000
3	0.1055
4	-0.1112
5	-0.0734
6	-0.0786
7	-0.2407
8	-0.1807
9	2.7327
10	-3.9386
11	0.0000
12	0.0000

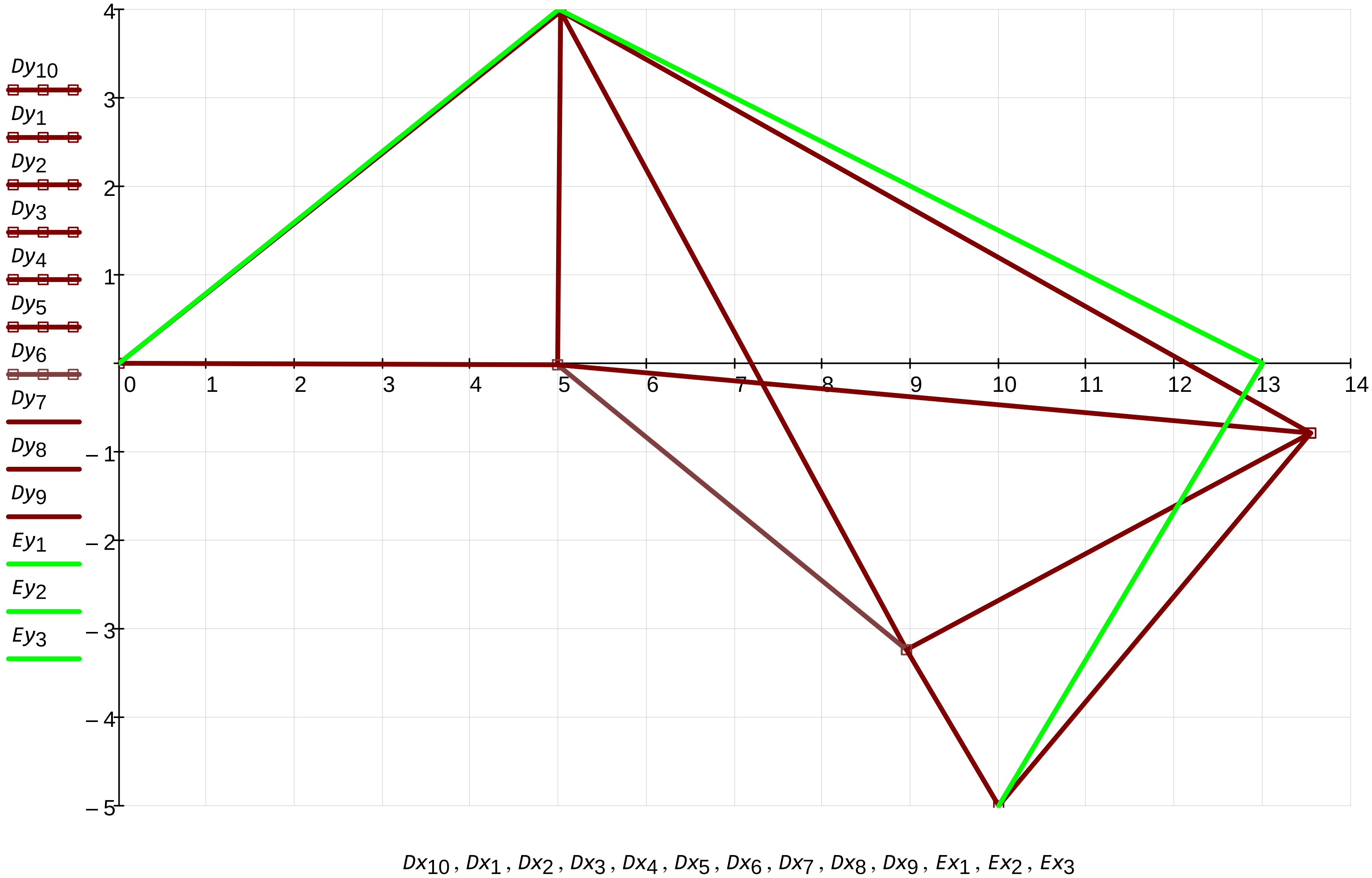
$r =$ (·kN)

