Macierze sztywności elementów ram płaskich - Grupa A2

$ORIGIN := 1$

Układ bloków macierzy sztywności elementu

$$K = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$$

Macierz elementu bez przegubów

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} & 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & 6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} & 0 & 12\frac{EJ}{L^3} & -6\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EJ}{L^2} & 2\frac{EJ}{L} & 0 & -6\frac{EJ}{L^2} & 4\frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu bez przegubów

$$\mathrm{Blok\_A11}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 6a \\ A_{2,2} \leftarrow 12\cdot\frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 4\cdot a\cdot L1 \\ A \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Blok\_B11}(EA, EJ, L, l) := \left|\begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{l} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow -6a \\ A_{2,2} \leftarrow 12 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 4 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array}\right.$$

$$\mathrm{Blok\_C11}(EA, EJ, L, l) := \left|\begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{l} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{-EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 6a \\ A_{2,2} \leftarrow -12 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow -A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 2 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array}\right.$$

Macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle początkowym

$$\mathtt{Blok\_A01}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

$$\mathtt{Blok\_B01}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{l} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right.$$

$$\mathtt{Blok\_C01}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \dfrac{L}{l} \\ a \leftarrow \dfrac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \dfrac{-EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \dfrac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

Macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$K = \begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 3\frac{EJ}{L^2} & 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 3\frac{EJ}{L^2} & 3\frac{EJ}{L} & 0 & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -3\frac{EJ}{L^3} & -3\frac{EJ}{L^2} & 0 & 3\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Funkcje wyznaczające macierz elementu z przegubem w węźle końcowym

$$\mathrm{Blok\_A10}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,3} \leftarrow 3a \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow A_{2,3} \\ A_{3,3} \leftarrow 3 \cdot a \cdot L1 \\ A \end{array} \right.$$

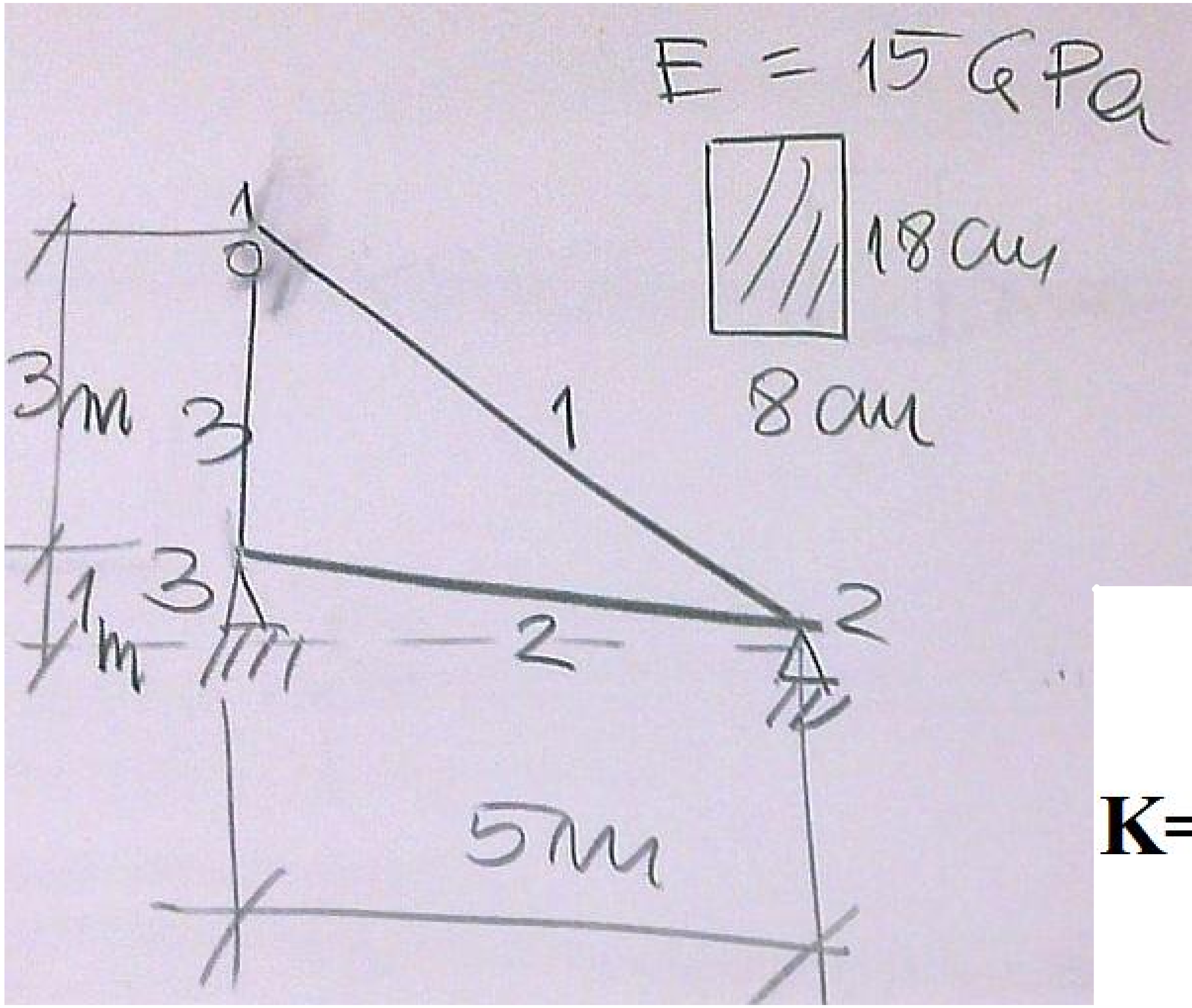
$$\mathrm{Blok\_B10}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{EA}{L1} \\ A_{2,2} \leftarrow 3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

