Statyka kratownicy aluminiowej o 2 różnych przekrojach prętów, obciążonej siłami i temperaturą

$ORIGIN := 1$ - ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy

$E := 70GPa$ - moduł Younga stali

$\alpha t := 2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{K}$ - współczynnik rozszerzalności cieplnej

$D1 := 7cm$ $g1 := 4mm$ $\rho := 2700 \frac{kg}{m^3}$

$D2 := 5cm$ $g2 := 3mm$

$A1 := \pi g1 \cdot (D1 - g1)$ - Pole powierzchni przekroju elementów 1..4 $A1 = 8.294 \cdot cm^2$

$A2 := \pi \cdot g2 \cdot (D2 - g2)$ - Pole powierzchni przekroju elementów 5..13 $A2 = 4.430 \cdot cm^2$

Parametry pomocnicze:

$Lss := 2$ - Liczba stopni swobody węzła

$Le := 13$ - Liczba elementów

$Lw := 7$ - Liczba węzłów

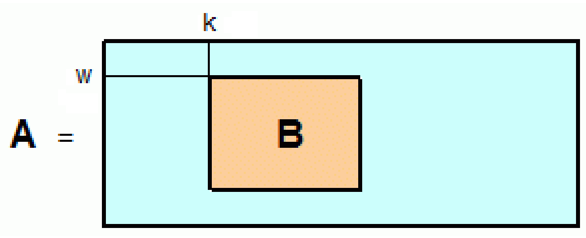
$Lr := Lss \cdot Lw$ - Liczba równań

$Ko_{Lr, Lr} := 0$ Deklaracja globalnej macierzy sztywności i wypełnienie jej zerami

$po_{Lr} := 0$ Deklaracja globalnego wektora sił węzłowych i wypełnienie go zerami

Funkcja LBM - Lokuj Blok Macierzy, używana przy agregacji macierzy sztywności i wektora obciążeń termicznych

LBM (A, B, w, k)
ZNACZENIE PARAMETRÓW:
A - nazwa macierzy
B - nazwa bloku
w - numer wiersza, od którego zostanie wprowadzony blok
k - numer kolumny, od której zostanie wprowadzony blok
UWAGA: Macierz B zostanie ulokowana w większej macierzy A, poczynając od elementu usytuowanego w wierszu o numerze "w" i kolumnie o numerze "k".



```
$LBM(A, B, w, k) :=$
    for $i \in 1 .. rows(B)$
        for $j \in 1 .. cols(B)$
            $A_{w+i-1,\, k+j-1} \leftarrow B_{i,\, j}$
    $A$
```

Współrzędne węzłów kratownicy

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \\ 9 \\ 12 \\ 13 \end{pmatrix} m \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} m$$

Numery węzłów początkowych (Wp)
i końcowych (Wk) elementów

$$Wp := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad Wk := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Przekroje
elementów

$$A := \begin{pmatrix} A1 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \end{pmatrix}$$

