Statyka kratownicy o 3 różnych przekrojach prętów,
obciążonej siłami, temperaturą i ciężarem własnym

$ORIGIN := 1$ *- ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy*

$E := 70GPa$ *- moduł Younga aluminium*

$\alpha t := 2.3 \cdot 10^{-5}$ *- wspólczynnik rozszerzalności cieplnej*

$\rho := 2700 \dfrac{kg}{m^3}$ *- gęstość materiału*

$\gamma := \rho \cdot g$ *- ciężar właściwy*

Parametry przekrojów kratownicy (rury kwadratowe)

$a1 := 7cm \qquad a2 := 6cm \qquad a3 := 5cm$

$g1 := 4mm \qquad g2 := 4mm \qquad g3 := 3mm$

$A1 := 4 \cdot g1 \cdot (a1 - g1)$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 1...4* $A1 = 10.560 \cdot cm^2$

$A2 := 4 \cdot g2 \cdot (a2 - g2)$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 5, 6* $A2 = 8.960 \cdot cm^2$

$A3 := 4 \cdot g3 \cdot (a3 - g3)$ *- Pole powierzchni przekroju elementów 7...10* $A3 = 5.640 \cdot cm^2$

Numery węzłów początkowych (Wp) i końcowych (Wk) elementów

$$Wp := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad Wk := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad A := \begin{pmatrix} A1 \\ A1 \\ A1 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A3 \\ A3 \\ A3 \\ A3 \end{pmatrix} \qquad T := \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Współrzędne węzłów kratownicy

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 8 \\ 9.8 \\ 13 \end{pmatrix} m \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-4 \cdot 1}{13} \\ 6 \\ \frac{-8 \cdot 1}{13} \\ 1.7 \\ -1 \end{pmatrix} m$$

$$\alpha 3 := atan\left(\frac{7}{8}\right) = 41.186\, deg$$

$$\alpha 6 := atan\left(\frac{1}{13}\right) = 4.399\, deg$$

$$\beta := \alpha 3 - \alpha 6 = 36.787\, deg$$

$$L6 := \sqrt{\left(X_6 - X_4\right)^2 + \left(Y_6 - Y_4\right)^2}$$

Parametry pomocnicze:

$Lss := 2$ *- Liczba stopni swobody węzła*

$Le := \text{rows}(Wp)$ *- Liczba elementów*

$Lw := \text{rows}(X)$ *- Liczba węzłów*

$Lr := Lss \cdot Lw$ *- Liczba równań* $\quad Lr = 12$

$Ko_{Lr, Lr} := 0$ *Deklaracja globalnej macierzy sztywności i wypełnienie jej zerami*

