ROZDZIAŁ II. STATYKA PŁASKICH KONSTRUKCJI KRATOWYCH

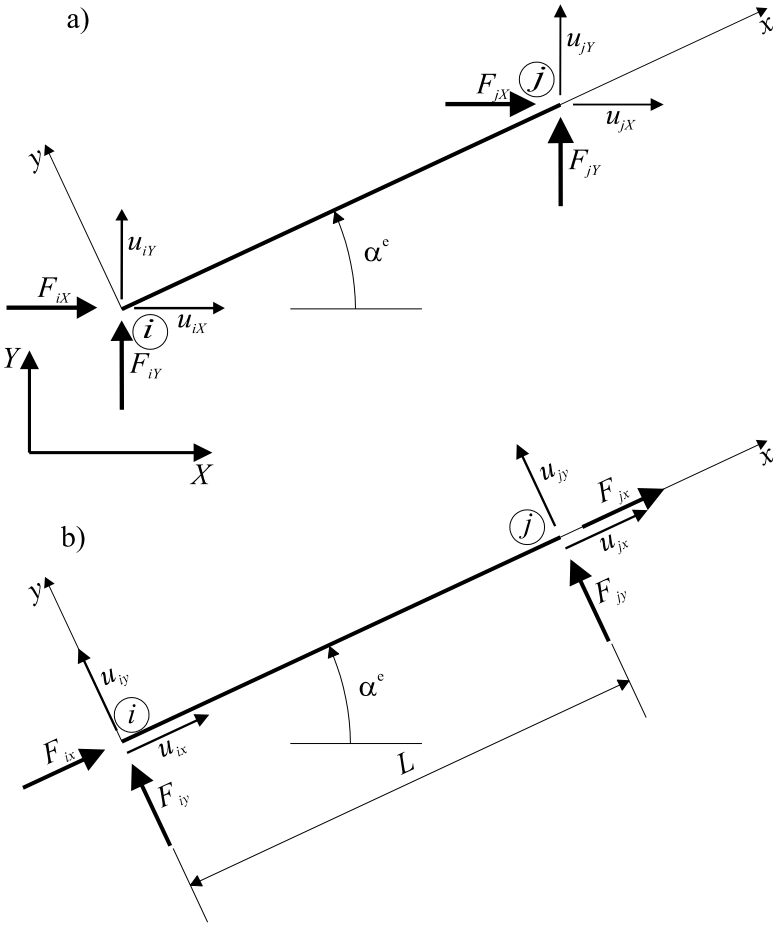
Kratownice płaskie są jednym z najczęściej stosowanych typów konstrukcji. Budowa kratownicy sprawia, że jest to układ ekonomiczny pod względem ciężaru, tzn. stosunek ciężaru konstrukcji do sił, które potrafi ona przenieść wyraża się małymi liczbami. Sprawia to budowa kratownicy, w której założono, że obciążenia (siły skupione) będą działały tylko na węzły (wyjątkiem jest tu obciążenie termiczne i grawitacyjne) a pręty będą łączone z węzłami przegubowo. Mimo, że większość konstruowanych w ostatnich latach konstrukcji kratowych to kratownice o sztywnych węzłach (a więc w zasadzie są to konstrukcje ramowe - omawiane w rozdziale IV), to metody rozwiązywania zadań dotyczących statyki kratownic o węzłach przegubowych zajmują bardzo ważną pozycję w zakresie inżynierskich metod obliczeniowych. Układ kratownicy płaskiej o przegubowych węzłach jest najprostszą konstrukcją, na przykładzie której można pokazać istotę metody elementów skończonych, bez zaprzątania uwagi skomplikowanymi szczegółami. Z tego powodu rozdział ten będzie rozbudowany i nieraz może nazbyt drobiazgowy, ale w dalszej części książki będziemy ciągle wracać i powoływać się na równania i zależności przedstawione tutaj. Co więcej, mimo prostoty konstrukcji większość metod i szczegółów związanych z algorytmem MES pozostanie ważna dla pozostałych, bardziej złożonych konstrukcji.