Przyrosty temperatury
w elementach

$$T := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \end{pmatrix} K$$

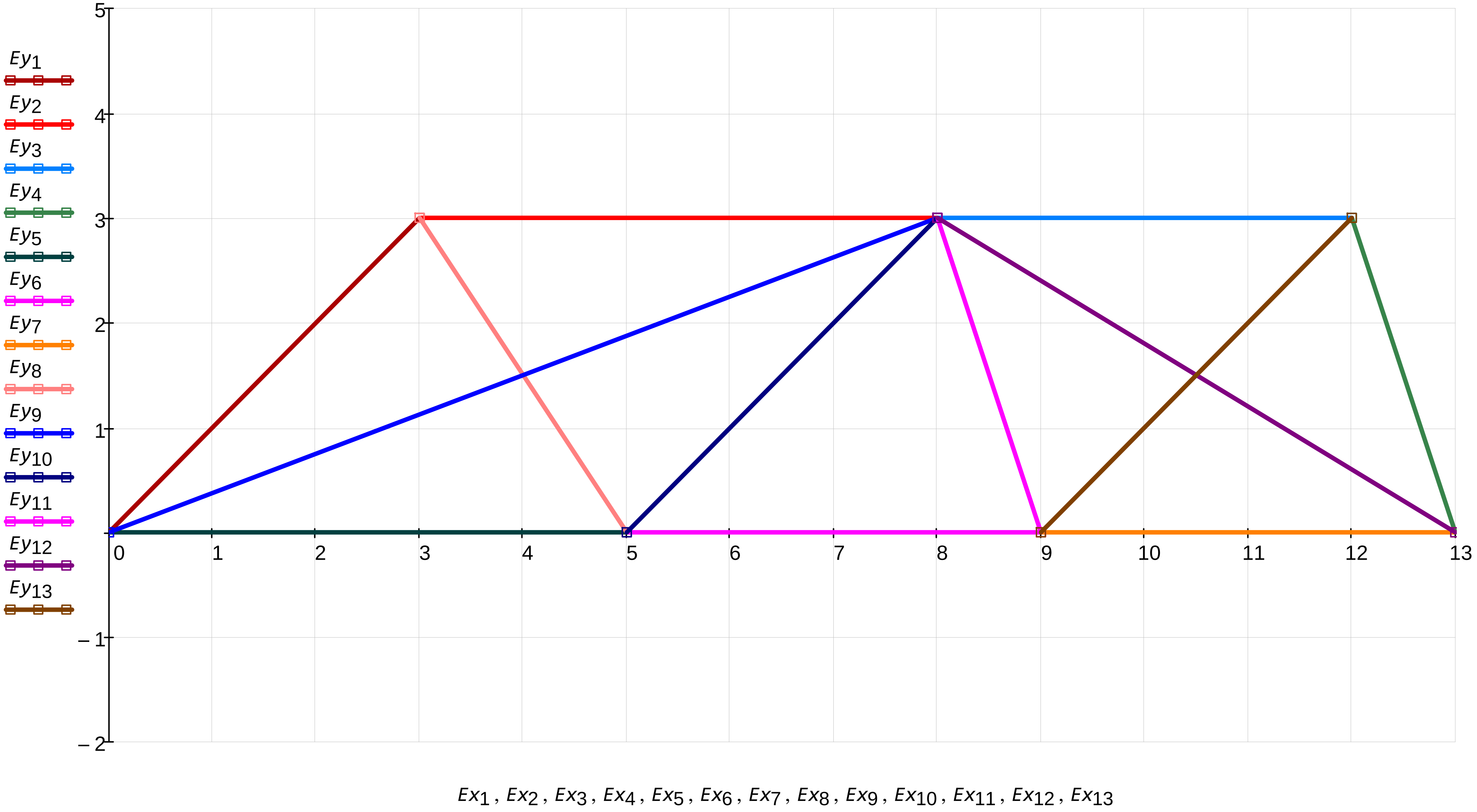
Pętla po wszystkich elementach kratownicy

$$e := 1 .. \; Le$$

Rysunek elementów kratownicy pozwala kontrolować poprawność wprowadzonych danych

$$Ex_e := \begin{bmatrix} X_{\left(Wp_e\right)} \\ X_{\left(Wk_e\right)} \end{bmatrix} \qquad Ey_e := \begin{bmatrix} Y_{\left(Wp_e\right)} \\ Y_{\left(Wk_e\right)} \end{bmatrix}$$

Ex, Ey - współrzędne węzłów elementów kratownicy



5
4
3
2
1
– 1
– 2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
Ey_1
Ey_2
Ey_3
Ey_4
Ey_5
Ey_6
Ey_7
Ey_8
Ey_9
Ey_{10}
Ey_{11}
Ey_{12}
Ey_{13}
$Ex_1 , Ex_2 , Ex_3 , Ex_4 , Ex_5 , Ex_6 , Ex_7 , Ex_8 , Ex_9 , Ex_{10} , Ex_{11} , Ex_{12} , Ex_{13}$

Macierze sztywności elementów kratownicy

$Lx_e := X_{(Wk_e)} - X_{(Wp_e)}$

$Ly_e := Y_{(Wk_e)} - Y_{(Wp_e)}$

$L_e := \sqrt{\left(Lx_e\right)^2 + \left(Ly_e\right)^2}$

$Lx =$

	1
1	3.000
2	5.000
3	4.000
4	1.000
5	5.000
6	4.000
7	4.000
8	2.000
9	8.000
10	...