	1
1	2.262
2	-0.217
3	0.000
4	-0.000
5	0.000
6	0.000
7	-0.000
8	0.000
9	0.000
10	0.000
11	-2.709
12	1.275

Rysunek przemieszczeń kratownicy pozwala kontrolować poprawność otrzymanych wyników

$skala := 200$

$$Dx_e := Ex_e + skala \cdot \begin{bmatrix} u_{(2 \cdot Wp_e - 1)} \\ u_{(2 \cdot Wk_e - 1)} \end{bmatrix} \qquad Dy_e := Ey_e + skala \cdot \begin{bmatrix} u_{(2 \cdot Wp_e)} \\ u_{(2 \cdot Wk_e)} \end{bmatrix}$$



Dy10
Dy1
Dy2
Dy3
Dy4
Dy5
Dy6
Dy7
Dy8
Dy9
Ey1
Ey2
Ey3
4
3
2
1
– 1
– 2
– 3
– 4
– 5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
Dx10 , Dx1 , Dx2 , Dx3 , Dx4 , Dx5 , Dx6 , Dx7 , Dx8 , Dx9 , Ex1 , Ex2 , Ex3

Obliczenie reakcji podpór

$$r := K \cdot u - p + pT$$

$r^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2.262	-0.217	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	-2.709	1.275

$\cdot kN$

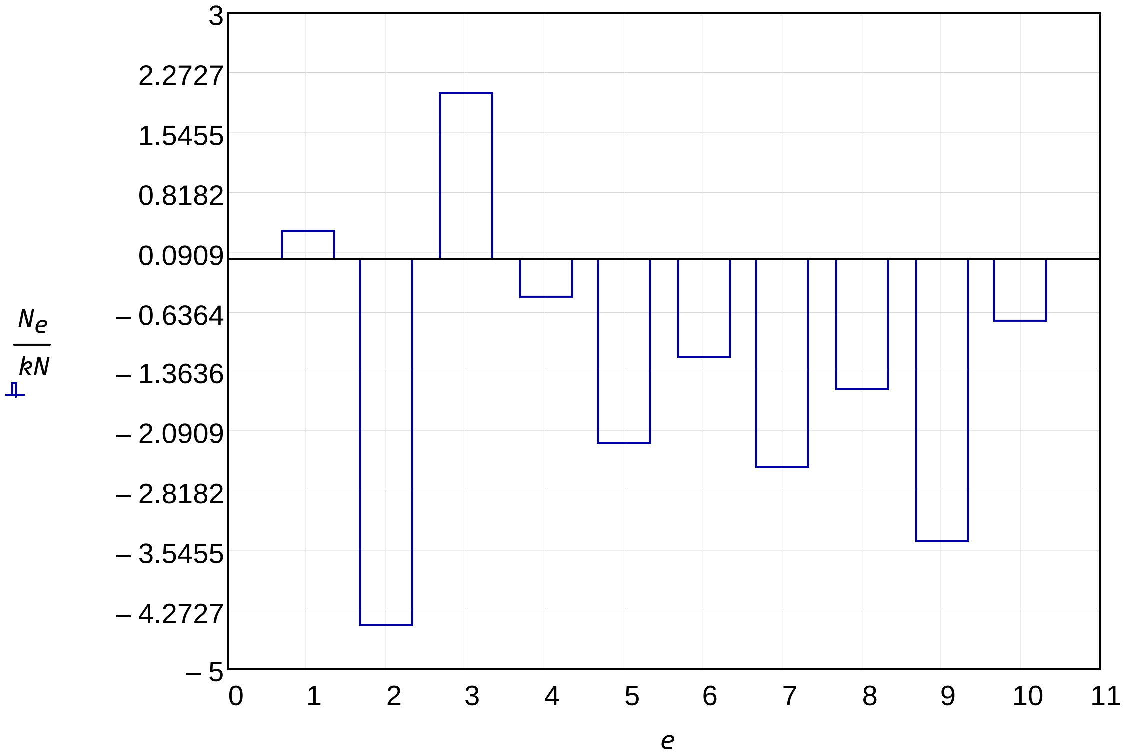
Obliczenie sił wewnętrznych

$$N_e := \frac{E \cdot A_e}{\left(L_e\right)^2} \cdot \left[\left(u_{2 \cdot Wk_e - 1} - u_{2 \cdot Wp_e - 1}\right) \cdot Lx_e + \left(u_{2 \cdot Wk_e} - u_{2 \cdot Wp_e}\right) \cdot Ly_e\right] - \alpha t \cdot T_e \cdot E \cdot A_e$$

