

ORIGIN := 1

Statyka kratownicy o 3 różnych przekrojach prętów, obciążonej siłami

$E := 70 \text{ GPa}$ - moduł Younga aluminium $\alpha t := 2.31 \cdot 10^{-5}$ $\rho := 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$a1 := 6 \text{ cm}$ $g1 := 3 \text{ mm}$ - parametry przekroju $\gamma := \rho \cdot g = 26.478 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$
 $a2 := 5 \text{ cm}$ $g2 := 3 \text{ mm}$ - rury kwadratowe
 $a3 := 4 \text{ cm}$ $g3 := 3 \text{ mm}$

Współrzędne węzłów kratownicy

Kolejność rysowania elementów

$A1 := 4 \cdot g1 \cdot (a1 - g1) = 6.84 \text{ cm}^2$ - pole powierzchni przekroju elementów 1...4

$A2 := 4 \cdot g2 \cdot (a2 - g2) = 5.64 \text{ cm}^2$ - pole powierzchni przekroju elementów 5..7

$A3 := 4 \cdot g3 \cdot (a3 - g3) = 4.44 \text{ cm}^2$ - pole powierzchni przekroju elementów 8...13

$i := 1..5$ $A_i := A1$ $i := 6..10$ $A_i := A2$ $i := 11..20$ $A_i := A3$

Przyrosty temperatur

$T_{20} := 0$ $T_{11} := -15$ $T_{13} := -20$ $T_{19} := 10$

Przekroje elementów

Numery węzłów początkowych (Wp) i końcowych (Wk) elementów

$A = \begin{bmatrix} 6.84 \\ 6.84 \\ 6.84 \\ 6.84 \\ 6.84 \\ 5.64 \\ 5.64 \\ 5.64 \\ 5.64 \\ 5.64 \\ 4.44 \\ 4.44 \\ 4.44 \\ 4.44 \\ 4.44 \\ 4.44 \\ 4.44 \\ 4.44 \\ 4.44 \\ 4.44 \end{bmatrix} \text{ cm}^2$	$Wp := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$	$Wk := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \\ 11 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \\ 10 \\ 11 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 8 \\ 9 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$	$T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ -20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
---	---	--	---

$Y := \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \cdot \frac{3}{15} \\ 4 - 6 \cdot \frac{3}{12} \\ -2 \cdot \frac{6}{15} \\ -1 \\ 4 - 6 \cdot \frac{6}{12} \\ -2 \cdot \frac{9}{15} \\ 4 - 6 \cdot \frac{9}{12} \\ -2 \cdot \frac{12}{15} \\ -2 \end{bmatrix} \text{ m}$	$X := \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 9 \\ 9 \\ 12 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix} \text{ m}$	$Q := \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \\ 9 \\ 8 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 9 \\ 11 \\ 10 \end{bmatrix}$
--	---	---

$Y_6 := \frac{Y_4 + 2 Y_5}{3}$ - korekta wsp. węzła 6

Parametry pomocnicze:

$Lss := 2$ - Liczba stopni swobody węzła:

$Le := \text{rows}(Wp) = 20$ - Liczba elementów

$Lw := \text{rows}(X) = 11$ - Liczba węzłów

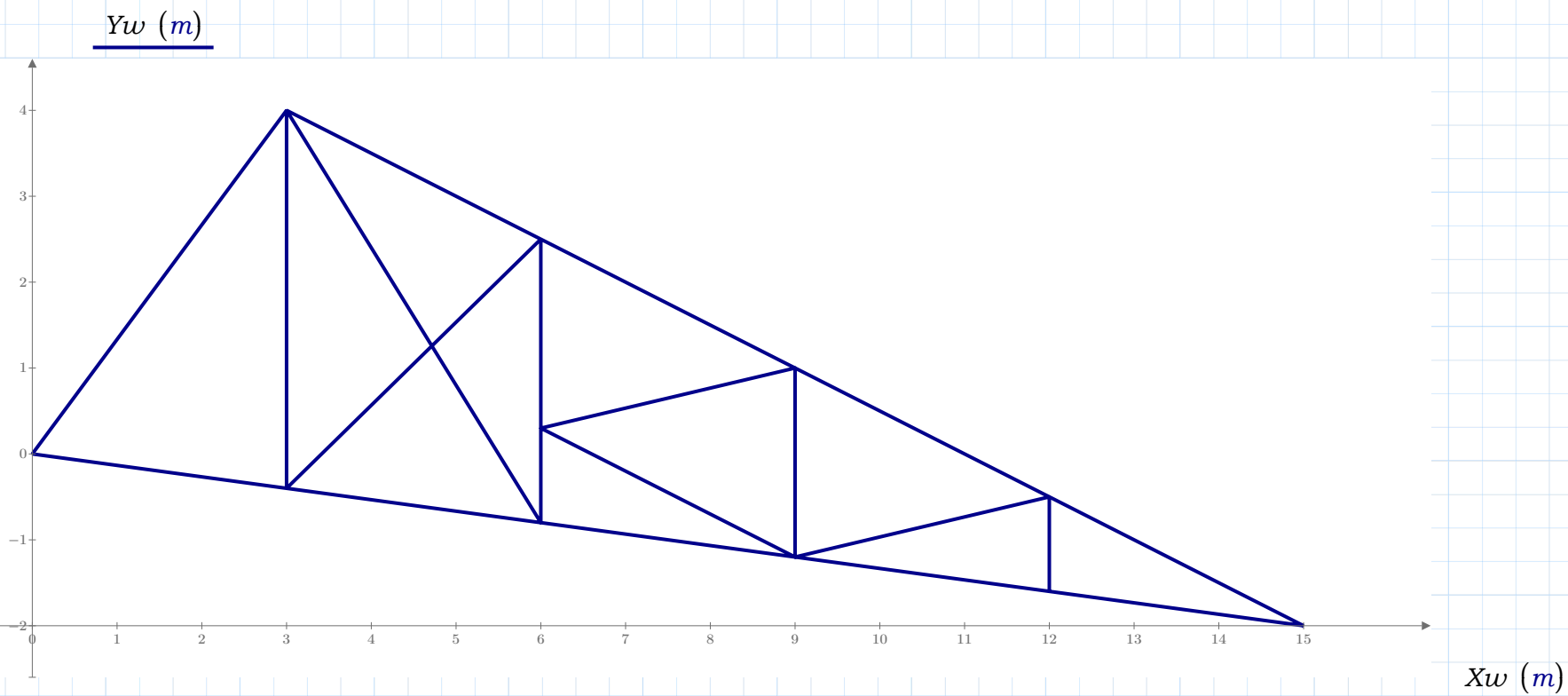
$Lr := Lw \cdot Lss = 22$ - Liczba równań

Rysunek elementów kratownicy pozwala kontrolować poprawność wprowadzonych danych

$i := 1 \dots \text{rows}(Q)$

$Xw_i := X_{Q_i}$

$Yw_i := Y_{Q_i}$



Pętla po wszystkich elementach kratownicy

$e := 1 \dots Le$

Macierze sztywności elementów kratownicy

$$Lx_e := X_{wk_e} - X_{wp_e} \quad Ly_e := Y_{wk_e} - Y_{wp_e} \quad L_e := \sqrt{Lx_e^2 + Ly_e^2}$$

$$J_e := \frac{E \cdot A_e}{L_e^3} \cdot \begin{bmatrix} Lx_e^2 & Lx_e \cdot Ly_e \\ Lx_e \cdot Ly_e & Ly_e^2 \end{bmatrix}$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 3447.4 & 4596.5 \\ 4596.5 & 6128.6 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 11420 & -5710 \\ -5710 & 2855 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} 11420 & -5710 \\ -5710 & 2855 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_4 = \begin{bmatrix} 11420 & -5710 \\ -5710 & 2855 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_5 = \begin{bmatrix} 11420 & -5710 \\ -5710 & 2855 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_6 = \begin{bmatrix} 12816.7 & -1708.9 \\ -1708.9 & 227.9 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_7 = \begin{bmatrix} 12816.7 & -1708.9 \\ -1708.9 & 227.9 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_8 = \begin{bmatrix} 12816.7 & -1708.9 \\ -1708.9 & 227.9 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

$$J_9 = \begin{bmatrix} 12816.7 & -1708.9 \\ -1708.9 & 227.9 \end{bmatrix} \frac{kN}{m}$$

Definicja funkcji "Lokuj Blok Macierzy"

$$LBM(n, B, w, k) := \left\| \begin{array}{l} A_{n,n} \leftarrow 0 \frac{kN}{m} \\ \text{for } i \in 1 \dots \text{rows}(B) \\ \quad \left\| \begin{array}{l} \text{for } j \in 1 \dots \text{cols}(B) \\ \quad A_{w+i, k+j} \leftarrow B_{i,j} \end{array} \right\| \end{array} \right\| A$$