m

$Ly =$

	1
1	3.000
2	0.000
3	0.000
4	-3.000
5	0.000
6	0.000
7	0.000
8	-3.000
9	3.000
10	...

m

$L =$

	1
1	4.243
2	5.000
3	4.000
4	3.162
5	5.000
6	4.000
7	4.000
8	3.606
9	8.544
10	...

m

$$J_e := \frac{E\cdot A_e}{\left(L_e\right)^3}\cdot\begin{bmatrix}\left(Lx_e\right)^2 & Lx_e\cdot Ly_e \\ Lx_e\cdot Ly_e & \left(Ly_e\right)^2\end{bmatrix}$$

Objętość (V) i masa (G) kratownicy

$V := \sum_e \left(A_e\cdot L_e\right)$

$V = 0.032\cdot m^3$

$G := \rho\cdot V = 87.719\,kg$

Mimo, że nie jest to potrzebne w dalczych obliczeniach, można pokazać bloki **J** *macierzy sztywności wszystkich elementów*

$$J_1 = \begin{pmatrix} 6842.0 & 6842.0 \\ 6842.0 & 6842.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 11611.3 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 14514.2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 1835.9 & -5507.7 \\ -5507.7 & 16523.2 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_5 = \begin{pmatrix} 6201.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_6 = \begin{pmatrix} 7751.9 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_7 = \begin{pmatrix} 7751.9 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_8 = \begin{pmatrix} 2646.1 & -3969.2 \\ -3969.2 & 5953.8 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_9 = \begin{pmatrix} 3181.7 & 1193.1 \\ 1193.1 & 447.4 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_{10} = \begin{pmatrix} 3654.3 & 3654.3 \\ 3654.3 & 3654.3 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_{11} = \begin{pmatrix} 980.5 & -2941.6 \\ -2941.6 & 8824.9 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_{12} = \begin{pmatrix} 3910.1 & -2346.1 \\ -2346.1 & 1407.6 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej

$n_e := Lss \cdot Wp_e - 1$ $k_e := Lss \cdot Wk_e - 1$ *<--- numery stopni swobody węzłów początkowych (n_e) i końcowych (k_e)*

$$K := \sum_e \left(LBM\left(Ko, J_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, J_e, k_e, k_e\right) - LBM\left(Ko, J_e, n_e, k_e\right) - LBM\left(Ko, J_e, k_e, n_e\right)\right)$$

$K =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	16225.3	8035.2	-6842.0	-6842.0	-6201.5	0.0	-3181.7	-1193.1	0.0	0.0	0.0	0.0
2	8035.2	7289.5	-6842.0	-6842.0	0.0	0.0	-1193.1	-447.4	0.0	0.0	0.0	0.0
3	-6842.0	-6842.0	21099.5	2872.8	-2646.1	3969.2	-11611.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	-6842.0	-6842.0	2872.8	12795.8	3969.2	-5953.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	-6201.5	0.0	-2646.1	3969.2	20253.8	-314.9	-3654.3	-3654.3	-7751.9	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	3969.2	-5953.8	-314.9	9608.1	-3654.3	-3654.3	0.0	0.0	0.0	0.0
7	-3181.7	-1193.1	-11611.3	0.0	-3654.3	-3654.3	37852.1	-440.3	-980.5	2941.6	-14514.2	0.0
8	-1193.1	-447.4	0.0	0.0	-3654.3	-3654.3	-440.3	14334.2	2941.6	-8824.9	0.0	0.0
9	0.0	0.0	0.0	0.0	-7751.9	0.0	-980.5	2941.6	20138.6	712.6	-3654.3	-3654.3
10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2941.6	-8824.9	712.6	12479.2	-3654.3	-3654.3
11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-14514.2	0.0	-3654.3	-3654.3	20004.3	-1853.5
12	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-3654.3	-3654.3	-1853.5	...

$\cdot \frac{kN}{m}$

Globalna macierz sztywności **K** *bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.* $|\mathbf{K}|=0$

$$\left|K \cdot \frac{1m}{kN}\right| = 1.259 \times 10^{10}$$

Aby obliczyć wyznacznik macierzy, której elementy nie są liczbami bezwymiarowymi musimy macierz pomnożyć przez odwrotność jednostek aby doprowadzić elementy do postaci bezwymiarowej - to jest wymóg MatCada.