2.1. PODSTAWOWE ZWIĄZKI I OZNACZENIA

Zakładamy, że pręt kratownicy płaskiej (będziemy go często nazywali elementem) jest prosty, jednorodny (tzn. wykonany z jednorodnego materiału, o stałym przekroju poprzecznym, bez pęknięć i otworów) i łączy węzły i (węzeł początkowy) oraz j (węzeł końcowy). Oznaczenia węzłów literami i, j są oznaczeniami lokalnymi, jednakowymi dla wszystkich prętów i ich zadaniem jest orientacja elementu. Dla odróżnienia węzły konstrukcji mają też numerację globalną, która pozwala je zidentyfikować. Globalne numery węzłów oznaczone są jako n_i (globalny numer węzła początkowego - i) oraz n_j (globalny numer węzła końcowego - j). Węzeł kratownicy płaskiej może poruszać się tylko po płaszczyźnie XY , ma więc jak określamy to w mechanice dwa stopnie swobody, gdyż do wyznaczenia jego położenia w danej chwili należy

podać dwie współrzędne. Położenie węzła *i* konstrukcji nieodkształconej będzie określone jego współrzędnymi początkowymi X_i, Y_i względem układu współrzędnych, który używany jest do opisu całej konstrukcji. O takim układzie współrzędnych mówimy, że jest to układ globalny, jego osie oznaczone będą dużymi literami *X, Y*. Położenie węzła *i* po deformacji spowodowanej obciążeniem, określone jest podaniem dwóch składowych wektora przemieszczenia węzła u_{iX}, u_{iY}. Ten sposób opisu ruchu konstrukcji nazywany jest w mechanice opisem Lagrange'a. Opis niektórych zależności między siłami i przemieszczeniami elementu znacznie się upraszcza, gdy wprowadzimy lokalny układ współrzędnych, który oznaczać będziemy małymi literami *x, y*. Oś *x* tego układu pokrywa się z osią pręta i ma początek w węźle początkowym *i*, oś *y* jest prostopadła do osi *x* i skierowana w ten sposób, aby osie *Z* układu globalnego i *z* układu lokalnego miały ten sam zwrot i kierunek. Ponieważ przyjmujemy, że oba układy współrzędnych są prawoskrętne, to oś *y* można otrzymać obracając oś *x* przeciwnie do ruchu wskazówek zegara o kąt $\pi/2$.

Najważniejsze oznaczenia, kierunki, zwroty wektorów oraz układy współrzędnych pokazane są na Rys.2.1



Rys.2.1

Przemieszczenia i siły węzłowe elementów zapisywane będą przy użyciu macierzy kolumnowych, które będziemy nazywać wektorami. Wprowadzimy następujące oznaczenia:

- Wektor przemieszczeń węzłowych węzła początkowego *i* oraz końcowego *j* w lokalnym układzie współrzędnych

$$\mathbf{u}'_i = \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

- Wektor przemieszczeń węzłowych elementu *e* w lokalnym układzie współrzędnych

$$\mathbf{u}'^e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}'_i \\ \mathbf{u}'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

- Wektor sił węzłowych węzła początkowego *i* i końcowego *j* w lokalnym układzie współrzędnych

$$\mathbf{f}'_i = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{bmatrix}, \ \mathbf{f}'_j = \begin{bmatrix} F_{jx} \\ F_{jy} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

- Wektor przemieszczeń węzłowych elementu *e* w lokalnym układzie współrzędnych

$$\mathbf{f}'^e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}'_i \\ \mathbf{f}'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

2.2. MACIERZ SZTYWNOŚCI ELEMENTU KRATOWNICY PŁASKIEJ W LOKALNYM UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

Poszukujemy związku między wektorami sił i przemieszczeń węzłowych (por. rozdz. I), który niezbędny jest, gdy pragniemy wprowadzić przemieszczenia węzłów do równań równowagi:

$$\mathbf{K}'^{e}\,\mathbf{u}'^{e} = \mathbf{f}'^{e}\,. \tag{2.5}$$

Ogólna metoda budowania takiego związku polega na wykorzystaniu zasady pracy wirtualnej (por. rozdz. I), jednak w tym przypadku odstąpimy od niej na korzyść jasności jaką daje podejście statyczne. Możliwa jest ona w przypadku tak prostych elementów jak elementy prętowe.

