

ORIGIN := 1

Statyka kratownicy o 3 różnych przekrojach prętów, obciążonej siłami

$E := 72 \text{ GPa}$ - moduł Younga aluminium $\alpha t := 4.1 \cdot 10^{-5}$ $\rho := 2800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$a1 := 5.5 \text{ cm}$ $g1 := 4 \text{ mm}$ - parametry przekroju $\gamma := \rho \cdot g = 27.459 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$
 $a2 := 4.5 \text{ cm}$ $g2 := 3 \text{ mm}$ - rury kwadratowe
 $a3 := 4 \text{ cm}$ $g3 := 3 \text{ mm}$

$A1 := 4 \cdot g1 \cdot (a1 - g1) = 8.16 \text{ cm}^2$ - pole powierzchni przekroju elementów 1...4

$A2 := 4 \cdot g2 \cdot (a2 - g2) = 5.04 \text{ cm}^2$ - pole powierzchni przekroju elementów 5..7

$A3 := 4 \cdot g3 \cdot (a3 - g3) = 4.44 \text{ cm}^2$ - pole powierzchni przekroju elementów 8...13

$i := 1..4$ $A_i := A1$ $i := 5..6$ $A_i := A2$ $i := 7..10$ $A_i := A3$

Przyrosty temperatur

$T_{10} := 0$ $T_7 := 27$ $T_4 := 37$

Przekroje elementów

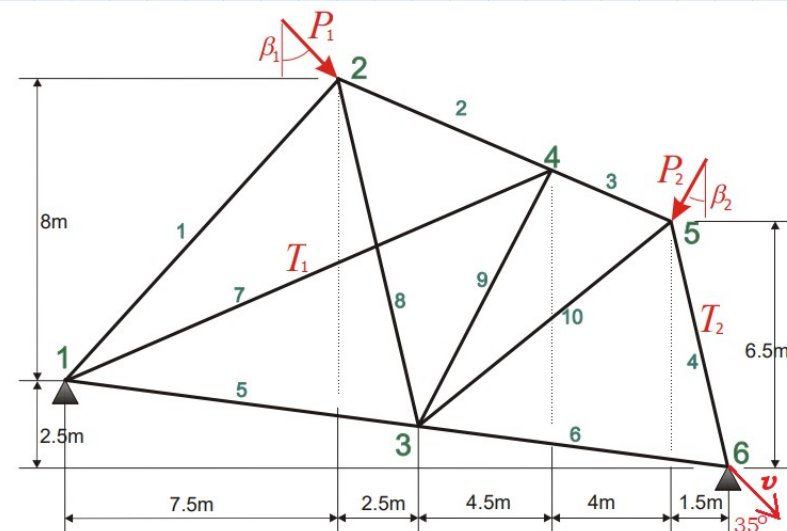
Numerы węzłów początkowych (Wp) i końcowych (Wk) elementów

$$A = \begin{bmatrix} 8.16 \\ 8.16 \\ 8.16 \\ 8.16 \\ 5.04 \\ 5.04 \\ 4.44 \\ 4.44 \\ 4.44 \\ 4.44 \end{bmatrix} \text{ cm}^2$$

$$Wp := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$Wk := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 3 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 37 \\ 0 \\ 0 \\ 27 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Współrzędne węzłów kratownicy

Kolejność rysowania elementów

$$X := \begin{bmatrix} 0 \\ 7.5 \\ 10 \\ 14.5 \\ 18.5 \\ 20 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$Y := \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ -2.5 \cdot \frac{10}{20} \\ 8 - 4 \cdot \frac{7}{11} \\ 4 \\ -2.5 \end{bmatrix} \text{ m}$$

$$Q := \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Parametry pomocnicze:

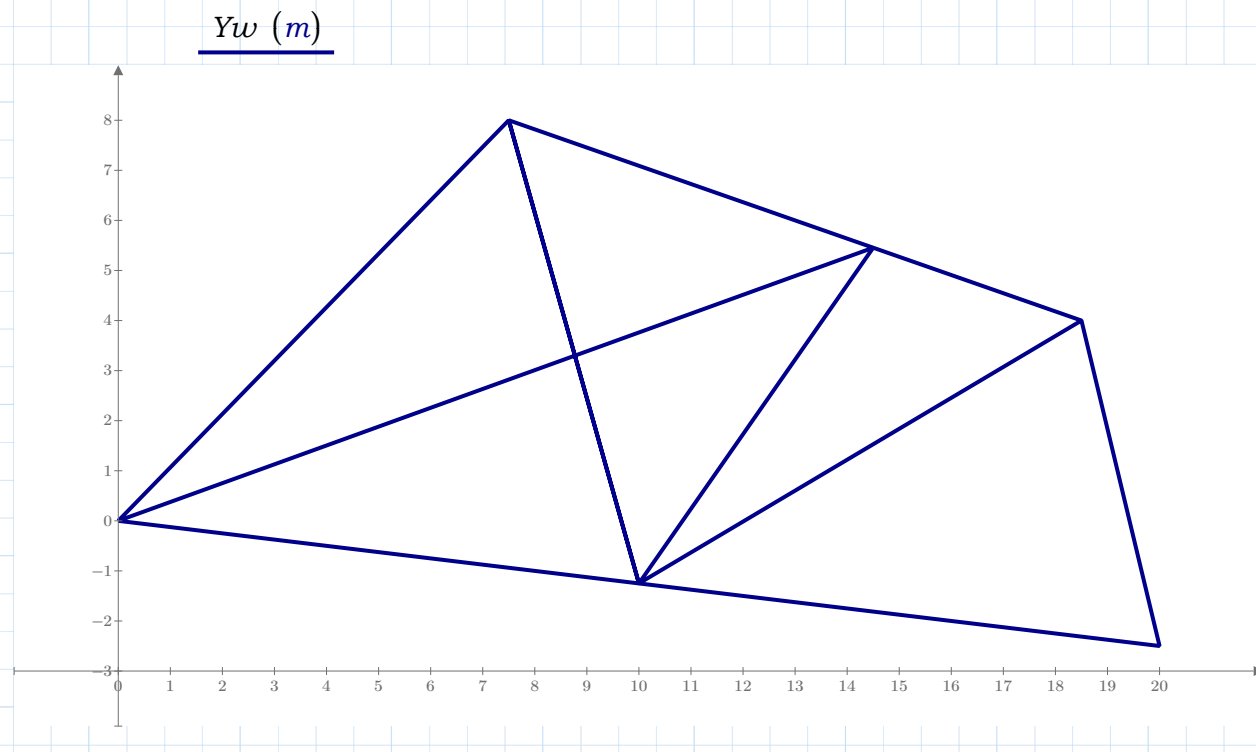
$Lss := 2$ - Liczba stopni swobody węzła:
 $Le := \text{rows}(Wp) = 10$ - Liczba elementów
 $Lw := \text{rows}(X) = 6$ - Liczba węzłów
 $Lr := Lw \cdot Lss = 12$ - Liczba równań

Rysunek elementów kratownicy pozwala kontrolować poprawność wprowadzonych danych

$i := 1 \dots \text{rows}(Q)$

$Xw_i := X_{Q_i}$

$Yw_i := Y_{Q_i}$



Pętla po wszystkich elementach kratownicy

$e := 1 \dots Le$

Macierze sztywności elementów kratownicy

$$Lx_e := X_{wk_e} - X_{wp_e} \quad Ly_e := Y_{wk_e} - Y_{wp_e} \quad L_e := \sqrt{Lx_e^2 + Ly_e^2}$$

$$J_e := \frac{E \cdot A_e}{L_e^3} \cdot \begin{bmatrix} Lx_e^2 & Lx_e \cdot Ly_e \\ Lx_e \cdot Ly_e & Ly_e^2 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 2506.2 & 2673.3 \\ 2673.3 & 2851.5 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 6966.6 & -2533.3 \\ -2533.3 & 921.2 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} 12191.6 & -4433.3 \\ -4433.3 & 1612.1 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_4 = \begin{bmatrix} 445.3 & -1929.7 \\ -1929.7 & 8362 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_5 = \begin{bmatrix} 3545.4 & -443.2 \\ -443.2 & 55.4 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_6 = \begin{bmatrix} 3545.4 & -443.2 \\ -443.2 & 55.4 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_7 = \begin{bmatrix} 1807.7 & 680 \\ 680 & 255.8 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_8 = \begin{bmatrix} 227.1 & -840.3 \\ -840.3 & 3109.2 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_9 = \begin{bmatrix} 1229.6 & 1832 \\ 1832 & 2729.4 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

Definicja funkcji "Lokuj Blok Macierzy"

$$LBM(n, B, w, k) := \left\| \begin{array}{l} A_{n,n} \leftarrow 0 \frac{kN}{m} \\ \text{for } i \in 1 \dots \text{rows}(B) \\ \quad \left\| \begin{array}{l} \text{for } j \in 1 \dots \text{cols}(B) \\ \quad \left\| A_{w+i, k+j} \leftarrow B_{i,j} \right\| \end{array} \right\| \end{array} \right\| A$$