Zamiast zera wyznacznik może być "bardzo małą" liczbą ze względu na niedostateczną dokładność wyrazów macierzy sztywności.

Globalny wektor sił węzłowych

$p := po$

Rzutowanie siły w węźle 2 na osie globalnego układu współrzędnych

$Fy2 := -7kN$

Rzutowanie siły w węźle 6 na osie globalnego układu współrzędnych

$Fx6 := -6kN \cdot sin(35deg) = -3.441 \cdot kN$

$Fy6 := -6kN \cdot cos(35deg) = -4.915 \cdot kN$

Wstawianie sił do wektora "prawej strony"

$p_4 := Fy2$

$p_{11} := Fx6 \qquad p_{12} := Fy6$

$p =$

	1
1	0.000
2	0.000
3	0.000
4	-7.000
5	0.000
6	0.000
7	0.000
8	0.000
9	0.000
10	0.000
11	-3.441
12	-4.915
13	0.000
14	0.000

$\cdot kN$

- siły węzłowe wywołane temperaturą w elemencie "e"

$$t_e := \alpha t \cdot T_e \cdot \frac{E \cdot A_e}{L_e} \begin{pmatrix} Lx_e \\ Ly_e \end{pmatrix}$$

Agregacja wektora obciążeń termicznych **p**T *(metodą podobną do stosowanej w agregacji macierzy sztywności)*

$$pT := \sum_{e} \left(LBM\left(po, t_e, n_e, 1\right) - LBM\left(po, t_e, k_e, 1\right)\right)$$

$pT =$

	1
1	29.033
2	10.887
3	0.000
4	0.000
5	0.000
6	0.000
7	-2.445
8	-26.841
9	0.000
10	0.000
11	0.000
12	0.000
13	-26.589
14	15.953

$\cdot kN$

$p =$

	1
1	0.000
2	0.000
3	0.000
4	-7.000
5	0.000
6	0.000
7	0.000
8	0.000
9	0.000
10	0.000
11	-3.441
12	-4.915
13	0.000
14	0.000

$\cdot kN$

Kopiowanie Macierzy **K** i wektora **p** przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe

$K0 := K$ $\qquad$ $p0 := p - pT$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$s := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}$ - globalne numery przemieszczeń węzłów blokowanych na podporach

$Lwb := rows(s)$ - liczba warunków brzegowych

$i := 1 .. Lr$ $\qquad$ $j := 1 .. Lwb$

$K0_{s_j, i} := 0$ zerowanie wierszy

$K0_{s_j, s_j} := 1 \frac{kN}{m}$ wstawianie jedności na przekątną macierzy sztywności

$p0_{s_j} := 0$ zerowanie wartości w wektorze "prawej strony"

$K0 =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	-6842.0	-6842.0	21099.5	2872.8	-2646.1	3969.2	-11611.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	-6842.0	-6842.0	2872.8	12795.8	3969.2	-5953.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	-6201.5	0.0	-2646.1	3969.2	20253.8	-314.9	-3654.3	-3654.3	-7751.9	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	3969.2	-5953.8	-314.9	9608.1	-3654.3	-3654.3	0.0	0.0	0.0	0.0
7	-3181.7	-1193.1	-11611.3	0.0	-3654.3	-3654.3	37852.1	-440.3	-980.5	2941.6	-14514.2	0.0
8	-1193.1	-447.4	0.0	0.0	-3654.3	-3654.3	-440.3	14334.2	2941.6	-8824.9	0.0	0.0
9	0.0	0.0	0.0	0.0	-7751.9	0.0	-980.5	2941.6	20138.6	712.6	-3654.3	-3654.3
10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2941.6	-8824.9	712.6	12479.2	-3654.3	-3654.3
11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-14514.2	0.0	-3654.3	-3654.3	20004.3	-1853.5
12	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-3654.3	-3654.3	-1853.5	...