$$L3 := L6 \cdot cos(\beta) = 4.016\,m$$

Pętla po wszystkich elementach kratownicy

$$Y_5 := L3 \cdot sin(\alpha 3) + Y_6 = 1.644656\,m$$

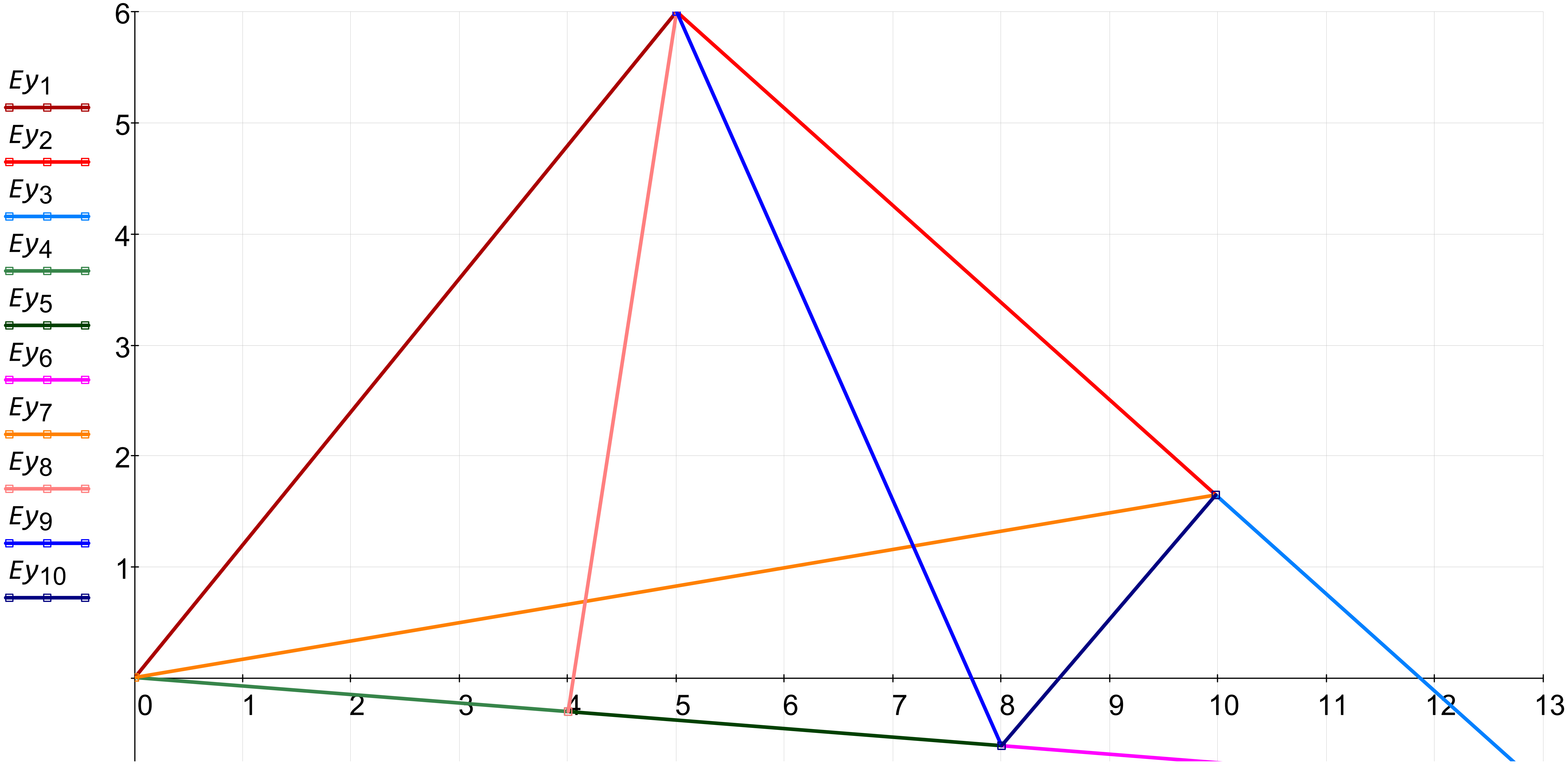
$$e := 1 .. Le$$

$$X_5 := X_6 - L3 \cdot cos(\alpha 3) = 9.977536\,m$$

Rysunek elementów kratownicy pozwala kontrolować poprawność wprowadzonych danych

$$Ex_e := \begin{bmatrix} X_{(Wp_e)} \\ X_{(Wk_e)} \end{bmatrix} \qquad Ey_e := \begin{bmatrix} Y_{(Wp_e)} \\ Y_{(Wk_e)} \end{bmatrix}$$

Ex, Ey - współrzędne węzłów elementów kratownicy



$Ex_1, Ex_2, Ex_3, Ex_4, Ex_5, Ex_6, Ex_7, Ex_8, Ex_9, Ex_{10}$

Macierze sztywności elementów kratownicy

$Lx_e := X_{(Wk_e)} - X_{(Wp_e)}$ $\quad Ly_e := Y_{(Wk_e)} - Y_{(Wp_e)}$ $\quad L_e := \sqrt{(Lx_e)^2 + (Ly_e)^2}$ $\quad J_e := \frac{E \cdot A_e}{(L_e)^3} \cdot \begin{bmatrix} (Lx_e)^2 & Lx_e \cdot Ly_e \\ Lx_e \cdot Ly_e & (Ly_e)^2 \end{bmatrix}$

