Macierze sztywności elementów ram płaskich - Grupa B

$ORIGIN := 1$

Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$$

Macierz elementu bez przegubów

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} & 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} & 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu bez przegubów

$$\mathrm{Blok\_A11}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 6a \\ A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Blok\_B11}(EA, EJ, L, l) := \left|\begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{l} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow -6a \\ A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array}\right.$$

$$\mathrm{Blok\_C11}(EA, EJ, L, l) := \left|\begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{l} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{-EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 6a \\ A_{2,2} \leftarrow -12 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow -A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 2 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array}\right.$$

Macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$\mathtt{Blok\_A01}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

$$\mathtt{Blok\_B01}(EA, EJ, L, \mathtt{l}) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{\mathtt{l}} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right.$$

$$\mathtt{Blok\_C01}(EA, EJ, L, \mathtt{l}) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{\mathtt{l}} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{-EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

Macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$\text{Blok\_A10}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right.$$

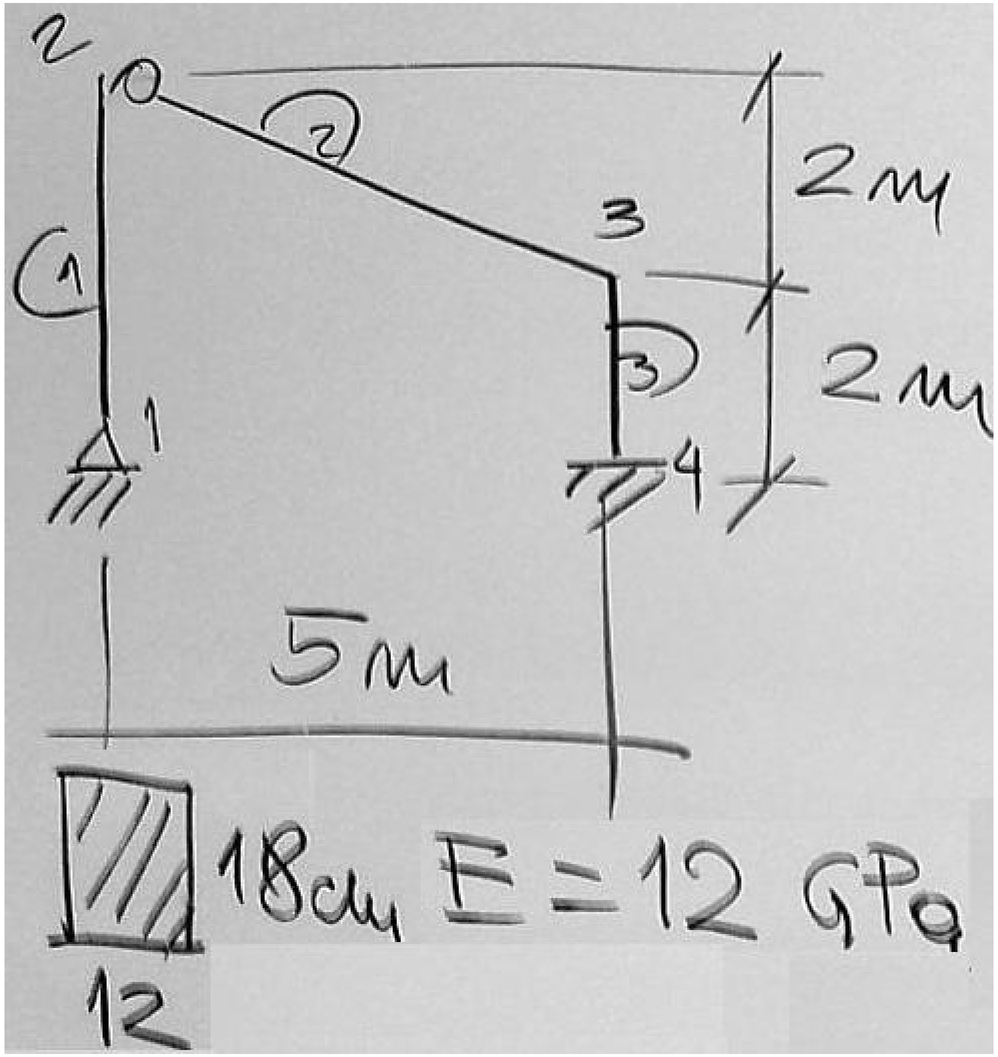
$$\text{Blok\_B10}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

$$\text{Blok\_C10}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

$E := 12GPa \qquad b := 12cm \qquad h := 18cm$

$J := \dfrac{b \cdot h^3}{12} \qquad A := b \cdot h \qquad EA := E \cdot A \qquad EJ := E \cdot J$

