Macierze sztywności elementów ram płaskich - Grupa A

ORIGIN := 1

Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$$

Macierz elementu bez przegubów

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} & 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} & 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu bez przegubów

$$\text{Blok\_A11}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 6a \\ A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right.$$

$$\text{Blok\_B11}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{l} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow -6a \\ A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right.$$

$$\text{Blok\_C11}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{l} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{-EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 6a \\ A_{2,2} \leftarrow -12 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow -A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 2 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right.$$

Macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$\mathtt{Blok\_A01}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Blok\_B01}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{l} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Blok\_C01}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{l} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{-EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

Macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$\text{Blok\_A10}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right.$$

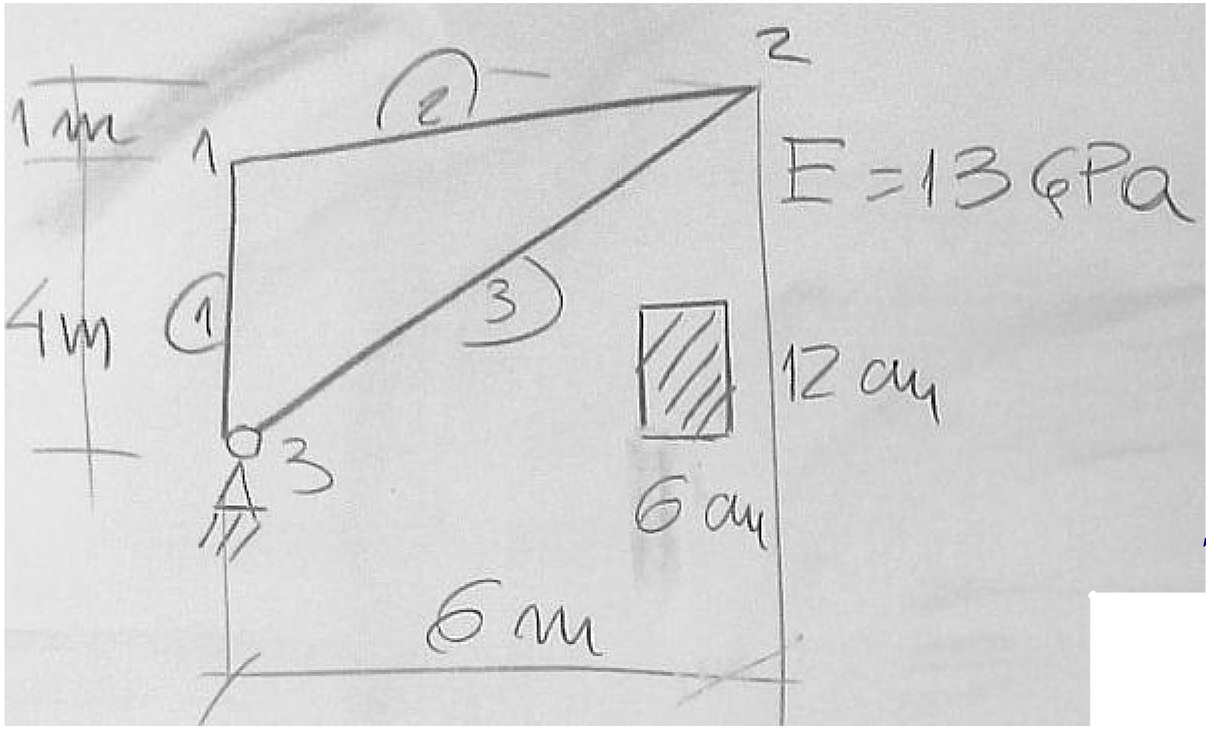
$$\text{Blok\_B10}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

$$\text{Blok\_C10}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

$E := 13\text{GPa}$ $\quad b := 6\text{cm}$ $\quad h := 12\text{cm}$

$J := \dfrac{b \cdot h^3}{12}$ $\quad A := b \cdot h$ $\quad EA := E \cdot A$ $\quad EJ := E \cdot J$

$EA = 93.6 \cdot \text{MN}$ $\quad EJ = 112.32 \cdot \text{kN} \cdot \text{m}^2$



Schemat globalnej macierzy sztywności konstrukcji

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} A1+A2 & C2 & C1 \\ C2^T & B2+A3 & C3 \\ C1^T & C3^T & B1+B3 \end{bmatrix}$$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych

$Lx := 0m \qquad Ly := -4m \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 4.000000\,m$

$A := Blok\_A10(EA, EJ, L, 1m) \qquad A = \begin{pmatrix} 23400.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 5.265 & 21.060 \\ 0.000 & 21.060 & 84.240 \end{pmatrix} \cdot kN$

$B := Blok\_B10(EA, EJ, L, 1m) \qquad B = \begin{pmatrix} 23400.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 5.265 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot kN$

$C := Blok\_C10(EA, EJ, L, 1m) \qquad C = \begin{pmatrix} -23400.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -5.265 & 0.000 \\ 0.000 & -21.060 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot kN$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$$c := \frac{Lx}{L} \qquad s := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ -1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$ *macierz obrotu*

$$A1 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 5.265 & 0.000 & -21.060 \\ 0.000 & 23400.000 & 0.000 \\ -21.060 & 0.000 & 84.240 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B1 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 5.265 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 23400.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C1 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -5.265 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -23400.000 & 0.000 \\ 21.060 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot kN$$

Element "2" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych

$Lx := 6m \quad Ly := 1m \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 6.082763\,m$

$A := Blok\_A11(EA, EJ, L, 1m) \qquad A = \begin{pmatrix} 15387.745 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 5.989 & 18.214 \\ 0.000 & 18.214 & 73.861 \end{pmatrix} \cdot kN$

$B := Blok\_B11(EA, EJ, L, 1m) \qquad B = \begin{pmatrix} 15387.745 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 5.989 & -18.214 \\ 0.000 & -18.214 & 73.861 \end{pmatrix} \cdot kN$

$C := Blok\_C11(EA, EJ, L, 1m) \qquad C = \begin{pmatrix} -15387.745 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -5.989 & 18.214 \\ 0.000 & -18.214 & 36.931 \end{pmatrix} \cdot kN$

Element "2" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$$c := \frac{Lx}{L} \qquad s := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.986394 & -0.164399 & 0.000000 \\ 0.164399 & 0.986394 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$

macierz obrotu

$$A2 := R^{T} \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 14972.022 & -2494.339 & 2.994 \\ -2494.339 & 421.712 & 17.966 \\ 2.994 & 17.966 & 73.861 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B2 := R^{T} \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 14972.022 & -2494.339 & -2.994 \\ -2494.339 & 421.712 & -17.966 \\ -2.994 & -17.966 & 73.861 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C2 := R^{T} \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -14972.022 & 2494.339 & 2.994 \\ 2494.339 & -421.712 & 17.966 \\ -2.994 & -17.966 & 36.931 \end{pmatrix} \cdot kN$$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych

$Lx := -6m \quad Ly := -5m \quad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 7.81025m$

$A := Blok\_A11(EA, EJ, L, 1m) \qquad A = \begin{pmatrix} 11984.252 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 2.829 & 11.048 \\ 0.000 & 11.048 & 57.524 \end{pmatrix} \cdot kN$

$B := Blok\_B11(EA, EJ, L, 1m) \qquad B = \begin{pmatrix} 11984.252 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 2.829 & -11.048 \\ 0.000 & -11.048 & 57.524 \end{pmatrix} \cdot kN$

$C := Blok\_C11(EA, EJ, L, 1m) \qquad C = \begin{pmatrix} -11984.252 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -2.829 & 11.048 \\ 0.000 & -11.048 & 28.762 \end{pmatrix} \cdot kN$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$$c := \frac{Lx}{L} \qquad s := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.768221 & 0.640184 & 0.000000 \\ -0.640184 & -0.768221 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$ *macierz obrotu*

$$A3 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 7073.833 & -5892.503 & -7.073 \\ -5892.503 & 4913.248 & -8.487 \\ -7.073 & -8.487 & 57.524 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B3 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 7073.833 & -5892.503 & 7.073 \\ -5892.503 & 4913.248 & 8.487 \\ 7.073 & 8.487 & 57.524 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C3 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -7073.833 & 5892.503 & -7.073 \\ 5892.503 & -4913.248 & -8.487 \\ 7.073 & 8.487 & 28.762 \end{pmatrix} \cdot kN$$