$\cdot \frac{kN}{m}$

$\left|K0 \cdot 1\frac{m}{kN}\right| = 1.1834556 \times 10^{41}$ *- wyznacznik macierzy* $\mathbf{K}_o$ *jest zawsze większy od zera,* $|\mathbf{K}_o| > 0$

$p0^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0.000	0.000	0.000	-7.000	0.000	0.000	2.445	26.841	0.000	0.000	-3.441	-4.915	0.000	0.000

$\cdot kN$

Rozwiązanie układu równań: $u := lsolve(K0, p0)$ *u - wektor przemieszczeń węzłowych*

$r := K \cdot u - p + pT$ *- wektor reakcji podpór*

$u =$

	1
1	0.0000
2	-0.0000
3	-0.2426
4	0.4599
5	0.8190
6	2.5930
7	0.3728
8	5.3617
9	-0.3505
10	4.1191
11	0.8346
12	0.5156
13	0.0000
14	0.0000

$\cdot mm$

$r =$

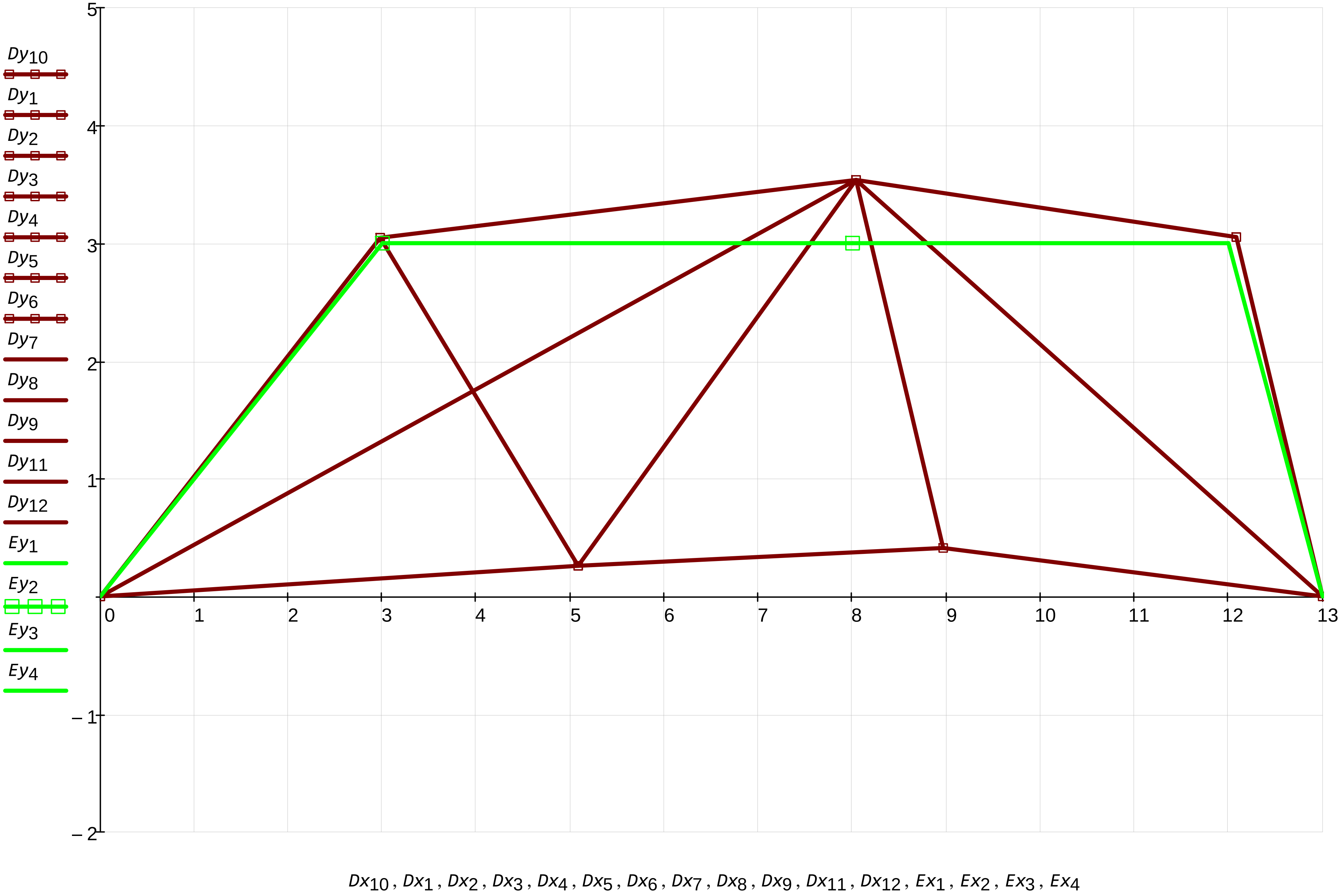
	1
1	14.884
2	6.557
3	0.000
4	0.000
5	-0.000
6	0.000
7	0.000
8	0.000
9	0.000
10	0.000
11	0.000
12	-0.000
13	-11.443
14	5.358

