

Macierze sztywności elementów ram płaskich - Grupa A

ORIGIN := 1

Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$$

Macierz elementu bez przegubów

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12 \frac{EJ}{L^3} & 6 \frac{EJ}{L^2} & 0 & -12 \frac{EJ}{L^3} & 6 \frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6 \frac{EJ}{L^2} & 4 \frac{EJ}{L} & 0 & -6 \frac{EJ}{L^2} & 2 \frac{EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12 \frac{EJ}{L^3} & -6 \frac{EJ}{L^2} & 0 & 12 \frac{EJ}{L^3} & -6 \frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6 \frac{EJ}{L^2} & 2 \frac{EJ}{L} & 0 & -6 \frac{EJ}{L^2} & 4 \frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu bez przegubów

$$\text{Blok_A11} (EA, EJ, L, 1) := \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 6a \\ A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array}$$

Blok_B11 (EA, EJ , L , 1) :=

$$L1 \leftarrow \frac{L}{1}$$

$$a \leftarrow \frac{EJ}{L^2}$$

$$A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1}$$

$$A_{2,3} \leftarrow -6a$$

$$A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \frac{a}{L1}$$

$$A_{3,2} \leftarrow A_{2,3}$$

$$A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1$$

A

Blok_C11 (EA, EJ , L , 1) :=

$$L1 \leftarrow \frac{L}{1}$$

$$a \leftarrow \frac{EJ}{L^2}$$

$$A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1}$$

$$A_{2,3} \leftarrow 6a$$

$$A_{2,2} \leftarrow -12 \cdot \frac{a}{L1}$$

$$A_{3,2} \leftarrow -A_{2,3}$$

$$A_{3,3} \leftarrow 2 \cdot a \cdot L1$$

A

Macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$\text{Blok_A01}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

$$\text{Blok_B01 (EA, EJ, L, 1) :=}$$

$$L1 \leftarrow \frac{L}{1}$$

$$a \leftarrow \frac{EJ}{L^2}$$

$$A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1}$$

$$A_{2,3} \leftarrow -3a$$

$$A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1}$$

$$A_{3,2} \leftarrow A_{2,3}$$

$$A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1$$

$$A$$

$$\text{Blok_C01 (EA, EJ, L, 1) :=}$$

$$L1 \leftarrow \frac{L}{1}$$

$$a \leftarrow \frac{EJ}{L^2}$$

$$A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1}$$

$$A_{2,3} \leftarrow 3a$$

$$A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \frac{a}{L1}$$

$$A_{3,3} \leftarrow 0$$

$$A$$

Macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Blok_B10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$\text{Blok_A10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right|$$

$$\text{Blok_C10}(EA, EJ, L, 1) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{1} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right|$$