$EA = 259.200 \cdot MN \qquad EJ = 699.840 \cdot kN \cdot m^2$



Schemat globalnej macierzy sztywności konstrukcji

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{c:c:c:c} A1 & C1 & & \\ \hdashline C1^T & B1+A2 & C2 & \\ \hdashline & C2^T & B2+A3 & C3 \\ \hdashline & & C3^T & B3 \end{array}\right]$$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych

$Lx := 0m \qquad Ly := 4m \qquad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 4.000000\,m$

$A := Blok\_A11(EA, EJ, L, 1m) \qquad A = \begin{pmatrix} 64800.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 131.220 & 262.440 \\ 0.000 & 262.440 & 699.840 \end{pmatrix} \cdot kN$

$B := Blok\_B11(EA, EJ, L, 1m) \qquad B = \begin{pmatrix} 64800.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 131.220 & -262.440 \\ 0.000 & -262.440 & 699.840 \end{pmatrix} \cdot kN$

$C := Blok\_C11(EA, EJ, L, 1m) \qquad C = \begin{pmatrix} -64800.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -131.220 & 262.440 \\ 0.000 & -262.440 & 349.920 \end{pmatrix} \cdot kN$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$$c := \frac{Lx}{L} \qquad s := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000000 & -1.000000 & 0.000000 \\ 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$ *macierz obrotu*

$$A1 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 131.220 & 0.000 & 262.440 \\ 0.000 & 64800.000 & 0.000 \\ 262.440 & 0.000 & 699.840 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B1 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 131.220 & 0.000 & -262.440 \\ 0.000 & 64800.000 & 0.000 \\ -262.440 & 0.000 & 699.840 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C1 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -131.220 & 0.000 & 262.440 \\ 0.000 & -64800.000 & 0.000 \\ -262.440 & 0.000 & 349.920 \end{pmatrix} \cdot kN$$

Element "2" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych

$Lx := 5m \quad Ly := -2m \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 5.385165\,m$

$A := Blok\_A01(EA, EJ, L, 1m) \qquad A = \begin{pmatrix} 48132.232 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 13.444 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot kN$

$B := Blok\_B01(EA, EJ, L, 1m) \qquad B = \begin{pmatrix} 48132.232 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 13.444 & -72.397 \\ 0.000 & -72.397 & 389.871 \end{pmatrix} \cdot kN$

$C := Blok\_C01(EA, EJ, L, 1m) \qquad C = \begin{pmatrix} -48132.232 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -13.444 & 72.397 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot kN$

Element "2" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$$c := \frac{Lx}{L} \qquad s := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.928477 & 0.371391 & 0.000000 \\ -0.371391 & 0.928477 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$

macierz obrotu

$$A2 := R^{T} \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 41495.157 & 16592.685 & 0.000 \\ 16592.685 & 6650.518 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B2 := R^{T} \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 41495.157 & 16592.685 & 26.888 \\ 16592.685 & 6650.518 & -67.219 \\ 26.888 & -67.219 & 389.871 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C2 := R^{T} \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -41495.157 & -16592.685 & -26.888 \\ -16592.685 & -6650.518 & 67.219 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot kN$$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych

$Lx := 0m \qquad Ly := -2m \qquad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 2\,m$

$A := Blok\_A11(EA, EJ, L, 1m) \qquad A = \begin{pmatrix} 129600.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1049.760 & 1049.760 \\ 0.000 & 1049.760 & 1399.680 \end{pmatrix} \cdot kN$

$B := Blok\_B11(EA, EJ, L, 1m) \qquad B = \begin{pmatrix} 129600.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1049.760 & -1049.760 \\ 0.000 & -1049.760 & 1399.680 \end{pmatrix} \cdot kN$

$C := Blok\_C11(EA, EJ, L, 1m) \qquad C = \begin{pmatrix} -129600.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -1049.760 & 1049.760 \\ 0.000 & -1049.760 & 699.840 \end{pmatrix} \cdot kN$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$$c := \frac{Lx}{L} \qquad s := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ -1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$ *macierz obrotu*

$$A3 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 1049.760 & 0.000 & -1049.760 \\ 0.000 & 129600.000 & 0.000 \\ -1049.760 & 0.000 & 1399.680 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B3 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 1049.760 & 0.000 & 1049.760 \\ 0.000 & 129600.000 & 0.000 \\ 1049.760 & 0.000 & 1399.680 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C3 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -1049.760 & 0.000 & -1049.760 \\ 0.000 & -129600.000 & 0.000 \\ 1049.760 & 0.000 & 699.840 \end{pmatrix} \cdot kN$$