$\cdot kN$

Rysunek przemieszczeń kratownicy pozwala kontrolować poprawność otrzymanych wyników

$skala := 100$

$$Dx_e := Ex_e + skala \cdot \begin{bmatrix} u_{(2 \cdot Wp_e - 1)} \\ u_{(2 \cdot Wk_e - 1)} \end{bmatrix} \qquad Dy_e := Ey_e + skala \cdot \begin{bmatrix} u_{(2 \cdot Wp_e)} \\ u_{(2 \cdot Wk_e)} \end{bmatrix}$$


Dy_{10}
Dy_1
Dy_2
Dy_3
Dy_4
Dy_5
Dy_6
Dy_7
Dy_8
Dy_9
Dy_{11}
Dy_{12}
Ey_1
Ey_2
Ey_3
Ey_4
5
4
3
2
1
−1
−2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
$Dx_{10}, Dx_1, Dx_2, Dx_3, Dx_4, Dx_5, Dx_6, Dx_7, Dx_8, Dx_9, Dx_{11}, Dx_{12}, Ex_1, Ex_2, Ex_3, Ex_4$

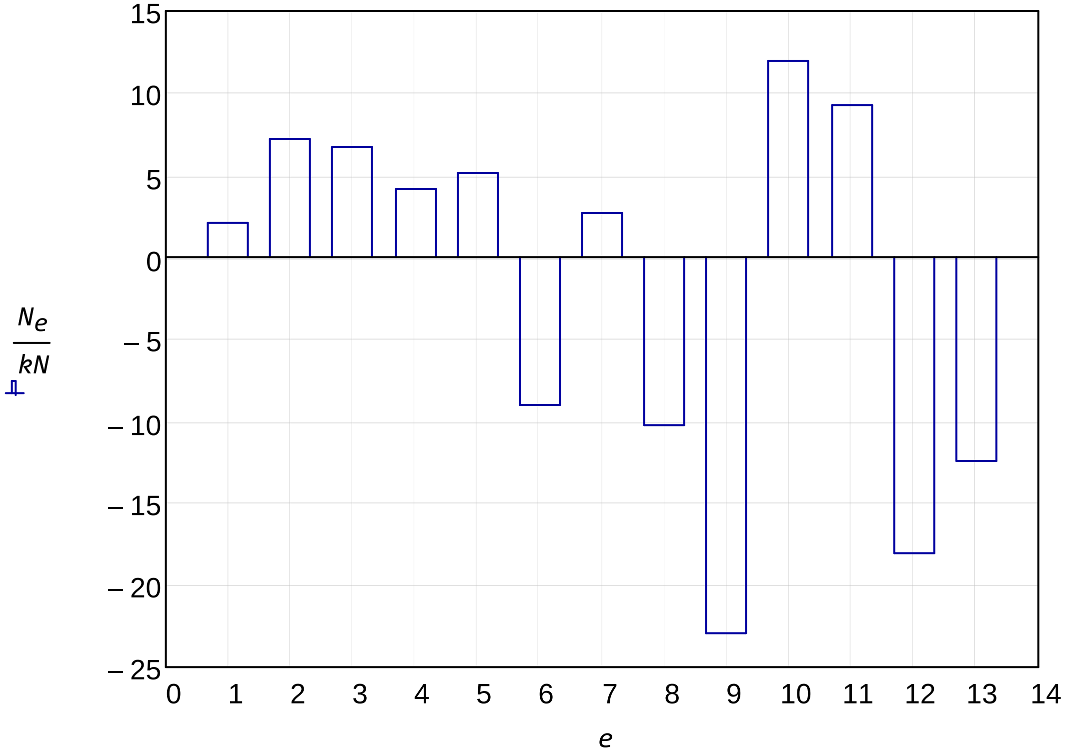
Obliczenie sił wewnętrznych

$$N_e := \frac{E \cdot A_e}{\left(L_e\right)^2} \cdot \left[\left(u_{2 \cdot Wk_e - 1} - u_{2 \cdot Wp_e - 1}\right) \cdot Lx_e + \left(u_{2 \cdot Wk_e} - u_{2 \cdot Wp_e}\right) \cdot Ly_e\right] - \alpha t \cdot T_e \cdot E \cdot A_e$$

