

ROZDZIAŁ III. STATYKA KRATOWNIC PRZESTRZENNYCH

Mimo, że przestrzenne konstrukcje kratowe znane były od dawna (por.[17]), to do niedawna stosowane były stosunkowo rzadko, co być może spowodowane było sporymi kłopotami obliczeniowymi, jakie musiał pokonać inżynier projektujący konstrukcję. Jeżeli dla płaskich kratownic statycznie wyznaczalnych obmyślono szereg metod ułatwiających obliczanie sił wewnętrznych (metoda równowagi węzłów i jej odmiana graficzna - metoda Cremony, metoda przekrojów - Rittera, itp.), to w przypadku kratownic przestrzennych pozostała tylko metoda równowagi węzłów. Duże układy równań, które ta metoda daje dla kratownic przestrzennych zniechęcały do projektowania konstrukcji tego typu. Konstrukcje przestrzenne, z wyglądu kratowe, są w rzeczywistości bardzo rzadko kratownicami np. słynna wieża Eiffla lub słupy wsporcze napowietrznych linii energetycznych, maszty - zwłaszcza te o przekroju czworokątnym, to najczęściej ramy przestrzenne, gdyż utrzymują swoją geometryczną niezmienną dzięki elementom zginanym, które w klasycznych kratownicach nie występują. Użycie komputerów i nowe metody analizy statycznej konstrukcji wykorzystujące te możliwości techniczne (wśród nich jedną z głównych ról pełni metoda elementów skończonych), spowodowały znaczny postęp w konstruowaniu kratownic przestrzennych.

Jednym z najczęstszych, jak nam się wydaje, zastosowań tych konstrukcji są przekrycia strukturalne. Rys.3.1 przedstawia przykłady przestrzennych kratownic.

Rys.3.1

3.1. OZNACZENIA I PODSTAWOWE ZWIĄZKI

Węzeł kratownicy przestrzennej ma trzy stopnie swobody, gdyż w opisie jego ruchu musimy podać trzy składowe wektora przemieszczenia. Rys.3.2 pokazuje przemieszczenia węzłów i siły działające na element kratownicy przestrzennej. Podobnie jak w rozdz. II składowe wektorów sił i przemieszczeń zebrane zostały w macierze kolumnowe, które nazywać będziemy wektorami:

- wektor przemieszczeń węzłowych węzła początkowego i w globalnym układzie współrzędnych:

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_{iX} \\ u_{iY} \\ u_{iZ} \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

- ten sam wektor opisany w lokalnym układzie współrzędnych:

$$\mathbf{u}'_i = \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{iz} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

- wektor sił węzłowych działających w węźle początkowym i elementu zapisany w układzie globalnym:

$$\mathbf{f}_i = \begin{bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ F_{iZ} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

oraz w układzie lokalnym:

$$\mathbf{f}'_i = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Wektory te tworzą wektory sił i przemieszczeń elementu:

- wektor przemieszczeń węzłowych elementu e o węzłach i (początkowy) oraz j (końcowy) zapisujemy w globalnym układzie współrzędnych następująco:

$$\mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{u}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{iX} \\ u_{iY} \\ u_{iZ} \\ u_{jX} \\ u_{jY} \\ u_{jZ} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

jego opis w układzie lokalnym:

$$\mathbf{u}'^e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}'_i \\ \mathbf{u}'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{iz} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \\ u_{jz} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

