Statyka kratownicy o 3 różnych przekrojach prętów, obciążonej siłami, temperaturą i ciężarem własnym

$ORIGIN := 1$ *- ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy*

$E := 20GPa$ *- moduł Younga*

$\alpha t := 1.2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{K}$ *- współczynnik rozszerzalności cieplnej*

$b1 := 10cm$ $h1 := 15cm$ $\rho := 2500 \frac{kg}{m^3}$ $\gamma := \rho \cdot g = 24.517 \cdot \frac{kN}{m^3}$

$b2 := 10cm$ $h2 := 10cm$

$b3 := 7cm$ $h3 := 7cm$

$A1 := b1 \cdot h1$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 1..4* $A1 = 150.000 \cdot cm^2$

$A2 := b2 \cdot h2$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 5..10* $A2 = 100.000 \cdot cm^2$

$A3 := b3 \cdot h3$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 11..19* $A3 = 49.000 \cdot cm^2$

Parametry pomocnicze:

$Lss := 2$ *- Liczba stopni swobody węzła*

$Le := 19$ *- Liczba elementów*

$Lw := 10$ *- Liczba węzłów*

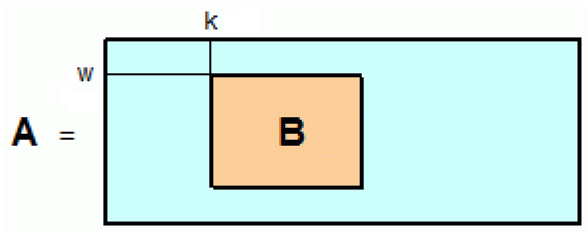
$Lr := Lss \cdot Lw$ *- Liczba równań*

$Ko_{Lr, Lr} := 0$ *Deklaracja globalnej macierzy sztywności i wypełnienie jej zerami*

$po_{Lr} := 0$ *Deklaracja globalnego wektora sił węzłowych i wypełnienie go zerami*

Funkcja LBM - Lokuj Blok Macierzy, używana przy agregacji macierzy sztywności i wektora obciążeń termicznych

LBM (A, B, w, k)
ZNACZENIE PARAMETRÓW:
A - nazwa macierzy
B - nazwa bloku
w - numer wiersza, od którego zostanie wprowadzony blok
k - numer kolumny, od której zostanie wprowadzony blok
UWAGA: Macierz B zostanie ulokowana w większej macierzy A,
poczynając od elementu usytuowanego w wierszu o numerze "w"
i kolumnie o numerze "k".



$$LBM(A, B, w, k) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1 .. \; rows(B) \\ \quad \text{for } j \in 1 .. \; cols(B) \\ \quad\quad A_{w+i-1,\, k+j-1} \leftarrow B_{i,j} \\ A \end{array} \right.$$