Definicja funkcji "Lokuj Blok Wektora"

$$LBV(n, b, w) := \left\| \begin{array}{l} a_n \leftarrow 0 \frac{kN}{m} \\ \text{for } i \in 1 \dots \text{rows}(b) \\ \quad \left\| a_{w+i} \leftarrow b_i \right\| \end{array} \right\| a$$

$$n_e := Lss \cdot (Wp_e - 1) \quad k_e := Lss \cdot (Wk_e - 1)$$

$$K := \sum_e \left(LBM(Lr, J_e, n_e, n_e) + LBM(Lr, J_e, k_e, k_e) - LBM(Lr, J_e, n_e, k_e) - LBM(Lr, J_e, k_e, n_e) \right)$$

$$K = \begin{bmatrix} 7859.303 & 2910.135 & -2506.211 & -2673.291 & -3545.381 & 443.173 & -1807.711 & -680.017 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 2910.135 & 3162.713 & -2673.291 & -2851.511 & 443.173 & -55.397 & -680.017 & -255.806 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -2506.211 & -2673.291 & 9699.939 & -700.343 & -227.113 & 840.320 & -6966.615 & 2533.315 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -2673.291 & -2851.511 & -700.343 & 6881.898 & 840.320 & -3109.182 & 2533.315 & -921.205 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -3545.381 & 443.173 & -227.113 & 840.320 & 10863.664 & 1535.891 & -1229.589 & -1831.963 & -2316.199 & -1430.594 & -3545.381 & 443.173 \\ 443.173 & -55.397 & 840.320 & -3109.182 & 1535.891 & 6833.017 & -1831.963 & -2729.439 & -1430.594 & -883.602 & 443.173 & -55.397 \\ -1807.711 & -680.017 & -6966.615 & 2533.315 & -1229.589 & -1831.963 & 22195.491 & -4454.636 & -12191.577 & 4433.301 & 0.000 & 0.000 \\ -680.017 & -255.806 & 2533.315 & -921.205 & -1831.963 & -2729.439 & -4454.636 & 5518.560 & 4433.301 & -1612.109 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -2316.199 & -1430.594 & -12191.577 & 4433.301 & 14953.089 & -4932.396 & -445.313 & 1929.689 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -1430.594 & -883.602 & 4433.301 & -1612.109 & -4932.396 & 10857.696 & 1929.689 & -8361.984 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & -3545.381 & 443.173 & 0.000 & 0.000 & -445.313 & 1929.689 & 3990.694 & -2372.861 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 443.173 & -55.397 & 0.000 & 0.000 & 1929.689 & -8361.984 & -2372.861 & 8417.381 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$\det \left(K \cdot \frac{m}{kN} \right) = 1.268063 \cdot 10^{-2}$$

Tworzenie wektorów sił węzłowych

Wektor obciążenia statycznego

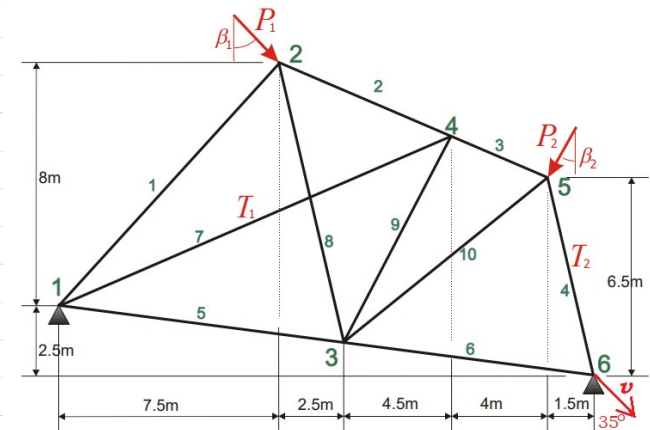
$$pF_{Lr} := 0 \text{ kN} \quad P1 := 5 \text{ kN} \quad \beta1 := 12 \text{ deg}$$

$$P2 := 7 \text{ kN} \quad \beta2 := 29 \text{ deg}$$

$$pF_3 := P1 \cdot \sin(\beta1) \quad pF_4 := -P1 \cdot \cos(\beta1)$$

$$pF_9 := -P2 \cdot \sin(\beta2) \quad pF_{10} := -P2 \cdot \cos(\beta2)$$

$$pF = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.04 \\ -4.891 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3.394 \\ -6.122 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN}$$