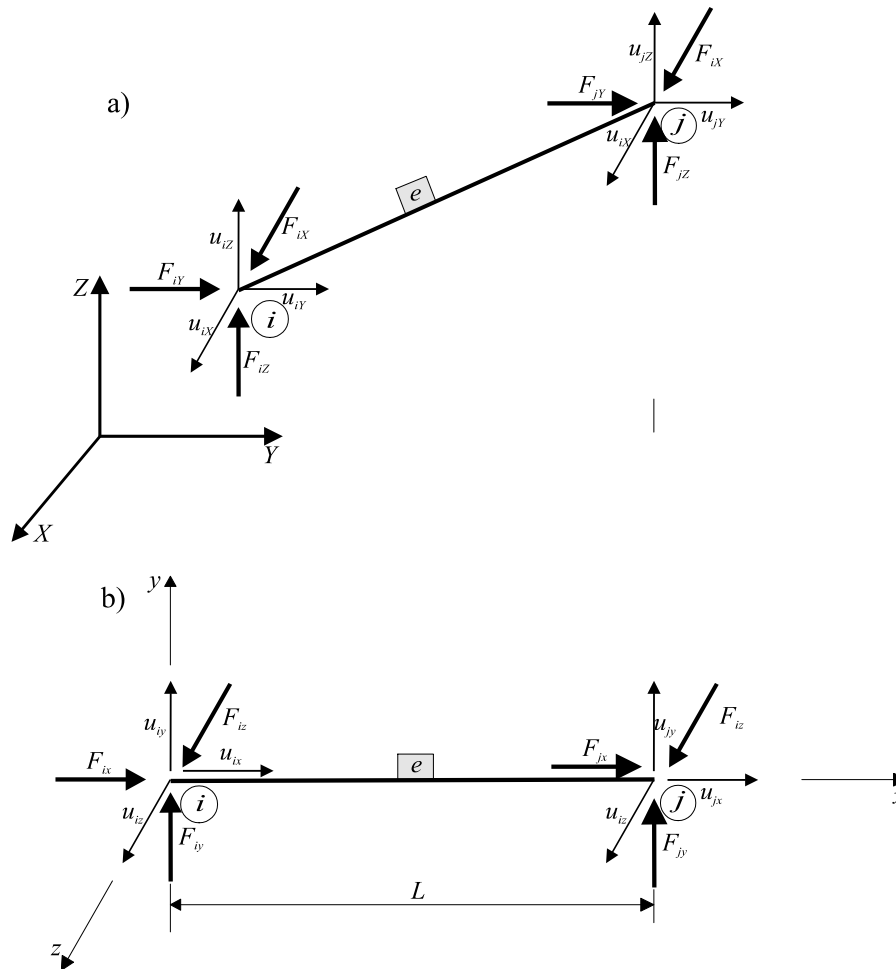
– wektor sił węzłowych elementu w układzie globalnym:

$$\mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ F_{iZ} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \\ F_{jZ} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

oraz w układzie lokalnym:

$$\mathbf{f}'^e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}'_i \\ \mathbf{f}'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{iz} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{jz} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Objaśnienia i znaczenie użytych symboli znaleźć można na Rys.3.2.



Rys.3.2

3.2. MACIERZ SZTYWNOŚCI ELEMENTU KRATOWNICY PRZESTRZENNEJ

Związek między siłami i przemieszczeniami węzłowymi dla kratownicy przestrzennej jest identyczny jak w przypadku kratownicy płaskiej, gdy rozpatrujemy go w lokalnym układzie współrzędnych. Dochodzi oczywiście trzecia siła F_{iz} lub F_{jz} , ale równanie równowagi momentów względem osi y , wymusza zerową wartość tej siły:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sum F_x &= F_{ix} + F_{jx} = 0 \rightarrow F_{ix} = -F_{jx}, \\
 \text{b) } \sum F_y &= F_{iy} + F_{jy} = 0 \xrightarrow{\text{po uwzględnieniu równ. f}} F_{iy} = 0, \\
 \text{c) } \sum F_z &= F_{iz} + F_{jz} = 0 \xrightarrow{\text{po uwzględnieniu równ. e}} F_{iz} = 0, \\
 \text{d) } \sum M_x &= 0, \\
 \text{e) } \sum M_y &= -F_{jz}L = 0 \rightarrow F_{jz} = 0, \\
 \text{f) } \sum M_z &= -F_{iy}L = 0 \rightarrow F_{iy} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Zależność między siłą osiową a przemieszczeniami, identyczna jak w rozdz.II (por. równ. 2.11) pozwoli wyrazić poszukiwaną zależność następująco:

$$\mathbf{f}^{ie} = \mathbf{K}^{ie} \mathbf{u}^{ie}, \quad (3.10)$$

gdzie:

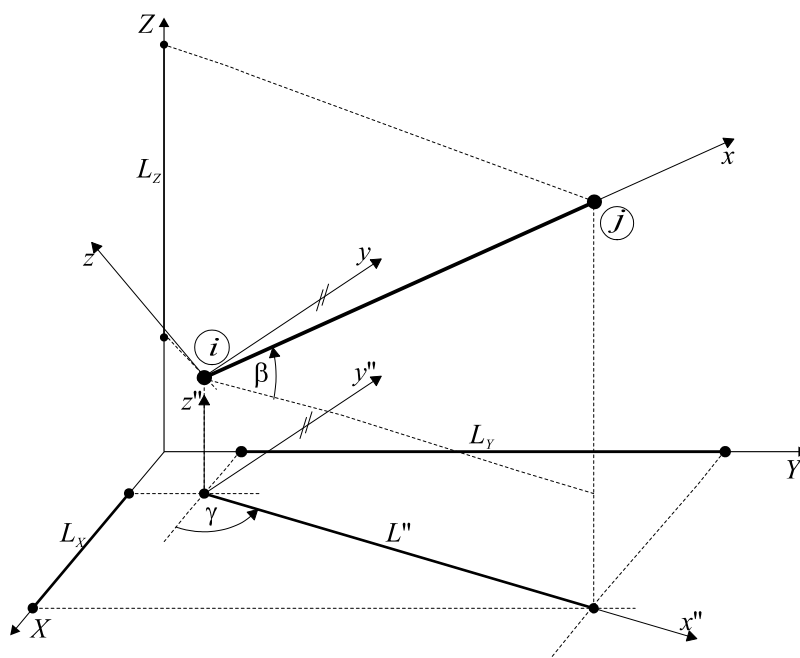
$$\mathbf{K}^{ie} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}' & -\mathbf{J}' \\ -\mathbf{J}' & \mathbf{J}' \end{bmatrix}, \quad (3.10a)$$

$$\mathbf{J}' = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.10b)$$

Przeniesienie zapisu tych równań do układu globalnego wykonamy analogicznie, jak w przypadku kratownicy płaskiej (por. związki 2.33, 2.34, 2.350).

Do zakończenia transformacji macierzy sztywności elementu do układu globalnego brakuje nam macierzy obrotu węzła \mathbf{R}_i oraz wyznaczenia składowych macierzy \mathbf{J} , podobnych do opisanych równaniem (2.37).

Ponieważ położenie osi y i z układu lokalnego nie jest dla prętów kratownicy istotne, to kierunek osi y będziemy wybierali tak aby była ona zawsze równoległa do płaszczyzny XY układu globalnego, a dla prętów równoległych do osi Z dodatkowo założymy, że oś y jest równoległa do osi Y (por. Rys.3.3).



Rys.3.3

Obrót z układu lokalnego do globalnego złożymy z dwóch obrotów pośrednich. Najpierw obrócimy układ xyz do pośredniego układu $x''y''z''$, dobranego tak aby oś x'' była równoległa do płaszczyzny XY , a następnie obrócimy układ $x''y''z''$ o kąt γ tak, aby osie x'' i X były równoległe. Pierwszy obrót wokół osi y daje następujący rezultat:

$$\begin{bmatrix} u_{x''} \\ u_{y''} \\ u_{z''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & -s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix},$$

lub krócej $\mathbf{u}'' = \mathbf{R}_\beta \mathbf{u}'$, (3.11)

gdzie $c_\beta = \cos\beta = \frac{L''}{L}$, $s_\beta = \sin\beta = \frac{L_Z}{L}$, $L_X = X_j - X_i$, $L_Y = Y_j - Y_i$, $L_Z = Z_j - Z_i$,

$$L'' = \sqrt{L_X^2 + L_Y^2}, \quad L = \sqrt{L''^2 + L_Z^2}.$$

Obrót drugi wokół osi z sprowadza związki do układu globalnego:

$$\begin{bmatrix} u_X \\ u_Y \\ u_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{x''} \\ u_{y''} \\ u_{z''} \end{bmatrix}$$

w krótszej formie: $\mathbf{u} = \mathbf{R}_\gamma \mathbf{u}''$, (3.12)

gdzie $c_\gamma = \cos\gamma = \frac{L_X}{L''}$, $s_\gamma = \sin\gamma = \frac{L_Y}{L''}$,

gdy $L''=0$ przyjmujemy $\gamma=0$, a stąd $c_\gamma = 1$ oraz $s_\gamma = 0$.

Złożenie obu obrotów czyli podstawienie równania (3.11) do (3.12) daje poszukiwaną macierz obrotu węzła:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{R}_{i\gamma} \mathbf{R}_{i\beta} \mathbf{u}'_i, \quad (3.13)$$

gdzie $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{i\gamma} \mathbf{R}_{i\beta}$.