Równania równowagi dla elementu *e* (Rys.2.1) prowadzą do następujących związków:

$$\begin{aligned} &\sum F_x = F_{ix} + F_{jx} = 0\,; \\ &\sum F_y = F_{iy} + F_{jy} = 0\,; \\ &\sum M_i = F_{jy}\,L = 0\,; \end{aligned} \tag{2.6}$$

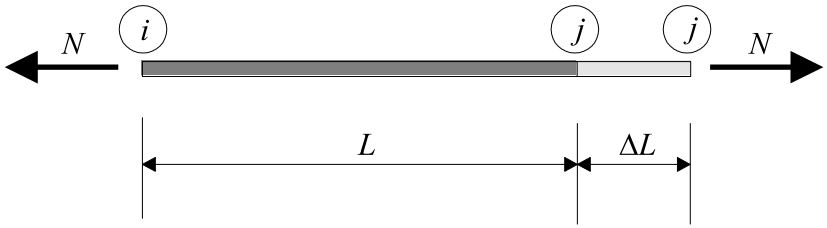
stąd otrzymujemy:

$$F_{iy} = 0\,;\; F_{jy} = 0\,;\; F_{ix} = -F_{jx}\,. \tag{2.7}$$

Ponieważ układ trzech równań równowagi (2.6) lub (2.7) zawiera cztery niewiadome, zadanie jest statycznie niewyznaczalne. Konieczne jest ułożenie dodatkowego równania, aby można było wyznaczyć siły węzłowe. Równanie to powinno wykorzystywać związki między przemieszczeniami węzłów elementu a siłami wewnętrznymi. Związki te zawiera np. prawo Hooke'a zapisane dla przypadku osiowego rozciągania prostego, jednorodnego pręta (Rys.2.2)

$$\Delta L = \frac{N\,L}{E\,A}\,, \tag{2.8}$$

gdzie N jest siłą osiową w pręcie (dodatnia wartość siły osiowej oznacza zawsze rozciąganie), L - długością pręta, ΔL - przyrostem długości pręta wywołanym przez rozciąganie siłą N, E - modułem Younga materiału, z którego pręt jest wykonany, A - polem przekroju poprzecznego pręta.



Rys.2.2

Porównując Rys.2.1 i Rys.2.2 zauważymy proste związki między siłami węzłowymi działającymi na pręt: F_{ix}, F_{jx} (Rys.2.1) oraz siłą osiową N (Rys.2.2):

$$F_{ix} = -N \ ; \ F_{jx} = N \, . \tag{2.9}$$

Związki te jak widać spełniają tożsamościowo trzecie z równań równowagi (2.7).

Przyrost długości pręta wywołany rozciąganiem związany jest w oczywisty sposób z przemieszczeniami osiowymi końców pręta:

$$\Delta L = u_{jx} - u_{ix} \, , \tag{2.10}$$

co po wstawieniu do równania (2.8) prowadzi do związku:

$$N = \frac{EA}{L}\left(u_{jx} - u_{ix}\right). \tag{2.11}$$

Biorąc pod uwagę zależności między siłą osiową w pręcie a siłami węzłowymi (2.9) otrzymamy po uwzględnieniu równania (2.11):

$$F_{ix} = \frac{EA}{L}\left(u_{ix} - u_{jx}\right); \ F_{jx} = \frac{EA}{L}\left(-u_{ix} + u_{jx}\right); \tag{2.12a}$$