$Lx =$

	1
1	5.000
2	4.978
3	3.022
4	4.000
5	4.000
6	5.000
7	9.978
8	1.000
9	3.000
10	1.978

m

$Ly =$

	1
1	6.000
2	-4.355
3	-2.645
4	-0.308
5	-0.308
6	-0.385
7	1.645
8	6.308
9	-6.615
10	2.260

m

$L =$

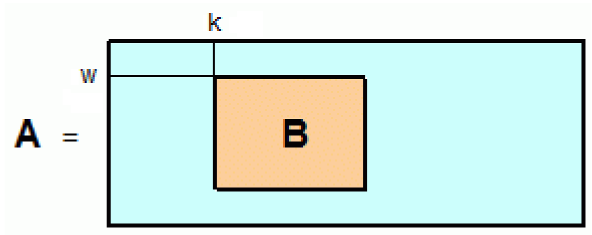
	1
1	7.810
2	6.614
3	4.016
4	4.012
5	4.012
6	5.015
7	10.112
8	6.386
9	7.264
10	3.003

m

Funkcja LBM - Lokuj Blok Macierzy, używana przy agregacji macierzy sztywności i wektora obciążeń termicznych

LBM (A, B, w, k)

ZNACZENIE PARAMETRÓW:
A - nazwa macierzy
B - nazwa bloku
w - numer wiersza, od którego zostanie wprowadzony blok
k - numer kolumny, od której zostanie wprowadzony blok
UWAGA: Macierz B zostanie ulokowana w większej macierzy A,
poczynając od elementu usytuowanego w wierszu o numerze "w"
i kolumnie o numerze "k".



$$LBM(A, B, w, k) := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..\ rows(B) \\ \quad \text{for } j \in 1..\ cols(B) \\ \quad\quad A_{w+i-1,\, k+j-1} \leftarrow B_{i,j} \\ A \end{array} \right.$$

Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej

$n_e := Lss \cdot Wp_e - 1 \quad k_e := Lss \cdot Wk_e - 1$ *<--- numery stopni swobody węzłów początkowych (n_e) i końcowych (k_e)*

$$K := \sum_e \left(LBM\left(Ko, J_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, J_e, k_e, k_e\right) - LBM\left(Ko, J_e, n_e, k_e\right) - LBM\left(Ko, J_e, k_e, n_e\right) \right)$$

$K =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	23222	4086	-15542	1196	-3879	-4655	0	0	-3801	-627	0	0
2	4086	5781	1196	-92	-4655	-5586	0	0	-627	-103	0	0
3	-15542	1196	31235	-1435	-152	-956	-15542	1196	0	0	0	0
4	1196	-92	-1435	6214	-956	-6030	1196	-92	0	0	0	0
5	-3879	-4655	-152	-956	11287	-1972	-927	2044	-6330	5539	0	0
6	-4655	-5586	-956	-6030	-1972	20970	2044	-4508	5539	-4846	0	0
7	0	0	-15542	1196	-927	2044	34603	2319	-5701	-6515	-12433	956
8	0	0	1196	-92	2044	-4508	2319	12119	-6515	-7446	956	-74
9	-3801	-627	0	0	-6330	5539	-5701	-6515	26256	-7518	-10424	9121
10	-627	-103	0	0	5539	-4846	-6515	-7446	-7518	20377	9121	-7981
11	0	0	0	0	0	0	-12433	956	-10424	9121	22858	-10078
12	0	0	0	0	0	0	956	-74	9121	-7981	-10078	8055

$\cdot \dfrac{kN}{m}$

$$\left| K \cdot \frac{m}{kN} \right| = 4.883 \times 10^{1}$$

Globalna macierz sztywności **K** *bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.* |**K**|=0

Aby obliczyć wyznacznik macierzy, której elementy nie są liczbami bezwymiarowymi musimy macierz pomnożyć przez odwrotność jednostek aby doprowadzić elementy do postaci bezwymiarowej - to jest wymóg MatCada.