Po wykonaniu mnożenia macierzy $\mathbf{R}_{i\gamma} \mathbf{R}_{i\beta}$ otrzymujemy końcową postać macierzy obrotu \mathbf{R}_i :

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} c_\gamma c_\beta & -s_\gamma & -c_\gamma s_\beta \\ s_\gamma c_\beta & c_\gamma & -s_\gamma s_\beta \\ s_\beta & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Transformację bloku \mathbf{J} macierzy sztywności elementu kratownicy przestrzennej z układu lokalnego do globalnego obliczamy analogicznie jak w rozdz. II (por. podobną transformację macierzy sztywności – 2.34)

$$\mathbf{J} = \mathbf{R}_i \mathbf{J}' (\mathbf{R}_i)^T. \quad (3.15)$$

Podstawiając do tego równania związku (3.10b) oraz (3.14) otrzymamy:

$$\mathbf{J} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} (c_\gamma c_\beta)^2 & c_\gamma s_\gamma (c_\beta)^2 & c_\gamma c_\beta s_\beta \\ c_\gamma s_\gamma (c_\beta)^2 & (s_\gamma c_\beta)^2 & s_\gamma c_\beta c_\beta \\ c_\gamma c_\gamma s_\beta & s_\gamma c_\beta s_\beta & (s_\beta)^2 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Po wprowadzeniu wygodnych oznaczeń:

$$C_X = \frac{L_X}{L}, \quad C_Y = \frac{L_Y}{L}, \quad C_Z = \frac{L_Z}{L}, \quad (3.17)$$

które noszą nazwę kosinusów kierunkowych elementu, otrzymujemy bardzo prostą postać bloku \mathbf{J} macierzy sztywności:

$$\mathbf{J} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C_X^2 & C_X C_Y & C_X C_Z \\ C_X C_Y & C_Y^2 & C_Y C_Z \\ C_X C_Z & C_Y C_Z & C_Z^2 \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Związek (3.18) po wstawieniu do (3.10a) daje nam macierz sztywności pręta kratownicy przestrzennej w układzie globalnym.

3.3. WEKTOR OCIAŻEŃ TERMICZNYCH ELEMENTU KRATOWNICY PRZESTRZENNEJ

Ponieważ tworzenie wektora obciążeń kratownicy dla obciążenia siłami skupionymi jest identyczne jak w kratownicy płaskiej, stąd też pominiemy omawiania wektora \mathbf{p} . Zajmiemy się natomiast wektorem sił węzłowych wywołanych obciążeniem termicznym. W lokalnym układzie współrzędnych składowe tego wektora są identyczne (poza poprawką na trzecią składową wektora!) jak dla kratownicy płaskiej (2.70).

$$\mathbf{f}'^{et} = EA\alpha_t \Delta t_o \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Transformacja do układu globalnego przebiega zgodnie z równaniem (2.31) następująco:

$$\mathbf{f}^{et} = \mathbf{R}^e \mathbf{f}'^{et}, \quad (3.20)$$

gdzie \mathbf{R}^e jest macierzą obrotu elementu:

$$\mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_j \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Ponieważ element kratownicy jest prosty, to $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_j$, gdzie macierz \mathbf{R}_i określona jest równaniem (3.14).

Po wykonaniu podstawienia równania (3.14) do (3.20) i wykonaniu mnożenia otrzymamy:

$$\mathbf{f}^{et} = EA\alpha_i \Delta t_o \begin{bmatrix} c_\gamma c_\beta \\ s_\gamma c_\beta \\ s_\beta \\ -c_\gamma c_\beta \\ -s_\gamma c_\beta \\ -s_\beta \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

lub w nieco innej postaci:

$$\mathbf{f}^{et} = EA\alpha_i \Delta t_o \begin{bmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \\ -C_X \\ -C_Y \\ -C_Z \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Dalsze postępowanie jest identyczne jak w przypadku kratownicy płaskiej.

3.4. ELEMENT BRZEGOWY

W rozdz. II szeroko omówiliśmy różne rodzaje warunków brzegowych, w tym też sprężyste elementy brzegowe. Ponieważ jest to bardzo użyteczny element, którym można modelować wiele różnych warunków brzegowych, poświęcimy mu też nieco uwagi i w tym rozdziale, skupiając się na różnicach między płaskimi i przestrzennymi elementami.