Definicja funkcji "Lokuj Blok Wektora"

$$LBV(n, b, w) := \left\| \begin{array}{l} a_n \leftarrow 0 \text{ kN} \\ \text{for } i \in 1 \dots \text{rows}(b) \\ \quad \left\| \begin{array}{l} a_{w+i} \leftarrow b_i \end{array} \right\| \end{array} \right\| a$$

$$L = \begin{bmatrix} 500 \\ 335.41 \\ 335.41 \\ 335.41 \\ 335.41 \\ 302.655 \\ 302.655 \\ 302.655 \\ 302.655 \\ 302.655 \\ 440 \\ 566.039 \\ \vdots \end{bmatrix} cm$$

$$k_e := LSS \cdot (Wk_e - 1)$$

[illegible]

$$\det\left(K \cdot \frac{m}{kN}\right) = -5.036211 \cdot 10^{43}$$

Wektor obciążenia statycznego

$$P7 := 7 \text{ kN} \quad \beta6 := 21 \text{ deg}$$

$$pF_4 := -P_2 \cdot \cos(\beta_2)$$

$$pF_{14} := -P7 \cdot \cos(\beta6)$$

$$pF = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.589 \\ -6.553 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2.509 \\ -6.535 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad kN$$

Wektor obciążenia termicznego

$$pT_{Lr} := 0 \text{ kN}$$

$$t_e := \alpha t \cdot \frac{T_e \cdot A_e \cdot E}{L_e} \cdot \begin{bmatrix} Lx_e \\ Ly_e \end{bmatrix} \quad i := 1 \dots Lss$$

$$pT_{n_e+i} := pT_{n_e+i} + \begin{pmatrix} t_e \end{pmatrix}_i$$

$$pT_{k_e+i} := pT_{k_e+i} - \begin{pmatrix} t_e \end{pmatrix}_i$$

$$pT = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10.769 \\ -10.324 \\ -20.749 \\ 10.324 \\ 9.98 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 6.992 \\ 1.631 \\ -6.992 \\ -1.631 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Wektor obciążenia grawitacyjnego

$$q_e := \frac{\gamma \cdot A_e \cdot L_e}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$pQ_{Lr} := 0 \text{ kN}$$

$$pQ_{n_e+2} := pQ_{n_e+2} + \begin{pmatrix} q_e \end{pmatrix}_2$$

$$pQ_{k_e+2} := pQ_{k_e+2} + \begin{pmatrix} q_e \end{pmatrix}_2$$

$$pQ = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.068 \\ 0 \\ 0.135 \\ 0 \\ 0.096 \\ 0 \\ 0.098 \\ 0 \\ 0.085 \\ 0 \\ 0.057 \\ 0 \\ 0.092 \\ 0 \\ 0.096 \\ 0 \\ 0.085 \\ 0 \\ 0.052 \\ 0 \\ 0.053 \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Tworzenie wektora obciążenia geometrycznego (premieszczenia węzła 11)- stopnie swobody 21,22

$$\beta_{11} := 40 \text{ deg} \quad v := 3.5 \text{ cm} \cdot \begin{bmatrix} \sin(\beta_{11}) \\ -\cos(\beta_{11}) \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 22.497566 \\ -26.811556 \end{bmatrix} \text{ mm}$$

p - Globalny wektor sił węzłowych

$$p := p_F - p_T - p_Q$$

Kopiowanie macierzy sztywności i wektora p przed modyfikacją

$$K0 := K \quad p0 := p$$

$$p = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.068 \\ 4.589 \\ -17.457 \\ 10.324 \\ 20.653 \\ -10.324 \\ -10.078 \\ 0 \\ -0.085 \\ 0 \\ -0.057 \\ -2.509 \\ -6.627 \\ -6.992 \\ -1.727 \\ \vdots \end{bmatrix} \text{ kN}$$

Modyfikacja macierzy K i wektora p prowadząca do uwzględnienia warunków brzegowych

$$Wb := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 21 \\ 22 \end{bmatrix} \quad w := 1 \dots \text{rows}(Wb) \quad c := 1 \dots Lr \quad K_{Wb_w, c} := 0 \quad K_{Wb_w, Wb_w} := 1 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad p_{Wb_w} := 0 \text{ kN} \quad p_{21} := v_1 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad p_{22} := v_2 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3447 & -4596 & 16410 & -3581 & 0 & 0 & -11420 & 5710 & -1542 & 2468 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4596 & -6129 & -3581 & 19996 & 0 & -7064 & 5710 & -2855 & 2468 & -3948 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12817 & 1709 & 0 & 0 & 29484 & 304 & -3851 & -3722 & -12817 & 1709 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1709 & -228 & 0 & -7064 & 304 & 11117 & -3722 & -3598 & 1709 & -228 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11420 & 5710 & -3851 & -3722 & 26691 & -7698 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11420 & 5710 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5710 & -2855 & -3722 & -3598 & -7698 & 23435 & 0 & 0 & 0 & -14127 & 5710 & -2855 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1542 & 2468 & -12817 & 1709 & 0 & 0 & 27176 & -5886 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12817 & 1709 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2468 & -3948 & 1709 & -228 & 0 & 0 & -5886 & 32659 & 0 & -28255 & 0 & 0 & 1709 & -228 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16981 & -1474 & -9568 & -2233 & -7413 & 3707 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \frac{kN}{m} \\ \end{matrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4.589 \\ -17.457 \\ 10.324 \\ 20.653 \\ -10.324 \\ -10.078 \\ 0 \\ -0.085 \\ 0 \\ -0.057 \\ -2.509 \\ -6.627 \\ -6.992 \\ -1.727 \\ 6.992 \\ 1.546 \\ 0 \\ -0.052 \\ 0.022 \\ -0.027 \end{bmatrix} kN$$