$N =$

	1
1	0.348
2	-4.47
3	2.019
4	-0.463
5	-2.249
6	-1.203
7	-2.533
8	-1.594
9	-3.439
10	-0.751

$\cdot kN$



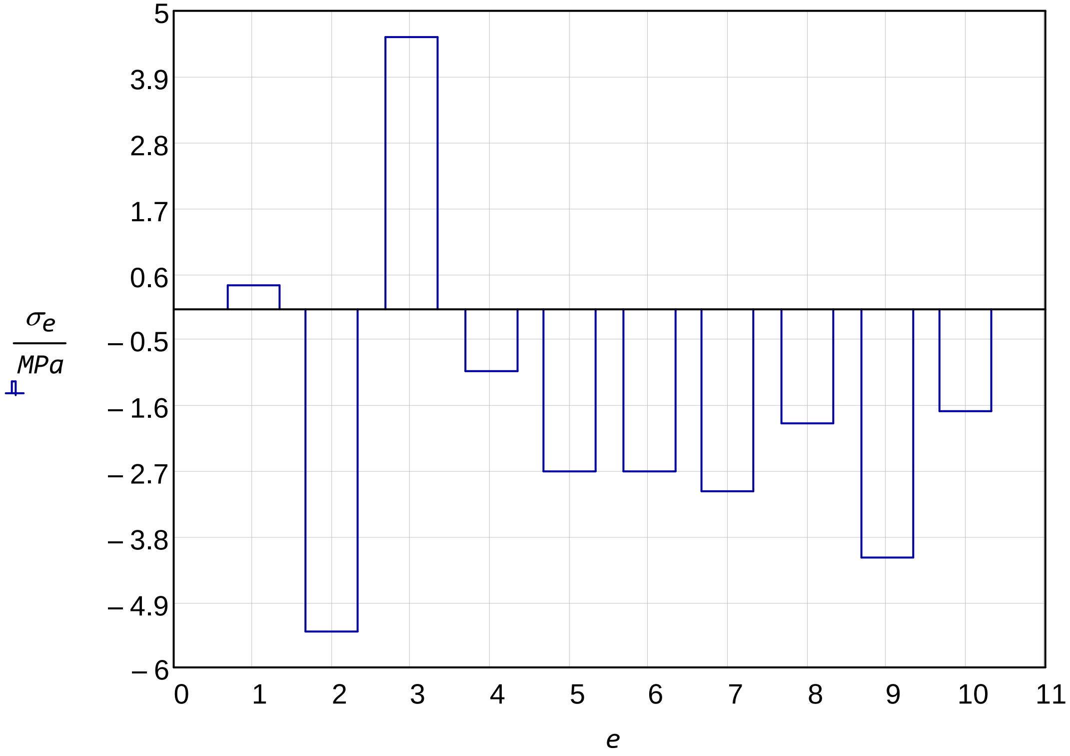
Obliczenie naprężeń

$$\sigma_e := \frac{N_e}{A_e}$$

$\sigma =$

	1
1	0.419
2	-5.390
3	4.558
4	-1.044
5	-2.712
6	-2.715
7	-3.054
8	-1.922
9	-4.147
10	-1.696

$\cdot MPa$



Wykres wytężeń

$f := 210MPa \qquad W_e := \frac{1}{f} \cdot \sigma_e$

$W =$

	1
1	0.002
2	-0.026
3	0.022
4	-0.005
5	-0.013
6	-0.013
7	-0.015
8	-0.009
9	-0.020
10	-0.008

W_e