$$\mathrm{Blok\_C10}(EA, EJ, L, l) := \left| \begin{array}{l} L1 \leftarrow \frac{L}{l} \\ a \leftarrow \frac{EJ}{L^2} \\ A_{1,1} \leftarrow \frac{-EA}{L1} \\ A_{3,2} \leftarrow -3a \\ A_{2,2} \leftarrow -3 \cdot \frac{a}{L1} \\ A_{3,3} \leftarrow 0 \\ A \end{array} \right.$$

$E := 15GPa \qquad b := 8cm \qquad h := 18cm$

$J := \frac{b \cdot h^3}{12} \qquad A := b \cdot h \qquad EA := E \cdot A \qquad EJ := E \cdot J$

$EA = 216 \cdot MN \qquad EJ = 583.2 \cdot kN \cdot m^2$



Schemat globalnej macierzy sztywności konstrukcji

$$\mathbf{K}= \left[\begin{array}{c:c:c} A1+A3 & C1 & C3 \\ \hdashline C1^T & B1+A2 & C2 \\ \hdashline C3^T & C2^T & B2+B3 \end{array} \right]$$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych

$Lx := 5m \qquad Ly := -4m \qquad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 6.403124m$

$A := Blok\_A11(EA, EJ, L, 1m) \qquad A = \begin{pmatrix} 33733.533 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 26.658 & 85.346 \\ 0.000 & 85.346 & 364.322 \end{pmatrix} \cdot kN$

$B := Blok\_B11(EA, EJ, L, 1m) \qquad B = \begin{pmatrix} 33733.533 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 26.658 & -85.346 \\ 0.000 & -85.346 & 364.322 \end{pmatrix} \cdot kN$

$C := Blok\_C11(EA, EJ, L, 1m) \qquad C = \begin{pmatrix} -33733.533 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -26.658 & 85.346 \\ 0.000 & -85.346 & 182.161 \end{pmatrix} \cdot kN$