Zamiast zera wyznacznik może być "bardzo małą" liczbą ze względu na niedostateczną dokładność wyrazów macierzy sztywności.

Wektor sił węzłowych $pP_{Lr} := 0$

$$pP_5 := -8kN \cdot sin(35deg) \qquad pP_6 := -8kN \cdot cos(35deg)$$

$$pP_9 := -9kN \cdot sin(40deg) \qquad pP_{10} := -9kN \cdot cos(40deg)$$

$pP =$ $\cdot kN$

	1
1	0.000
2	0.000
3	0.000
4	0.000
5	-4.589
6	-6.553
7	0.000
8	0.000
9	-5.785
10	-6.894
11	0.000
12	0.000

Wektory obciążeń termicznych elementów

$$t_e := \alpha t \cdot T_e \cdot \frac{E \cdot A_e}{L_e} \cdot \begin{pmatrix} Lx_e \\ Ly_e \end{pmatrix} \qquad pTo_{Lr} := 0$$

Agregacja wektora obciążeń termicznychobalny wektor obciążeń termicznych

$$pT := \sum_e \left(LBM\left(pTo, t_e, n_e, 1\right) - LBM\left(pTo, t_e, k_e, 1\right)\right)$$

Wektory obciążeń grawitacyjnych

$$q_e := \frac{A_e \cdot L_e \cdot \gamma}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad pGo_{Lr} := 0$$

Agregacja wektora obciążeń termicznychobalny wektor obciążeń termicznych

$$pG := \sum_e \left(LBM\left(pGo, q_e, n_e, 1\right) + LBM\left(pGo, q_e, k_e, 1\right)\right)$$

$pG =$ $\cdot kN$

	1
1	0.000
2	-0.232
3	0.000
4	-0.143
5	0.000
6	-0.304
7	0.000
8	-0.184
9	0.000
10	-0.247
11	0.000

$pT =$ $\cdot kN$

	1
1	50.571
2	42.137
3	0.000
4	0.000
5	-36.403
6	-30.913
7	3.750
8	-8.270
9	-17.919
10	-2.954
11	0.000

$pP =$ $\cdot kN$

	1
1	0.000
2	0.000
3	0.000
4	0.000
5	-4.589
6	-6.553
7	0.000
8	0.000
9	-5.785
10	-6.894
11	0.000

$p0 := pP - pT + pG$ **p** *- Wektor prawej strony układu równań*

12	-0.116

12	0.000

12	0.000

Kopiowanie macierzy **K** *przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$$K0 := K$$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$$s := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$ *- globalne numery przemieszczeń więzów blokowanych na podporach*

$p0 =$

	1
1	-50.571
2	-42.369
3	0.000
4	-0.143
5	31.814
6	24.056
7	-3.750
8	8.086
9	12.134
10	-4.187
11	0.000
12	-0.116

$\cdot kN$

$$j := 1 .. \ rows(s) \qquad i := 1 .. \ Lr$$

$K0_{s_j, i} := 0$ *zerowanie wierszy* $p0_{(s_j)} := 0$

$K0_{s_j, s_j} := 1 \dfrac{kN}{m}$ *wstawianie jedności na przekątną macierzy sztywności*