Numery węzłów początkowych (Wp) i końcowych (Wk) elementów

Przekroje elementów

Przyrosty temperatury w elementach

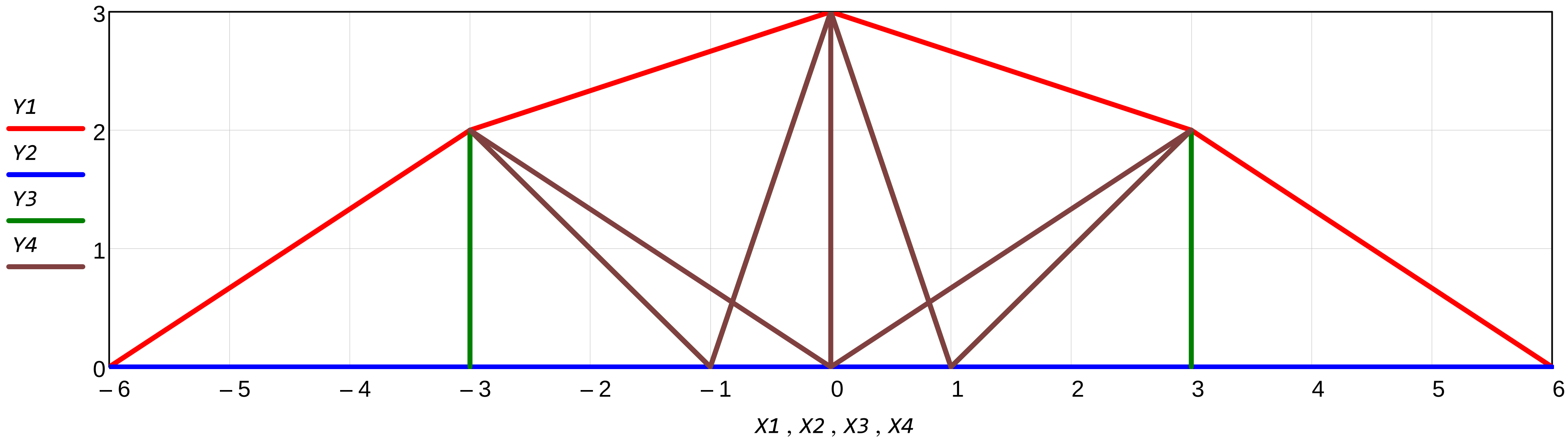
Współrzędne węzłów kratownicy

$$X := \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} m \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} m$$

$$Wp := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \\ 6 \\ 2 \\ 8 \\ 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad Wk := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \\ 10 \\ 2 \\ 6 \\ 9 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} A1 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A3 \\ A3 \\ A3 \\ A3 \\ A3 \\ A3 \\ A3 \\ A3 \\ A3 \end{pmatrix} \qquad T := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ 30 \\ 50 \\ 40 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} K$$

$e := 1 .. Le$ *Pętla po wszystkich elementach kratownicy*

Rysunek elementów kratownicy pozwala kontrolować poprawność wprowadzonych danych



Macierze sztywności elementów kratownicy

$$Lx_e := X_{(Wk_e)} - X_{(Wp_e)} \qquad Ly_e := Y_{(Wk_e)} - Y_{(Wp_e)} \qquad L_e := \sqrt{(Lx_e)^2 + (Ly_e)^2}$$

$Lx =$ (m)

	1
1	3.000
2	3.000
3	3.000
4	3.000
5	3.000
6	2.000
7	1.000
8	1.000
9	2.000
10	3.000
11	0.000
12	0.000
13	0.000
14	-3.000
15	2.000
16	-3.000
17	2.000
18	1.000
19	1.000

$Ly =$ (m)

	1
1	2.000
2	1.000
3	-1.000
4	-2.000
5	0.000
6	0.000
7	0.000
8	0.000
9	0.000
10	0.000
11	2.000
12	-3.000
13	-2.000
14	2.000
15	-2.000
16	-2.000
17	2.000
18	3.000
19	-3.000

$L =$ (m)

	1
1	3.606
2	3.162
3	3.162
4	3.606
5	3.000
6	2.000
7	1.000
8	1.000
9	2.000
10	3.000
11	2.000
12	3.000
13	2.000
14	3.606
15	2.828
16	3.606
17	2.828
18	3.162
19	3.162

$$J_e := \frac{E \cdot A_e}{(L_e)^3} \cdot \begin{bmatrix} (Lx_e)^2 & Lx_e \cdot Ly_e \\ Lx_e \cdot Ly_e & (Ly_e)^2 \end{bmatrix}$$

Objętość (V) i masa (G) kratownicy

$$V := \sum_e (A_e \cdot L_e) \qquad V = 0.451 \cdot m^3 \qquad M := \rho \cdot V = 1128.445\,kg \qquad G := M \cdot g = 11.066\,kN$$

*Mimo, że nie jest to potrzebne w dalczych obliczeniach, można pokazać bloki **J** macierzy sztywności wszystkich elementów*

$$J_1 = \begin{pmatrix} 57603.5 & 38402.3 \\ 38402.3 & 25601.5 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 85381.5 & 28460.5 \\ 28460.5 & 9486.8 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 85381.5 & -28460.5 \\ -28460.5 & 9486.8 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 57603.5 & -38402.3 \\ -38402.3 & 25601.5 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_5 = \begin{pmatrix} 66666.7 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_6 = \begin{pmatrix} 100000.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_7 = \begin{pmatrix} 200000.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_8 = \begin{pmatrix} 200000.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_9 = \begin{pmatrix} 100000.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_{10} = \begin{pmatrix} 66666.7 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_{11} = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 49000.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_{12} = \begin{pmatrix} 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 32666.7 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej

$n_e := Lss \cdot Wp_e - 1$ $\qquad$ $k_e := Lss \cdot Wk_e - 1$ $\qquad$ *<--- numery stopni swobody węzłów początkowych (n_e) i końcowych (k_e)*

$$K := \sum_e \left(LBM\left(Ko, J_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, J_e, k_e, k_e\right) - LBM\left(Ko, J_e, n_e, k_e\right) - LBM\left(Ko, J_e, k_e, n_e\right) \right)$$

K =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	124270.1	38402.3	-57603.5	-38402.3	-66666.7	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	38402.3	25601.5	-38402.3	-25601.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	-57603.5	-38402.3	179126.2	36993.9	0.0	0.0	-17324.1	17324.1	-85381.5	-28460.5	-18817.1
4	-38402.3	-25601.5	36993.9	109775.7	0.0	-49000.0	17324.1	-17324.1	-28460.5	-9486.8	12544.8
5	-66666.7	0.0	0.0	0.0	166666.7	0.0	-100000.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0	-49000.0	0.0	49000.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	-17324.1	17324.1	-100000.0	0.0	320423.1	-8027.0	-3099.0	-9297.1	-200000.0
8	0.0	0.0	17324.1	-17324.1	0.0	0.0	-8027.0	45215.4	-9297.1	-27891.3	0.0
9	0.0	0.0	-85381.5	-28460.5	0.0	0.0	-3099.0	-9297.1	176961.1	0.0	0.0
10	0.0	0.0	-28460.5	-9486.8	0.0	0.0	-9297.1	-27891.3	0.0	107422.9	0.0
11	0.0	0.0	-18817.1	12544.8	0.0	0.0	-200000.0	0.0	0.0	0.0	437634.3
12	0.0	0.0	12544.8	-8363.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-32666.7	0.0
13	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-3099.0	9297.1	-200000.0
14	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	9297.1	-27891.3	0.0
15	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-85381.5	28460.5	...

$\cdot \dfrac{kN}{m}$

Globalna macierz sztywności ***K*** *bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.* $|\mathbf{K}|=0$

$$\left| K \cdot \frac{1m}{kN} \right| = -6.967 \times 10^{49}$$

Aby obliczyć wyznacznik macierzy, której elementy nie są liczbami bezwymiarowymi musimy macierz pomnożyć przez odwrotność jednostek aby doprowadzić elementy do postaci bezwymiarowej - to jest wymóg MatCada.

Zamiast zera wyznacznik może być "bardzo małą" liczbą ze względu na niedostateczną dokładność wyrazów macierzy sztywności.

Globalny wektor sił węzłowych $p := po$

Rzutowanie siły węzłowych na osie globalnego układu współrzędnych

$Fx2 := 5kN \cdot sin(30deg) = 2.500 \cdot kN$

$Fy2 := -5kN \cdot cos(30deg) = -4.330 \cdot kN$

$Fy5 := -6kN$

$Fx8 := -5kN \cdot sin(30deg) = -2.500 \cdot kN$

$Fy8 := -5kN \cdot cos(30deg) = -4.330 \cdot kN$

Wstawianie sił do wektora "prawej strony"

$p_3 := Fx2$ $p_4 := Fy2$

$p_{10} := Fy5$

$p_{15} := Fx8$ $p_{16} := Fy8$

$p =$

	1
1	0.000
2	0.000
3	2.500
4	-4.330
5	0.000
6	0.000
7	0.000
8	0.000
9	0.000
10	-6.000
11	0.000
12	0.000
13	0.000
14	0.000
15	-2.500
16	-4.330
17	0.000
18	0.000
19	0.000
20	0.000

$\cdot kN$

- siły węzłowe wywołane temperaturą w elemencie "e"

$$t_e := \alpha t \cdot T_e \cdot \frac{E \cdot A_e}{L_e} \begin{pmatrix} Lx_e \\ Ly_e \end{pmatrix}$$

- siły węzłowe wywołane ciężarem własnym elementu "e"

$$g_e := \frac{\gamma \cdot A_e \cdot L_e}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Agregacja wektora obciążeń termicznych **p**T *i obciążeń grawitacyjnych* **p**G *(metodą podobną do stosowanej w agregacji macierzy sztywności)*

$$pT := \sum_{e} \left(LBM\left(po, t_e, n_e, 1\right) - LBM\left(po, t_e, k_e, 1\right) \right)$$

$$pG := \sum_{e} \left(LBM\left(po, g_e, n_e, 1\right) + LBM\left(po, g_e, k_e, 1\right) \right)$$