$N =$

	1
1	2.103
2	7.145
3	6.703
4	4.135
5	5.079
6	-9.066
7	2.717
8	-10.2
9	-22.909
10	12.002
11	9.315
12	-18.038
13	-12.498

$\cdot kN$



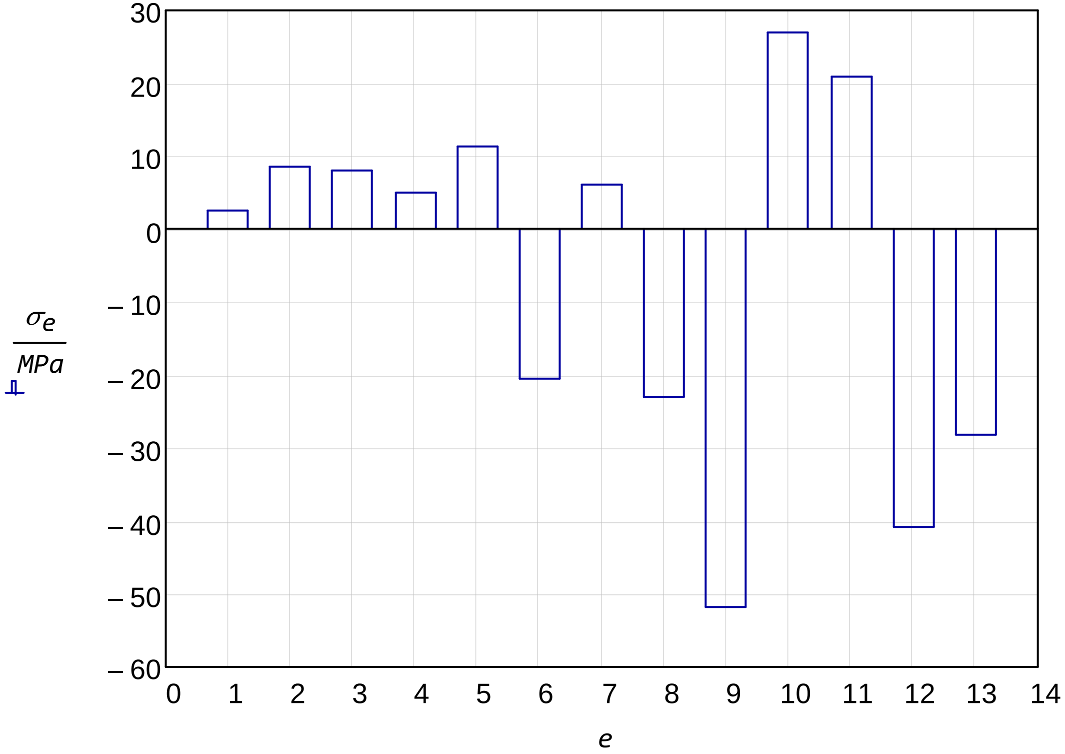
Obliczenie naprężeń

$$\sigma_e := \frac{N_e}{A_e}$$

$\sigma =$

	1
1	2.535
2	8.615
3	8.082
4	4.985
5	11.466
6	-20.466
7	6.134
8	-23.027
9	-51.716
10	27.095
11	21.030
12	-40.721
13	-28.214

$\cdot MPa$



Wykres wytężeń

$f := 130MPa \qquad W_e := \frac{1}{f}\cdot\sigma_e$

$W =$

	1
1	0.020
2	0.066
3	0.062
4	0.038
5	0.088
6	-0.157
7	0.047
8	-0.177
9	-0.398
10	0.208
11	0.162
12	-0.313
13	-0.217