$K0 =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-15542	1196	31235	-1435	-152	-956	-15542	1196	0	0	0	0
4	1196	-92	-1435	6214	-956	-6030	1196	-92	0	0	0	0
5	-3879	-4655	-152	-956	11287	-1972	-927	2044	-6330	5539	0	0
6	-4655	-5586	-956	-6030	-1972	20970	2044	-4508	5539	-4846	0	0
7	0	0	-15542	1196	-927	2044	34603	2319	-5701	-6515	-12433	956
8	0	0	1196	-92	2044	-4508	2319	12119	-6515	-7446	956	-74
9	-3801	-627	0	0	-6330	5539	-5701	-6515	26256	-7518	-10424	9121
10	-627	-103	0	0	5539	-4846	-6515	-7446	-7518	20377	9121	-7981
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$\cdot \dfrac{kN}{m}$

$$\left| K0 \cdot 1 \frac{m}{kN} \right| = 7.645756 \times 10^{32}$$ *- wyznacznik macierzy* **K** *jest zawsze większy od zera,* $|\mathbf{K}| > 0$

Rozwiązanie układu równań:

$u := lsolve(K0, p0)$

u - wektor przemieszczeń węzłowych

$max(u) = 3.460 \cdot mm$

$min(u) = 0.000 \cdot mm$

$u =$ (·mm)

	1
1	0.000
2	0.000
3	0.227
4	3.399
5	3.460
6	2.910
7	0.157
8	2.964
9	1.841
10	1.359
11	0.000
12	0.000

$p0 =$ (·kN)

	1
1	0.000
2	0.000
3	0.000
4	-0.143
5	31.814
6	24.056
7	-3.750
8	8.086
9	12.134
10	-4.187
11	0.000
12	0.000

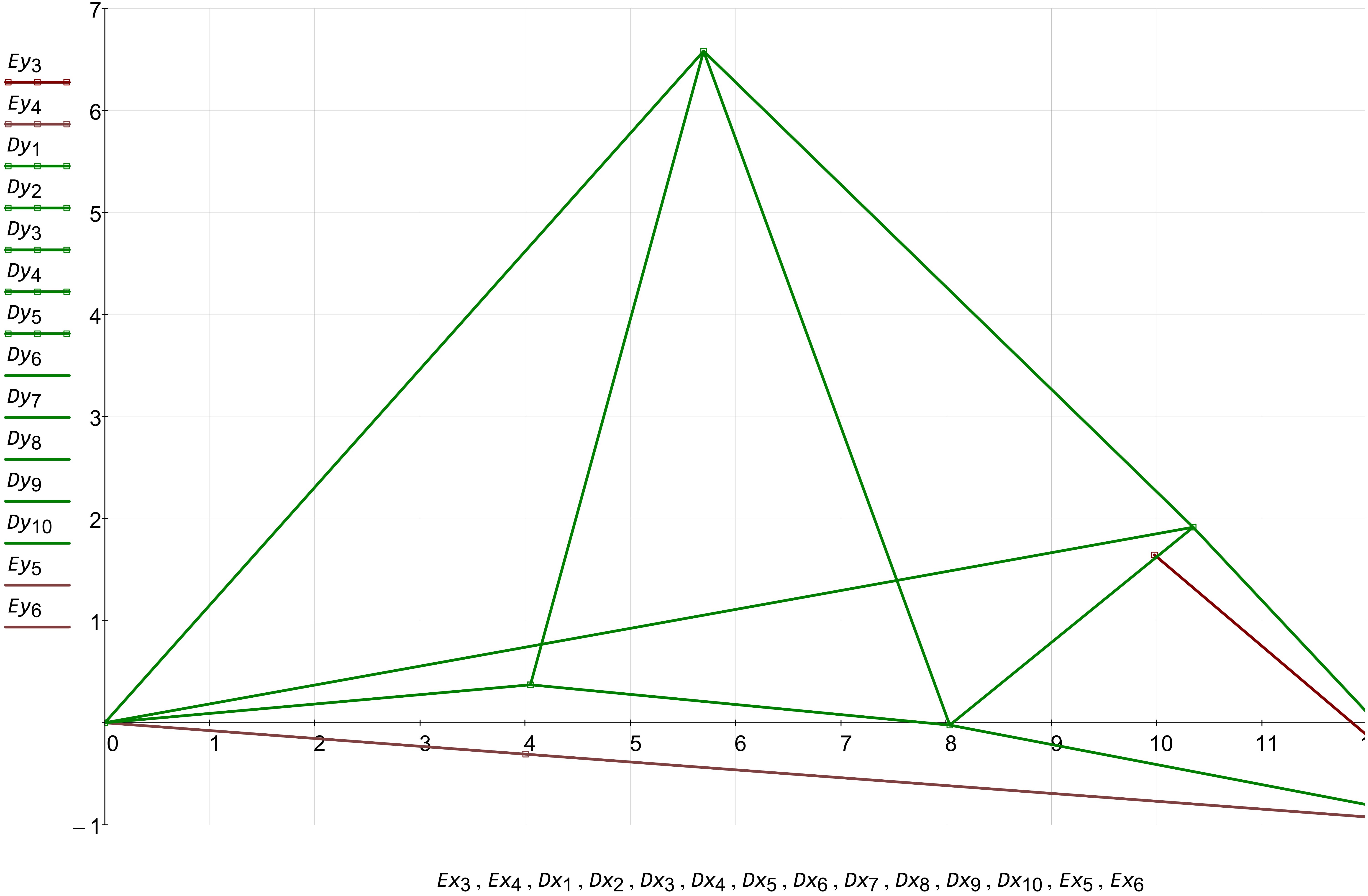
$K \cdot u =$ (·kN)