$p =$ (in $\cdot kN$)

	1
1	0.000
2	0.000
3	2.500
4	-4.330
5	0.000
6	0.000
7	0.000
8	0.000
9	0.000
10	-6.000
11	0.000
12	0.000
13	0.000
14	0.000
15	-2.500
16	-4.330
17	0.000
18	0.000
19	0.000
20	0.000

$pT =$ (in $\cdot kN$)

	1
1	0.000
2	0.000
3	64.086
4	-51.040
5	0.000
6	0.000
7	-24.947
8	24.947
9	0.000
10	0.000
11	9.785
12	58.709
13	33.262
14	33.262
15	-82.187
16	-65.879
17	0.000
18	0.000
19	0.000
20	0.000

$pG =$ (in $\cdot kN$)

	1
1	0.000
2	-1.031
3	0.000
4	-1.751
5	0.000
6	-0.733
7	0.000
8	-0.728
9	0.000
10	-1.723
11	0.000
12	-0.859
13	0.000
14	-0.728
15	0.000
16	-1.751
17	0.000
18	-0.733
19	0.000
20	-1.031

*Kopiowanie Macierzy **K** i wektora **p** przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$K0 := K$ $\qquad$ $p0 := p - pT + pG$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$s := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 19 \\ 20 \end{pmatrix}$ *- globalne numery przemieszczeń węzłów blokowanych na podporach*

$Lwb := rows(s)$ *- liczba warunków brzegowych*

$i := 1 .. Lr$ $\qquad$ $j := 1 .. Lwb$

$K0_{s_j, i} := 0$ *zerowanie wierszy*

$K0_{s_j, s_j} := 1 \frac{kN}{m}$ *wstawianie jedności na przekątną macierzy sztywności*

$p0_{s_j} := 0$ *zerowanie wartości w wektorze "prawej strony"*

$K0 =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	-57603.5	-38402.3	179126.2	36993.9	0.0	0.0	-17324.1	17324.1	-85381.5	-28460.5	-18817.1	12544.8
4	-38402.3	-25601.5	36993.9	109775.7	0.0	-49000.0	17324.1	-17324.1	-28460.5	-9486.8	12544.8	-8363.2
5	-66666.7	0.0	0.0	0.0	166666.7	0.0	-100000.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	0.0	-49000.0	0.0	49000.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	-17324.1	17324.1	-100000.0	0.0	320423.1	-8027.0	-3099.0	-9297.1	-200000.0	0.0
8	0.0	0.0	17324.1	-17324.1	0.0	0.0	-8027.0	45215.4	-9297.1	-27891.3	0.0	0.0
9	0.0	0.0	-85381.5	-28460.5	0.0	0.0	-3099.0	-9297.1	176961.1	0.0	0.0	0.0
10	0.0	0.0	-28460.5	-9486.8	0.0	0.0	-9297.1	-27891.3	0.0	107422.9	0.0	-32666.7
11	0.0	0.0	-18817.1	12544.8	0.0	0.0	-200000.0	0.0	0.0	0.0	437634.3	0.0
12	0.0	0.0	12544.8	-8363.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-32666.7	0.0	...

$\left| K0 \cdot 1 \frac{m}{kN} \right| = 2.5695604 \times 10^{78}$ *- wyznacznik macierzy $\mathbf{K}_o$ jest zawsze większy od zera,* $|\mathbf{K}_o| > 0$

$p0^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0.000	0.000	-61.586	44.959	0.000	-0.733	24.947	-25.674	0.000	-7.723	-9.785	-59.568	-33.262	...

$\cdot kN$

Rozwiązanie układu równań: $u := \mathrm{lsolve}(K0, p0)$ *u - wektor przemieszczeń węzłowych*

$r := K \cdot u - p + pT - pG$ *- wektor reakcji podpór*

$u =$ (·mm)

	1
1	0.0000
2	0.0000
3	-0.2943
4	-0.0207
5	-0.0175
6	-0.0357
7	-0.0292
8	-1.4779
9	0.0525
10	-1.6544
11	-0.0036
12	-2.0468
13	0.0292
14	-1.4743
15	0.5126
16	0.3067
17	0.0175
18	0.2917
19	0.0000
20	0.0000