Element "1" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$$c := \frac{Lx}{L} \qquad s := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.780869 & 0.624695 & 0.000000 \\ -0.624695 & 0.780869 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$ *macierz obrotu*

$$A1 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 20579.630 & 16442.378 & -53.315 \\ 16442.378 & 13180.560 & 66.644 \\ -53.315 & 66.644 & 364.322 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B1 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 20579.630 & 16442.378 & 53.315 \\ 16442.378 & 13180.560 & -66.644 \\ 53.315 & -66.644 & 364.322 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C1 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -20579.630 & -16442.378 & -53.315 \\ -16442.378 & -13180.560 & 66.644 \\ 53.315 & -66.644 & 182.161 \end{pmatrix} \cdot kN$$

Element "2" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych

$Lx := -5m \quad Ly := 1m \qquad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 5.09902m$

$A := Blok\_A11(EA, EJ, L, 1m) \qquad A = \begin{pmatrix} 42361.085 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 52.788 & 134.585 \\ 0.000 & 134.585 & 457.500 \end{pmatrix} \cdot kN$

$B := Blok\_B11(EA, EJ, L, 1m) \qquad B = \begin{pmatrix} 42361.085 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 52.788 & -134.585 \\ 0.000 & -134.585 & 457.500 \end{pmatrix} \cdot kN$

$C := Blok\_C11(EA, EJ, L, 1m) \qquad C = \begin{pmatrix} -42361.085 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -52.788 & 134.585 \\ 0.000 & -134.585 & 228.750 \end{pmatrix} \cdot kN$

Element "2" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$$c := \frac{Lx}{L} \qquad s := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.980581 & -0.196116 & 0.000000 \\ 0.196116 & -0.980581 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$ *macierz obrotu*

$$A2 := R^T \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 40733.843 & 8136.211 & 26.394 \\ 8136.211 & 1680.031 & -131.971 \\ 26.394 & -131.971 & 457.500 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B2 := R^T \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 40733.843 & 8136.211 & -26.394 \\ 8136.211 & 1680.031 & 131.971 \\ -26.394 & 131.971 & 457.500 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C2 := R^T \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -40733.843 & -8136.211 & 26.394 \\ -8136.211 & -1680.031 & -131.971 \\ -26.394 & 131.971 & 228.750 \end{pmatrix} \cdot kN$$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w lokalnym układzie współrzednych

$$Lx := 0m \qquad Ly := -3m \qquad L := \sqrt{(Lx)^2 + (Ly)^2} = 3\,m$$

$$A := Blok\_A01(EA, EJ, L, 1m) \qquad A = \begin{pmatrix} 72000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 64.800 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B := Blok\_B01(EA, EJ, L, 1m) \qquad B = \begin{pmatrix} 72000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 64.800 & -194.400 \\ 0.000 & -194.400 & 583.200 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C := Blok\_C01(EA, EJ, L, 1m) \qquad C = \begin{pmatrix} -72000.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & -64.800 & 194.400 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot kN$$

Element "3" - bloki macierzy sztywności w globalnym układzie współrzednych

$$c := \frac{Lx}{L} \qquad s := \frac{Ly}{L}$$

$$R := \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000000 & 1.000000 & 0.000000 \\ -1.000000 & 0.000000 & 0.000000 \\ 0.000000 & 0.000000 & 1.000000 \end{pmatrix}$$ *macierz obrotu*

$$A3 := R^{T} \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 64.800 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 72000.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$B3 := R^{T} \cdot B \cdot R = \begin{pmatrix} 64.800 & 0.000 & 194.400 \\ 0.000 & 72000.000 & 0.000 \\ 194.400 & 0.000 & 583.200 \end{pmatrix} \cdot kN$$

$$C3 := R^{T} \cdot C \cdot R = \begin{pmatrix} -64.800 & 0.000 & -194.400 \\ 0.000 & -72000.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{pmatrix} \cdot kN$$