$$F_{iy} = 0; \ F_{jy} = 0 \, . \tag{2.12b}$$

Otrzymane związki są poszukiwanymi zależnościami (2.5) między siłami węzłowymi a przemieszczeniami węzłów elementu kratownicy płaskiej. Zapiszemy je jeszcze raz w odmiennej formie:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \\ u_{jx} \\ u_{jy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Forma ta prowadzi po uwzględnieniu oznaczeń (2.2), (2.4) i (2.5) do równania:

$$\mathbf{K}'^{e} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.14}$$

które definiuje macierz $\mathbf{K}'^{e}$ zwana macierzą sztywności elementu kratownicy płaskiej. Macierz w formie podanej w równaniu (2.14) wyraża związki między wektorem $\mathbf{u}'^{e}$ a wektorem sił węzłowych elementu $\mathbf{f}'^{e}$ w lokalnym układzie współrzędnych.

Struktura macierzy sztywności $\mathbf{K}'^{e}$ umożliwia uproszczenie jej zapisu:

$$\mathbf{K}'^{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}' & -\mathbf{J}' \\ -\mathbf{J}' & \mathbf{J}' \end{bmatrix}, \tag{2.15}$$

gdzie **J'** jest macierzą kwadratową zdefiniowaną następująco:

$$\mathbf{J}' = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

2.3. OBRÓT WEKTORA WĘZŁOWEGO. ZMIANA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

Postać macierzy sztywności elementu określona w lokalnym układzie współrzędnych nie jest wygodna w dalszych rozważaniach, w których będziemy operowali macierzami różnych elementów. Najwygodniejszą metodą jest sprowadzenie wszystkich macierzy do postaci, które są określone w jednym, wspólnym układzie współrzędnych. Układ taki nazywany będzie *globalnym układem współrzędnych*. Może być to układ dowolnego typu: kartezjański, biegunowy, krzywoliniowy. Dla kratownicy najwygodniejszy jest kartezjański układ współrzędnych. W układzie globalnym podane są zwykle współrzędne węzłów konstrukcji.

Sprowadzimy teraz macierz sztywności elementu do układu globalnego. Rozpoczynamy przekształcenia od znalezienia związków dla obrotu pojedynczego węzła:

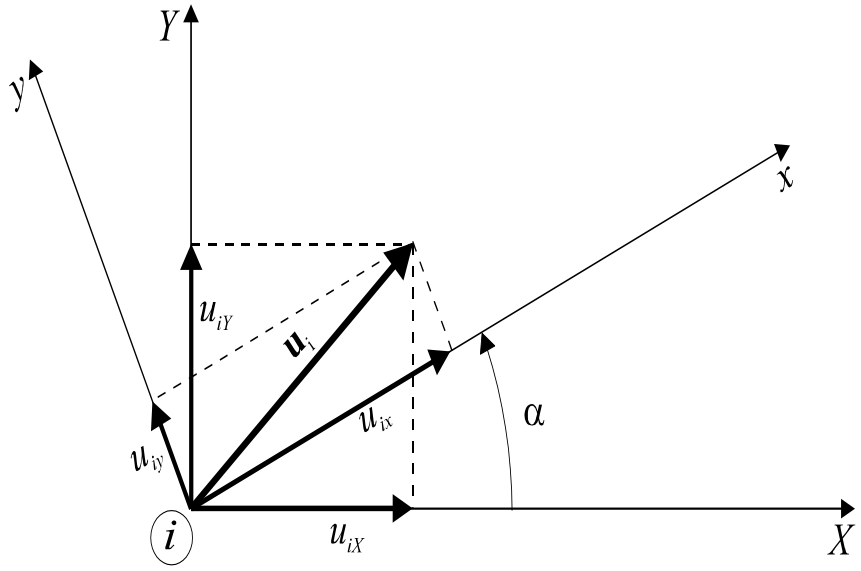
$$u_{iX} = u_{ix}\cos\alpha - u_{iy}\sin\alpha\,, \qquad (2.17)$$

$$u_{iY} = u_{ix}\sin\alpha + u_{iy}\cos\alpha\,,$$

lub w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} u_{iX} \\ u_{iY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ix} \\ u_{iy} \end{bmatrix}, \qquad (2.18)$$

gdzie $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$.