Rozważać będziemy najogólniejszy element sprężysty o sztywności k_b , nachylony względem osi układu globalnego pod kątami α_X , α_Y , α_Z , których kosinusy kierunkowe są równe:

$$c_X = \cos \alpha_X, \quad c_Y = \cos \alpha_Y, \quad c_Z = \cos \alpha_Z. \quad (3.24)$$

Macierz sztywności takiego elementu w układzie lokalnym jest analogiczna do macierzy sztywności zwykłego elementu kratowego, z tym że element ma trzy stopnie swobody, więc macierz sztywności obejmuje tylko jeden blok \mathbf{J}' (3.10)

$$\mathbf{K}^{lb} = k_b \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Transformując ten element do globalnego układu współrzędnych otrzymamy macierz bardzo podobną do tej, którą dla płaskiego elementu otrzymaliśmy w rozdz. II:

$$\mathbf{K}^b = k_b \begin{bmatrix} c_X^2 & c_X c_Y & c_X c_Z \\ c_X c_Y & c_Y^2 & c_Y c_Z \\ c_X c_Z & c_Y c_Z & c_Z^2 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Elementy brzegowe można składać ze sobą tworząc np. element o trzech różnych sztywnościach k_x, k_y, k_z w kierunkach równoległych do osi układu lokalnego xyz :

$$\mathbf{K}^{lb} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Transformacja tej macierzy do układu globalnego jest analogiczna jak opisana wcześniej transformacja bloku \mathbf{J}' (3.15). Wyniku tej transformacji nie podajemy tutaj, pozostawiając jej wykonanie jako ćwiczenie dla czytelnika.

3.5. NAPRĘŻENIA I SIŁY WEWNĘTRZNE

Podobnie jak w p.2.11 rozdz. II podamy równania pozwalające obliczyć naprężenia i siły wewnętrzne w elemencie

$$\sigma_x = E(\varepsilon - \varepsilon_t) = \frac{E}{L} \left[(u_{jx} - u_{ix}) - L(\alpha_t \Delta t_o) \right], \quad (3.28)$$

lub w innej postaci:

$$\sigma_x = \frac{E}{L} \left[-1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \right] \mathbf{u}^{le} - E\alpha_t \Delta t_o. \quad (3.29)$$

Transformacja wektora \mathbf{u}^{le} do układu globalnego daje związek:

$$\sigma_x = \frac{E}{L} \left[-1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \right] (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{u}^e - E\alpha_t \Delta t_o, \quad (3.30)$$

który po wykonaniu mnożenia pozwala zapisać naprężenie normalne w elemencie następująco:

$$\sigma_x = E \left\{ \left[-\mathbf{c}^T \quad \mathbf{c}^T \right] (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{u}^e \frac{1}{L} - \alpha_t \Delta t_o \right\} \quad (3.31)$$

gdzie \mathbf{c} jest wektorem kosinusów kierunkowych elementu: $\mathbf{c}^T = [c_x \ c_y \ c_z]$ (3.17).

Obliczenie siły normalnej sprowadza się do scałkowania naprężeń na powierzchni przekroju, a przy założeniu jednorodności pola naprężeń (podobnie jak to zrobiliśmy w rozdz. II)

$$N = \sigma_x A = EA \left\{ \frac{1}{L} \left[-\mathbf{c}^T \quad \mathbf{c}^T \right] (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{u}^e - \alpha_t \Delta t_o \right\}. \quad (3.32)$$

Reakcje podpór, które pozostały jeszcze do wyznaczenia, obliczamy przy pomocy równania (2.75), dokładnie tak samo jak dla kratownicy płaskiej, więc nie będziemy omawiać szczegółowo tego problemu dla kratownicy przestrzennej.

ROZDZIAŁ III. STATYKA KRATOWNIC PRZESTRZENNYCH.....	63
3.1. OZNACZENIA I PODSTAWOWE ZWIĄZKI	64
3.2. MACIERZ SZTYWNOŚCI ELEMENTU KRATOWNICY PRZESTRZENNEJ	66
3.3. WEKTOR OCIAŻEŃ TERMICZNYCH ELEMENTU KRATOWNICY PRZESTRZENNEJ.....	69
3.4. ELEMENT BRZEGOWY	70
3.5. NAPRĘŻENIA I SIŁY WEWNĘTRZNE	71