$$\det\left(K \cdot \frac{m}{kN}\right) = 2.46107 \cdot 10^{74}$$

Rozwiązanie układu równań

Obliczenie reakcji podpór

$$u := \text{lsolve}(K, p)$$

$$r := KO \cdot u - pO$$

$$u = \begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 29.793 \\ -23.376 \\ 1.933 \\ -21.663 \\ 19.227 \\ -41.977 \\ 3.999 \\ -41.573 \\ 11.658 \\ -41.836 \\ 13.202 \\ -51.726 \\ 7.789 \\ -51.547 \\ 9.524 \\ -55.936 \\ 12.909 \\ -55.937 \\ 22.498 \\ -26.812 \end{bmatrix} mm$$

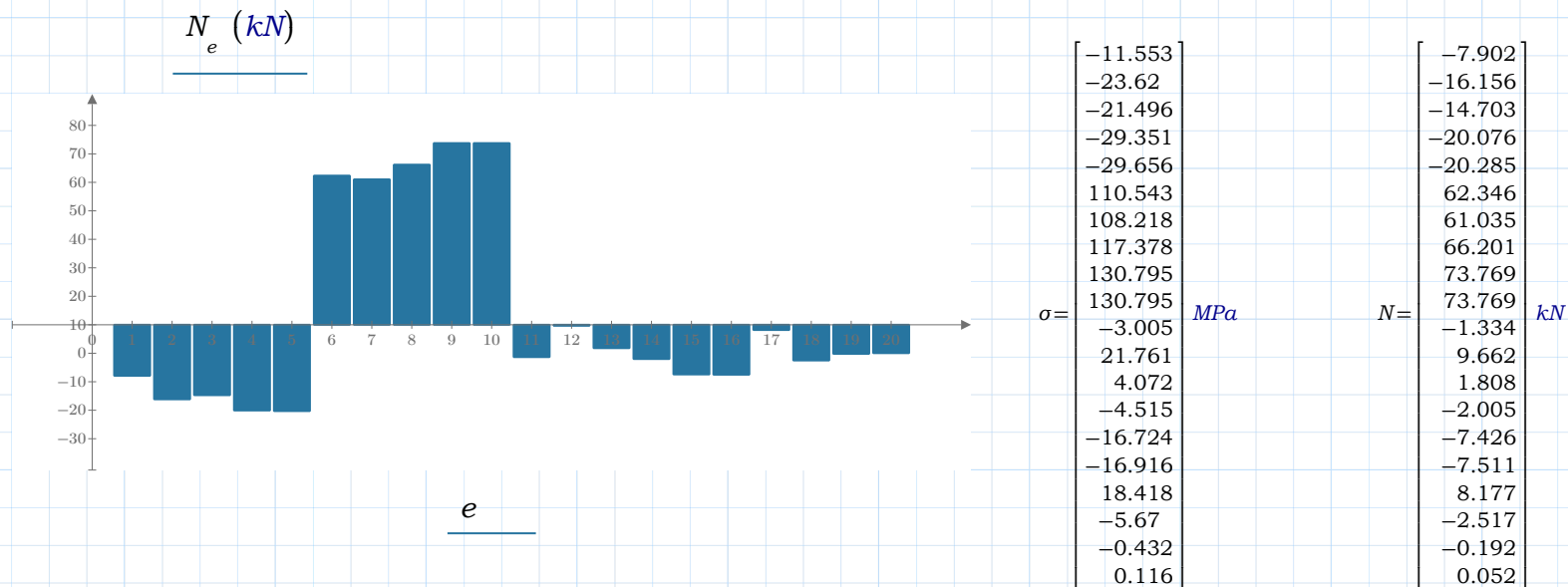
$$r = \begin{bmatrix} -57.058 \\ 14.63 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 54.978 \\ -0.625 \end{bmatrix} kN$$