Rys.2.3

Oznaczając:

$$\mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_{iX} \\ u_{iY} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

i biorąc pod uwagę oznaczenia (2.1) otrzymamy:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{u}'_i \,, \tag{2.20}$$

gdzie $\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix}$ (2.21)

jest macierzą obrotu wektora $\mathbf{u}'_i$ z układu lokalnego do globalnego.

Będzie potrzebny nam także związek odwrotny:

$$\mathbf{u}'_i = \left(\mathbf{R}_i\right)^{-1}\mathbf{u}_i\,, \tag{2.22}$$

gdzie $\left(\mathbf{R}_i\right)^{-1}$ jest macierzą odwrotną do $\mathbf{R}_i$, tzn. mającą tą własność, że

$$\mathbf{R}_i\left(\mathbf{R}_i\right)^{-1} = \mathbf{I}\,, \tag{2.23}$$

a **I** jest macierzą jednostkową:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.24}$$

Macierz $\mathbf{R}_i$ jak inne macierze obrotu ma tę własność, że

$$\left(\mathbf{R}_i\right)^{-1} = \left(\mathbf{R}_i\right)^{\mathrm{T}}, \tag{2.25}$$

tzn. $\mathbf{R}_i$ jest macierzą ortogonalną. Wyznacznik takiej macierzy jest równy 1, tzn. det($\mathbf{R}_i$)=1; $\det\left(\mathbf{R}_i\right)^{\mathrm{T}} = 1$. Własność (2.25) macierzy $\mathbf{R}_i$ łatwo sprawdzić bezpośrednim rachunkiem:

$$\mathbf{R}_i\left(\mathbf{R}_i\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2+s^2 & cs-sc \\ sc-cs & c^2+s^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}\,.$$

Macierz obrotu elementu składać się będzie z bloków macierzy obrotu węzłów:

$$\mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_j \end{bmatrix}, \tag{2.26}$$

gdzie $\mathbf{R}_i$ jest macierzą obrotu węzła początkowego, $\mathbf{R}_j$ jest macierzą obrotu węzła końcowego elementu, a **O** jest macierzą zerową. Na ogół macierze obrotu $\mathbf{R}_i$ i $\mathbf{R}_j$ są identyczne (jest tak dla elementów prostoliniowych), gdyż kąty obrotu wektorów w węźle *i* oraz w węźle *j* są jednakowe. Ponieważ elementy kratownic są prostoliniowe możemy zapisać $\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_j$.

Ostatecznie związki między wektorami przemieszczeń węzłowych elementu wyrażonych w lokalnym i globalnym układzie współrzędnych mają postać:

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{u}'^e \tag{2.27}$$

$$\mathbf{u}'^e = \left(\mathbf{R}^e\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{u}^e \tag{2.28}$$

Relacja między składowymi wektora sił węzłowych w układzie lokalnym i globalnym jest analogiczna:

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{f}'_i \tag{2.29}$$

oraz

$$\mathbf{f}'_i = \left(\mathbf{R}_i\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{f}_i, \tag{2.30}$$

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{f}'^e, \tag{2.31}$$

$$\mathbf{f}'^e = \left(\mathbf{R}^e\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{f}^e. \tag{2.32}$$

2.4. MACIERZ SZTYWNOŚCI ELEMENTU W GLOBALNYM UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH

Mnożąc lewostronnie równanie (2.5) przez macierz obrotu $\mathbf{R}^e$ i uwzględniając związek (2.28) otrzymamy:

$$\mathbf{R}^e \mathbf{K}'^e \left(\mathbf{R}^e\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{u}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{f}'^e \tag{2.33}$$

Prawa strona tego równania równa jest $\mathbf{f}^e$ na mocy związku (2.31), tak więc po wprowadzeniu oznaczenia:

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{R}^e \mathbf{K}'^e \left(\mathbf{R}^e\right)^{\mathrm{T}} \tag{2.34}$$

otrzymamy:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e, \tag{2.35}$$

co daje nam poszukiwany związek między siłami i przemieszczeniami węzłowymi elementu w globalnym układzie współrzędnych.