	1
1	-34.277
2	-33.693
3	0.000
4	-0.143
5	31.814
6	24.056
7	-3.750
8	8.086
9	12.134
10	-4.187
11	-5.921
12	5.881

Rysunek przemieszczeń kratownicy pozwala kontrolować poprawność otrzymanych wyników

$skala := 200$

$$Dx_e := Ex_e + skala \cdot \begin{bmatrix} u_{(2 \cdot Wp_e - 1)} \\ u_{(2 \cdot Wk_e - 1)} \end{bmatrix} \qquad Dy_e := Ey_e + skala \cdot \begin{bmatrix} u_{(2 \cdot Wp_e)} \\ u_{(2 \cdot Wk_e)} \end{bmatrix}$$



Ey_3
Ey_4
Dy_1
Dy_2
Dy_3
Dy_4
Dy_5
Dy_6
Dy_7
Dy_8
Dy_9
Dy_{10}
Ey_5
Ey_6
7
6
5
4
3
2
1
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
Ex_3 , Ex_4 , Dx_1 , Dx_2 , Dx_3 , Dx_4 , Dx_5 , Dx_6 , Dx_7 , Dx_8 , Dx_9 , Dx_{10} , Ex_5 , Ex_6

Obliczenie reakcji podpór

$$r := K \cdot u - pP + pT - pG$$

$$max(r) = 16.294 \cdot kN$$

$r =$

	1
1	16.294
2	8.676
3	0.000
4	0.000
5	0.000
6	-0.000
7	0.000
8	0.000
9	-0.000
10	0.000
11	-5.921
12	5.996