Obliczanie sił wewnętrznych

$$\varepsilon_e := \frac{u_{k_e+1} - u_{n_e+1}}{L_e} \cdot \frac{Lx_e}{L_e} + \frac{u_{k_e+2} - u_{n_e+2}}{L_e} \cdot \frac{Ly_e}{L_e} \quad \text{-- odkształcenia}$$

$$\sigma_e := E \cdot (\varepsilon_e - \alpha t \cdot T_e) \quad \text{-- naprężenia}$$

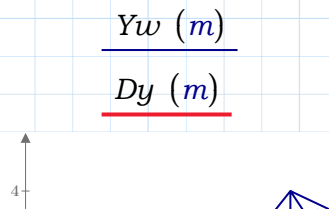
$$N_e := \sigma_e \cdot A_e \quad \text{-- siły wewnętrzne}$$

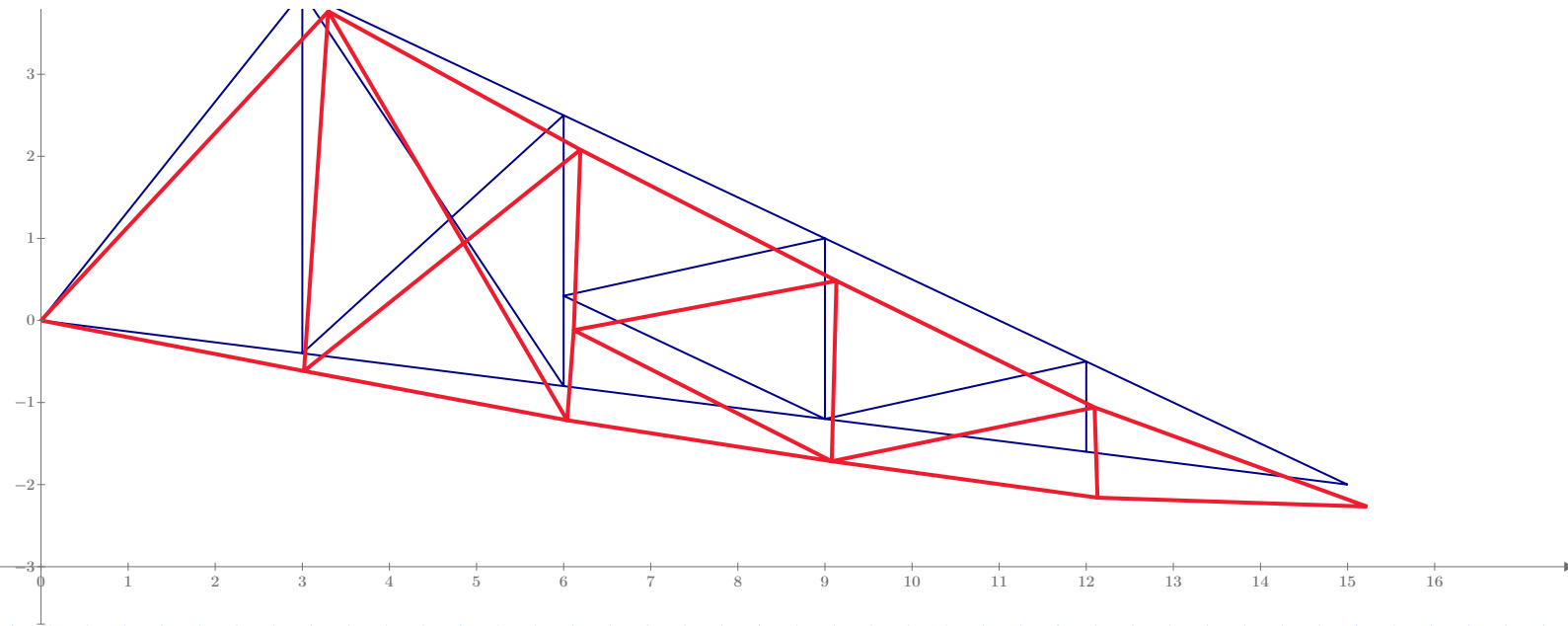


Rysunek odkształconej kratownicy

$s := 1 \dots \text{rows}(Q)$
 $skala := 10$

$Dx_s := X_{Q_s} + skala \cdot u_{Q_s \cdot Lss - 1}$
 $Dy_s := Y_{Q_s} + skala \cdot u_{Q_s \cdot Lss}$





$$\frac{Xw(m)}{Dx(m)}$$