Po wykonaniu mnożeń występujących w równaniu (2.34) otrzymamy:

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{J} & -\mathbf{J} \\ -\mathbf{J} & \mathbf{J} \end{bmatrix}, \tag{2.36}$$

gdzie $\mathbf{J} = \dfrac{EA}{L}\begin{bmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{bmatrix}$. (2.37)

Postać (2.37) macierzy **J** można zamienić na równoważną, w której nie będą występowały funkcje trygonometryczne, zauważmy, że:

$$c = \cos\alpha = \frac{L_X}{L}, \text{ oraz } \quad s = \sin\alpha = \frac{L_Y}{L}. \tag{2.38}$$

Po podstawieniu tych związków do (2.37) otrzymujemy:

$$\mathbf{J} = \frac{EA}{L^3}\begin{bmatrix} L_X^2 & L_X L_Y \\ L_X L_Y & L_Y^2 \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

Zadanie 2.Z1 ilustruje użycie równania (2.37) do wyznaczenia współczynników macierzy sztywności elementów kratownicy płaskiej.

2.5. RÓWNANIA RÓWNOWAGI WĘZŁA I AGREGACJA MACIERZY SZTYWNOŚCI

Zastępując istniejące pręty (elementy) kratownicy siłami węzłowymi otrzymamy zbiór węzłów (można je traktować jak punkty materialne o dwóch stopniach swobody) obciążonych siłami skupionymi pochodzącymi od elementów lub obciążenia zewnętrznego. Warunki równowagi węzła zapisujemy następująco:

$$\sum P_X = \sum_{k=1}^{E_n}\left(-F_{nX}^{e_k}\right) + P_{nX} = 0, \tag{2.40}$$

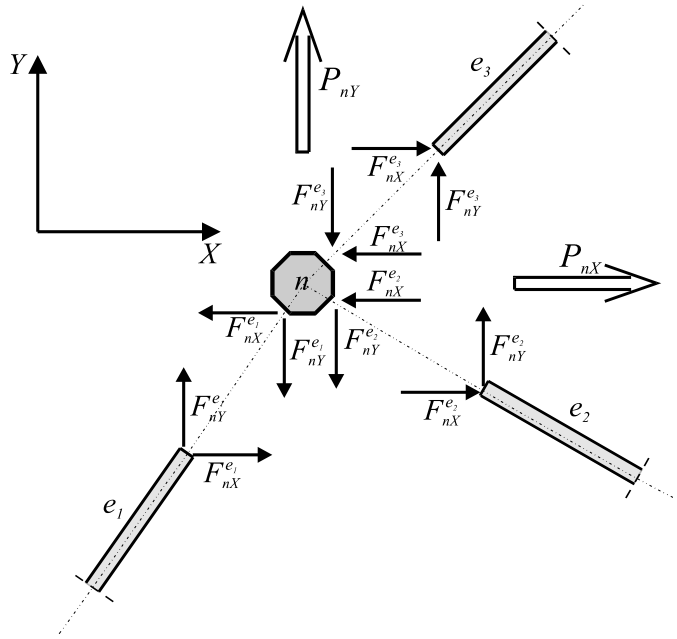
$$\sum P_Y = \sum_{k=1}^{E_n} \left(- F_{nY}^{e_k} \right) + P_{nY} = 0,$$

gdzie oznaczono:

$F_{nX}^{e_k}$ - składowa X-owa siły węzłowej z elementu o numerze e_k działającej przy węźle n,

P_{nX} - składowe X-owa siły zewnętrznej działającej na węzeł n,

E_n - ilość elementów dołączonych do węzła n.