$\cdot kN$

$$max(u) = 3.460 \cdot mm$$

$$min(u) = 0.000\, mm$$

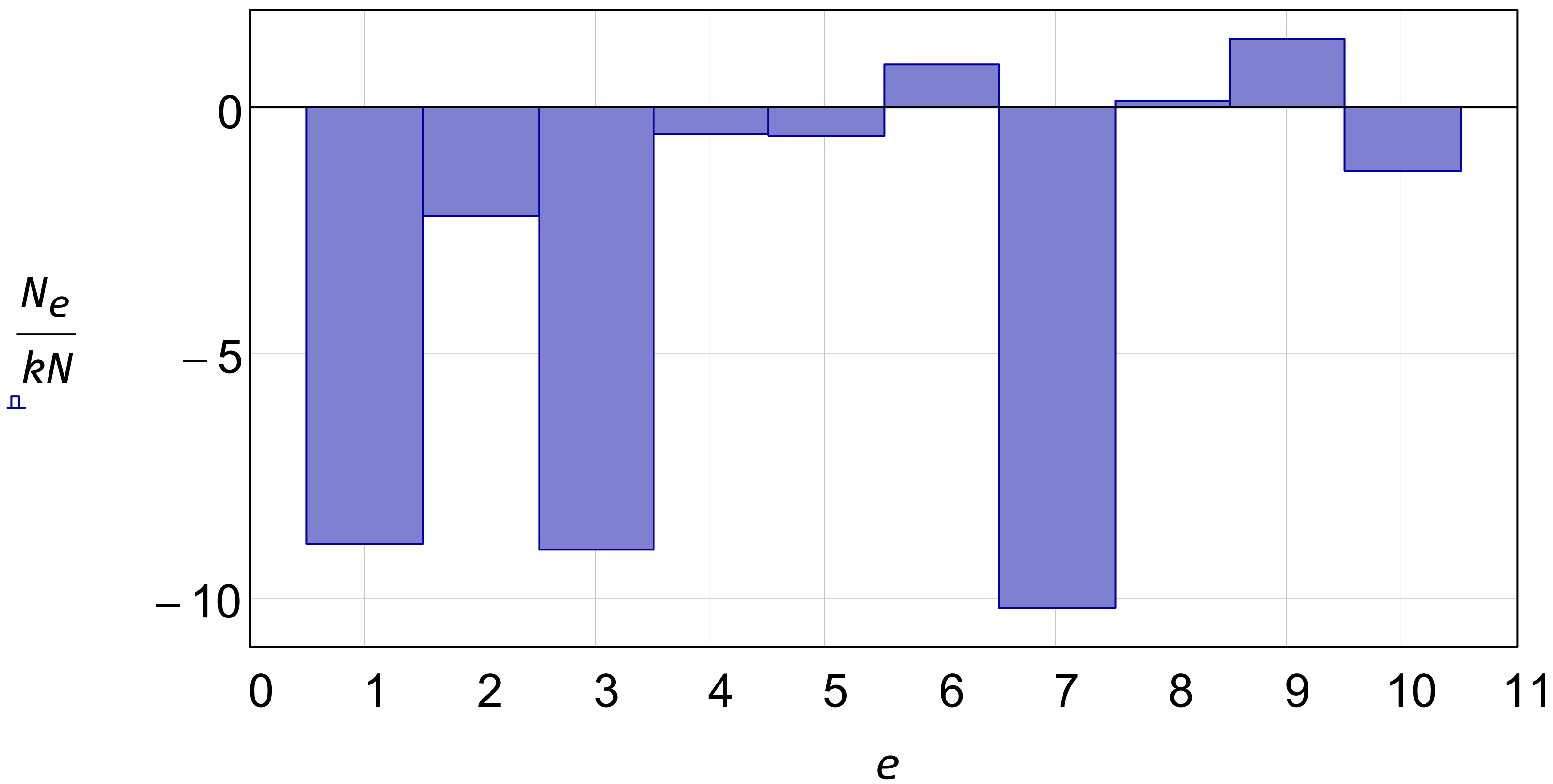
Obliczenie sił wewnętrznych

$$N_e := \frac{E \cdot A_e}{\left(L_e\right)^2} \cdot \left[\left(u_{2 \cdot Wk_e - 1} - u_{2 \cdot Wp_e - 1}\right) \cdot Lx_e + \left(u_{2 \cdot Wk_e} - u_{2 \cdot Wp_e}\right) \cdot Ly_e\right] - E \cdot A_e \cdot \alpha t \cdot T_e$$

$N =$

	1
1	-8.884
2	-2.199
3	-9.033
4	-0.539
5	-0.561
6	0.88
7	-10.205
8	0.143
9	1.4
10	-1.304

$\cdot kN$



Obliczenie naprężeń

$$\sigma_e := \frac{N_e}{A_e}$$

$\sigma =$

	1
1	-8.413
2	-2.082
3	-8.554
4	-0.601
5	-0.626
6	0.982
7	-18.095
8	0.253
9	...

$\cdot MPa$