$\cdot mm$

$r =$

	1
1	18.915
2	12.863
3	0.000
4	0.000
5	0.000
6	-0.000
7	-0.000
8	-0.000
9	0.000
10	0.000
11	0.000
12	0.000
13	0.000
14	-0.000
15	0.000
16	-0.000
17	0.000
18	0.000
19	-18.915
20	12.863

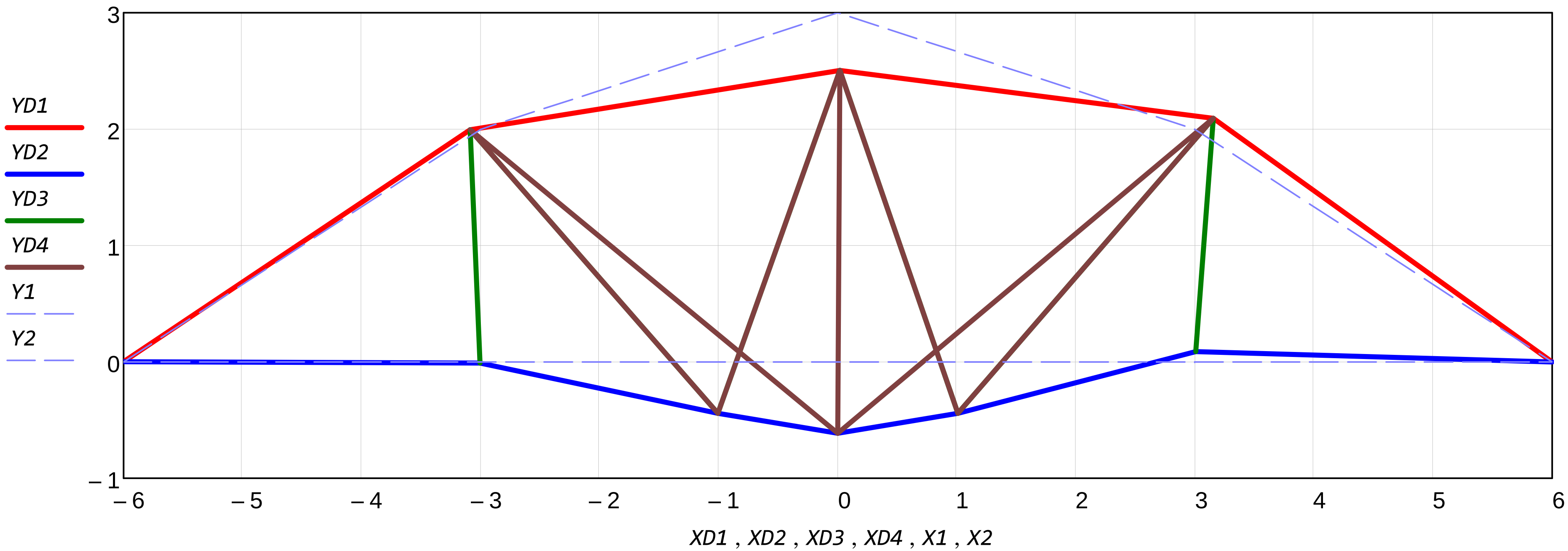
$\cdot kN$

$p0 =$

	1
1	0.000
2	0.000
3	-61.586
4	44.959
5	0.000
6	-0.733
7	24.947
8	-25.674
9	0.000
10	-7.723
11	-9.785
12	-59.568
13	-33.262
14	-33.990
15	79.687
16	59.798
17	0.000
18	-0.733
19	0.000
20	0.000

kN

Rysunek przemieszczeń kratownicy pozwala kontrolować poprawność otrzymanych wyników