$$E := 12 \text{ GPa}$$

$$b := 10 \text{ cm}$$

$$h := 15 \text{ cm}$$

$$J := \frac{b \cdot h^3}{12}$$

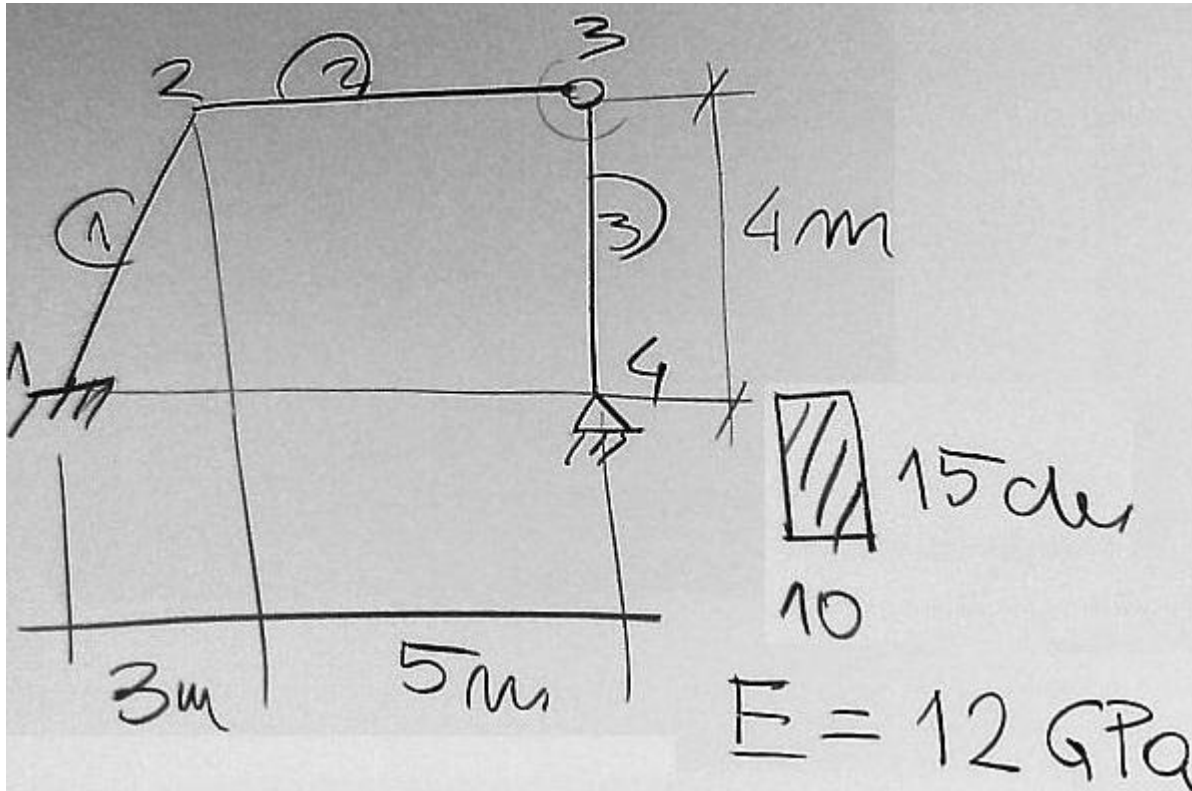
$$A := b \cdot h$$

$$EA := E \cdot A$$

$$EJ := E \cdot J$$

$$EA = 180 \cdot \text{MN}$$

$$EJ = 337.5 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}^2$$



Schemat globalnej macierzy sztywności konstrukcji

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} A1 & C1 & & \\ C1^T & B1+A2 & C2 & \\ & C2^T & B2+A3 & C3 \\ & & C3^T & B3 \end{bmatrix}$$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$L_x := 3\text{m} \quad L_y := 4\text{m} \quad L := \sqrt{(L_x)^2 + (L_y)^2} = 5.000000\text{m}$$

$$A := \text{Blok_A11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 36000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 32.400 & 81.000 \\ 0.000 & 81.000 & 270.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok_B11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 36000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 32.400 & -81.000 \\ 0.000 & -81.000 & 270.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok_C11}(EA, EJ, L, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -36000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -32.400 & 81.000 \\ 0.000 & -81.000 & 135.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{\underline{c}} := \frac{Lx}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{Ly}{L}$$

$$\underline{\underline{R}} := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.600000 & -0.800000 & 0.000000 \\ 0.800000 & 0.600000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A1 := \underline{\underline{R}}^T \cdot A \cdot \underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 12980.736 & -17264.448 & 64.800 \\ -17264.448 & 23051.664 & 48.600 \\ 64.800 & 48.600 & 270.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B1 := \underline{\underline{R}}^T \cdot B \cdot \underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} 12980.736 & -17264.448 & -64.800 \\ -17264.448 & 23051.664 & -48.600 \\ -64.800 & -48.600 & 270.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C1 := \underline{\underline{R}}^T \cdot C \cdot \underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} -12980.736 & 17264.448 & 64.800 \\ 17264.448 & -23051.664 & 48.600 \\ -64.800 & -48.600 & 135.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "2" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$\underline{L_x} := 5\text{m} \quad \underline{L_y} := 0\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 5\text{m}$$

$$A := \text{Blok_A10}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 36000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 8.100 & 40.500 \\ 0.000 & 40.500 & 202.500 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok_B10}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 36000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 8.100 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok_C10}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -36000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -8.100 & 0.000 \\ 0.000 & -40.500 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "2" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{\underline{c}} := \frac{Lx}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A2 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 36000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 8.100 & 40.500 \\ 0.000 & 40.500 & 202.500 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B2 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 36000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 8.100 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C2 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -36000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -8.100 & 0.000 \\ 0.000 & -40.500 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzędnych

$$\underline{L_x} := 0\text{m} \quad \underline{L_y} := -4\text{m} \quad \underline{L} := \sqrt{(\underline{L_x})^2 + (\underline{L_y})^2} = 4\text{m}$$

$$A := \text{Blok_A11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad A = \begin{pmatrix} 45000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 63.281 & 126.563 \\ 0.000 & 126.563 & 337.500 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B := \text{Blok_B11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad B = \begin{pmatrix} 45000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 63.281 & -126.563 \\ 0.000 & -126.563 & 337.500 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C := \text{Blok_C11}(\underline{EA}, \underline{EJ}, \underline{L}, 1\text{m}) \quad C = \begin{pmatrix} -45000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -63.281 & 126.563 \\ 0.000 & -126.563 & 168.750 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzędnych

$$\underline{\underline{c}} := \frac{L_x}{L} \quad \underline{\underline{s}} := \frac{L_y}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ -1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix} \quad \text{macierz obrotu}$$

$$A3 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 63.281 & 0.000 & -126.563 \\ 0.000 & 45000.000 & 0.000 \\ -126.563 & 0.000 & 337.500 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$B3 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 63.281 & 0.000 & 126.563 \\ 0.000 & 45000.000 & 0.000 \\ 126.563 & 0.000 & 337.500 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$

$$C3 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -63.281 & 0.000 & -126.563 \\ 0.000 & -45000.000 & 0.000 \\ 126.563 & 0.000 & 168.750 \end{pmatrix} \cdot \text{kN}$$