Wektor obciążenia termicznego

$$pT_{Lr} := 0 \text{ kN} \quad t_e := \alpha t \cdot \frac{T_e \cdot A_e \cdot E}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} Lx_e \\ Ly_e \end{bmatrix} \quad i := 1 \dots Lss \quad pT_{n_e+i} := pT_{n_e+i} + (t_e)_i \quad pT_{k_e+i} := pT_{k_e+i} - (t_e)_i$$

$$pT = \begin{bmatrix} 33.123 \\ 12.46 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -33.123 \\ -12.46 \\ 20.041 \\ -86.844 \\ -20.041 \\ 86.844 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Wektor obciążenia grawitacyjnego

$$q_e := \frac{\gamma \cdot A_e \cdot L_e}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad pQ_{Lr} := 0 \text{ kN} \quad pQ_{n_e+2} := pQ_{n_e+2} + (q_e)_2 \quad pQ_{k_e+2} := pQ_{k_e+2} + (q_e)_2$$

$$pQ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.287 \\ 0 \\ 0.265 \\ 0 \\ 0.308 \\ 0 \\ 0.275 \\ 0 \\ 0.183 \\ 0 \\ 0.144 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

p - Globalny wektor sił węzłowych

$$p := pF - pT - pQ$$

Kopiowanie macierzy sztywności i wektora p przed modyfikacją

$$K0 := K \quad p0 := p$$

$$p = \begin{bmatrix} -33.123 \\ -12.747 \\ 1.04 \\ -5.155 \\ 0 \\ -0.308 \\ 33.123 \\ 12.185 \\ -23.435 \\ 80.539 \\ 20.041 \\ -86.989 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Modyfikacja macierzy K i wektora p prowadząca do uwzględnienia warunków brzegowych

$$Wb := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix} \quad w := 1 \dots \text{rows}(Wb) \quad c := 1 \dots Lr \quad K_{Wb_w, c} := 0 \quad K_{Wb_w, Wb_w} := 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad p_{Wb_w} := 0$$

$$\text{Wymuszanie przemieszczeń na podporze w węźle nr 6 (11 i 12 równanie)} \quad v := 3.5 \text{ cm} \quad \beta := 35 \text{ deg} \quad p_{11} := v \cdot \sin(\beta) \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad p_{12} := -v \cdot \cos(\beta) \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2506 & -2673 & 9700 & -700 & -227 & 840 & -6967 & 2533 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2673 & -2852 & -700 & 6882 & 840 & -3109 & 2533 & -921 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3545 & 443 & -227 & 840 & 10864 & 1536 & -1230 & -1832 & -2316 & -1431 & -3545 & 443 \\ 443 & -55 & 840 & -3109 & 1536 & 6833 & -1832 & -2729 & -1431 & -884 & 443 & -55 \\ -1808 & -680 & -6967 & 2533 & -1230 & -1832 & 22195 & -4455 & -12192 & 4433 & 0 & 0 \\ -680 & -256 & 2533 & -921 & -1832 & -2729 & -4455 & 5519 & 4433 & -1612 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2316 & -1431 & -12192 & 4433 & 14953 & -4932 & -445 & 1930 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1431 & -884 & 4433 & -1612 & -4932 & 10858 & 1930 & -8362 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad \det\left(K \cdot \frac{\text{m}}{\text{kN}}\right) = 4.16642 \cdot 10^{30} \quad p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.039558 \\ -5.155445 \\ 0 \\ -0.308001 \\ 33.122537 \\ 12.185101 \\ -23.434672 \\ 80.538697 \\ 0.020075 \\ -0.02867 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Rozwiązanie układu równań

$$u := \text{lsolve}(K, p)$$

Obliczenie reakcji podpór

$$r := KO \cdot u - p0$$

$$u = \begin{bmatrix} -0.000 \\ 0.000 \\ 16.816 \\ -15.155 \\ 11.039 \\ -14.182 \\ 17.073 \\ -15.521 \\ 14.858 \\ -20.456 \\ 20.075 \\ -28.670 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

$$r = \begin{bmatrix} -34.237 \\ 9.048 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 36.591 \\ 3.427 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Obliczanie sił wewnętrznych

$$\varepsilon_e := \frac{u_{k_e+1} - u_{n_e+1}}{L_e} \cdot \frac{Lx_e}{L_e} + \frac{u_{k_e+2} - u_{n_e+2}}{L_e} \cdot \frac{Ly_e}{L_e} - \alpha t \cdot T_e \quad \text{-- odkształcenia}$$