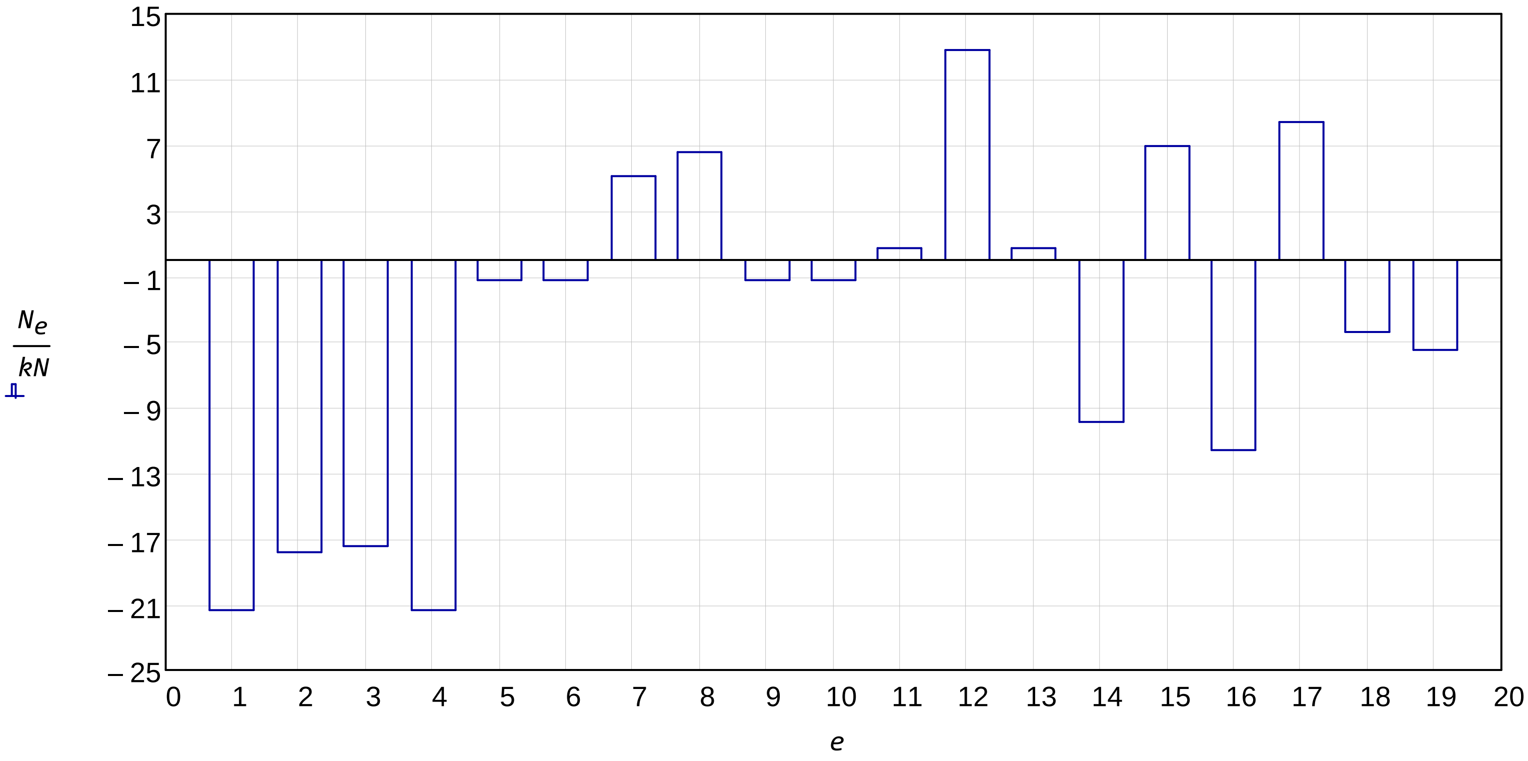
Obliczenie sił wewnętrznych

$$N_e := \frac{E \cdot A_e}{(L_e)^2} \cdot \left[\left(u_{2 \cdot Wk_e - 1} - u_{2 \cdot Wp_e - 1} \right) \cdot Lx_e + \left(u_{2 \cdot Wk_e} - u_{2 \cdot Wp_e} \right) \cdot Ly_e \right] - \alpha t \cdot T_e \cdot E \cdot A_e$$

$N =$

	1
1	-21.331
2	-17.801
3	-17.423
4	-21.331
5	-1.166
6	-1.166
7	5.113
8	6.548
9	-1.166
10	-1.166
11	0.733
12	12.819
13	0.733
14	-9.919
15	6.917
16	-11.643
17	8.439
18	-4.389
19	-5.523