Rys.2.4

Przekształcimy teraz układ równań (2.40) do postaci zawierającej przemieszczenia węzłów:

$$\left[\mathbf{K}_{1n} \quad \mathbf{K}_{2n} \quad \dots \quad \mathbf{K}_{in} \quad \dots \quad \mathbf{K}_{N_n n}\right]\mathbf{u} = \mathbf{p}_n \tag{2.41}$$

W równaniu (2.41)

$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{N_n} \end{bmatrix}$ oznacza globalny wektor przemieszczeń węzłowych konstrukcji,

$\mathbf{p}_n = \begin{bmatrix} P_{nX} \\ P_{nY} \end{bmatrix}$ jest wektorem sił zewnętrznych działających na węzeł *n*,

macierze $\mathbf{K}_{in}$ są macierzami kwadratowymi o wymiarach 2x2 określonymi następująco:

gdy *i*=*n* - $\mathbf{K}_{nn} = \sum_{k=1}^{E_n} \mathbf{J}^{e_k}$, (2.42)

$e_1, e_2 \dots e_k \dots e_{E_n}$ - są numerami elementów dołączonych do węzła *n*,

gdy $i \neq n$ oraz węzły *n*, *i* nie są połączone bezpośrednio żadnymi elementami, to $\mathbf{K}_{in} = 0$,

gdy $i \neq n$ oraz węzły *n*, *i* połączone są elementem o numerze *e* - $\mathbf{K}_{in} = -\mathbf{J}^e$,

$\mathbf{J}^e$ - oznacza tu blok macierzy sztywności elementu *e* (por. równ. (2.37)).

Układając równania równowagi (2.41) dla wszystkich węzłów konstrukcji otrzymamy ostateczną postać równań służących do wyznaczania przemieszczeń węzłów kratownicy:

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \cdots & \mathbf{K}_{1n} & \cdots & \mathbf{K}_{1N_n} \end{array}\right]\left[\mathbf{u}_1\right] \quad \left[\mathbf{p}_1\right]$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \cdots & \mathbf{K}_{2n} & \cdots & \mathbf{K}_{2N_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{K}_{n1} & \mathbf{K}_{n2} & \cdots & \mathbf{K}_{nn} & \cdots & \mathbf{K}_{nN_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{N_n1} & \mathbf{K}_{N_n2} & \cdots & \mathbf{K}_{N_nn} & \cdots & \mathbf{K}_{N_nN_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{N_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{N_n} \end{bmatrix}$$

lub $\mathbf{K}\,\mathbf{u} = \mathbf{p}$ (2.43)

Macierz **K** układu równań (2.43) jest globalną macierzą sztywności konstrukcji, wektor **u** - globalnym wektorem przemieszczeń węzłowych, wektor **p** - globalnym wektorem sił węzłowych konstrukcji.

Numerując odpowiednio węzły można doprowadzić macierz **K** do postaci pasmowej (por. Zad.2.Z1), która charakteryzuje się tym, że różne od zera składowe macierzy występują na jej głównej przekątnej oraz w niewielkiej odległości od przekątnej. Macierz **K** jest macierzą symetryczną tzn. jej składowe spełniają równanie:

$K_{ij} = K_{ji}$ lub $\mathbf{K} = \mathbf{K}^{\mathrm{T}}$ (2.44)