$$\sigma_e := E \cdot \varepsilon_e \quad \text{-- naprężenia}$$

$$N_e := \sigma_e \cdot A_e \quad \text{-- siły wewnętrzne}$$

$$\sigma = \begin{bmatrix} 2.918 \\ 3.545 \\ -6.688 \\ -10.174 \\ 90.825 \\ 76.898 \\ -30.835 \\ -18.387 \\ 20.071 \\ -0.348 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

$$N = \begin{bmatrix} 2.381 \\ 2.893 \\ -5.458 \\ -8.302 \\ 45.776 \\ 38.757 \\ -13.691 \\ -8.164 \\ 8.912 \\ -0.154 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

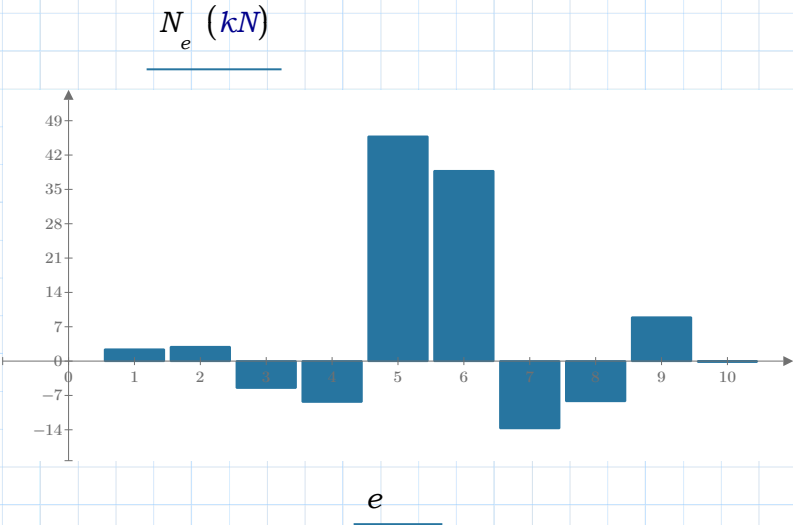
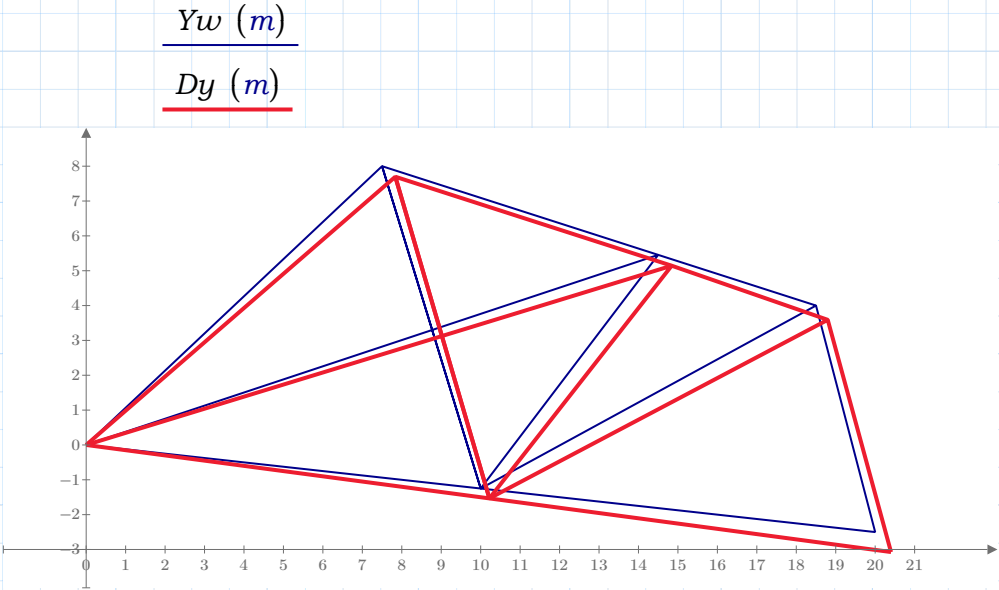
Rysunek odkształconej kratownicy i wykres sił wewnętrznych

s:= 1 .. rows(Q)

skala:= 20

$$Dx_s := X_{Q_s} + skala \cdot u_{Q_s \cdot Lss - 1}$$

$$Dy_s := Y_{Q_s} + skala \cdot u_{Q_s \cdot Lss}$$



$Xw \ (m)$

$Dx \ (m)$