$\cdot kN$



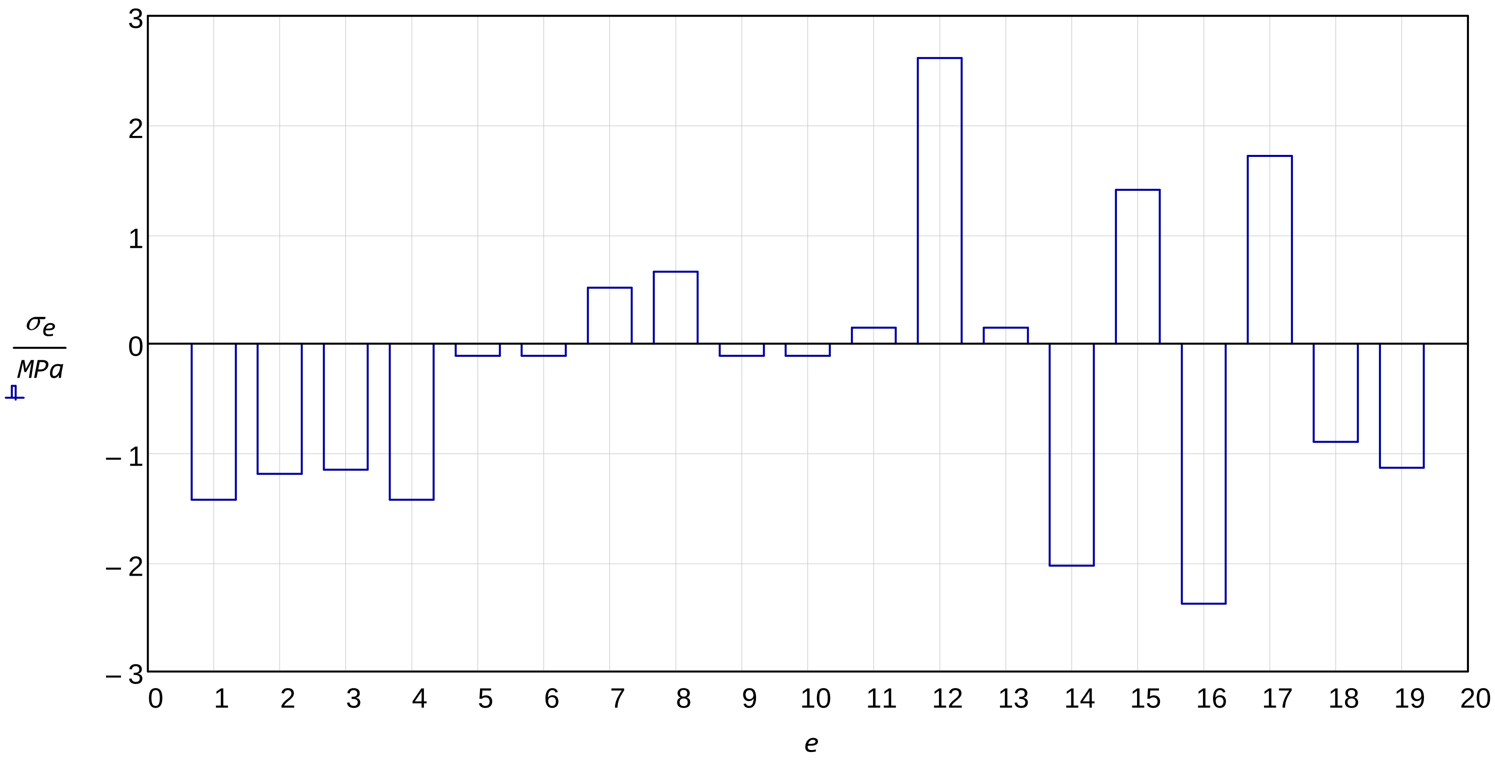
Obliczenie naprężeń

$$\sigma_e := \frac{N_e}{A_e}$$

$\sigma =$

	1
1	-1.422
2	-1.187
3	-1.162
4	-1.422
5	-0.117
6	-0.117
7	0.511
8	0.655
9	-0.117
10	-0.117
11	0.150
12	2.616
13	0.150
14	-2.024
15	1.412
16	-2.376
17	1.722
18	-0.896
19	-1.127

$\cdot MPa$



Wykres wytężeń

$$f := 130MPa \qquad W_e := \frac{1}{f} \cdot \sigma_e$$

$W =$

	1
1	-0.011
2	-0.009
3	-0.009
4	-0.011
5	-0.001
6	-0.001
7	0.004
8	0.005
9	-0.001
10	-0.001
11	0.001
12	0.020
13	0.001
14	-0.016
15	0.011
16	-0.018
17	0.013
18	-0.007
19	-0.009