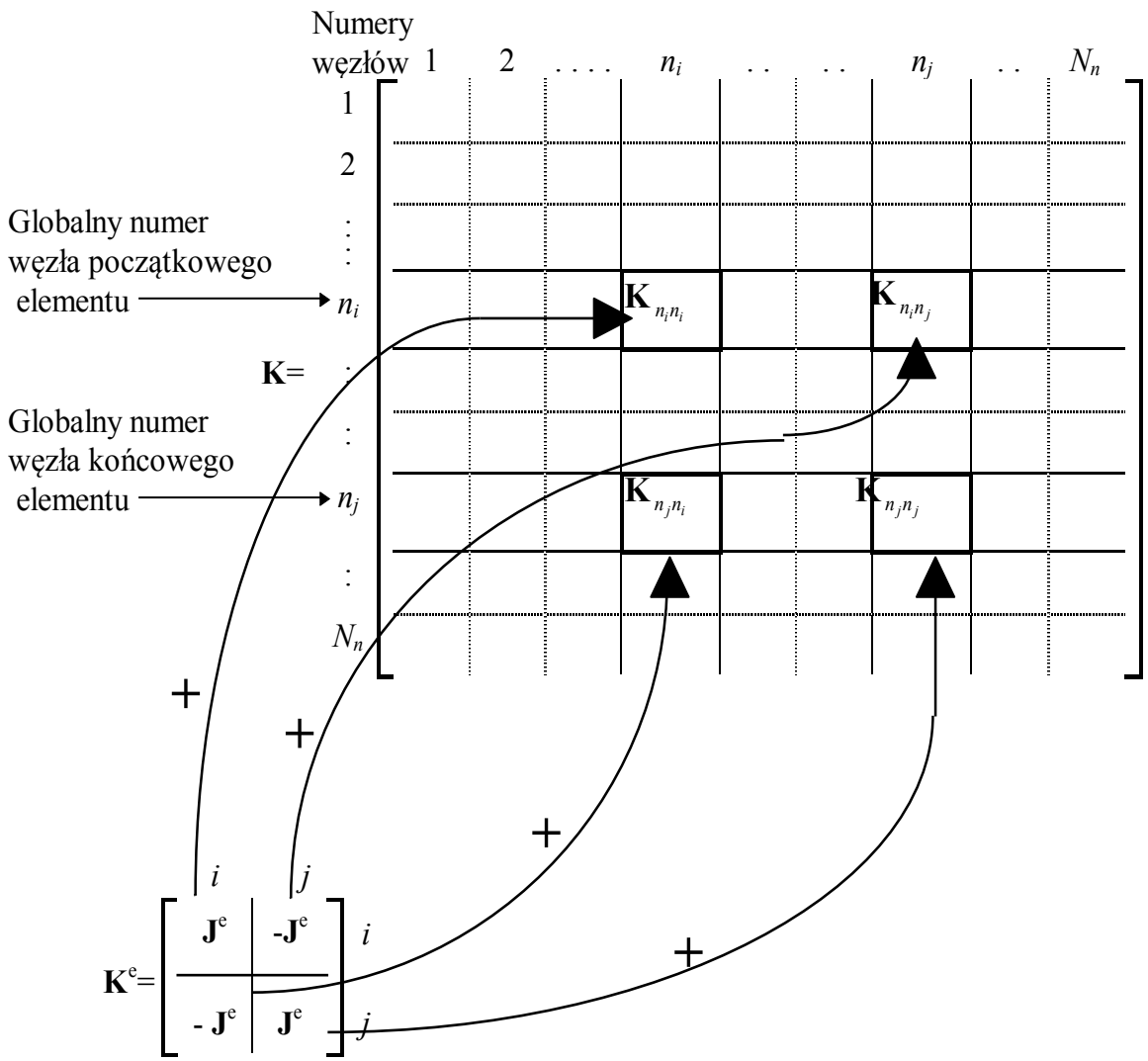
które wynika z zasady wzajemności prac (por. rozdz. I). Składowe K_{nn} leżące na głównej przekątnej macierzy są zawsze dodatnie:

$K_{nn} > 0$ (2.45)

co jest bezpośrednim wnioskiem z definicji (2.37) i (2.42).

Zerowa składowa K_{nn} świadczy o geometrycznej zmienności konstrukcji i powinna być usunięta przez odpowiednią zmianę schematu geometrycznego. Macierz **K** jest w postaci przedstawionej równaniem (2.43) macierzą osobliwą (tzn. |**K**|=0), więc układ równań (2.43) nie może być rozwiązany bez jej modyfikacji, która polegać będzie na uwzględnieniu warunków brzegowych. Zajmiemy się tym w następnym punkcie tego rozdziału. Proces budowy globalnej macierzy sztywności nazywamy agregacją macierzy. Może on być przeprowadzony również

odmienną metodą, opisaną w rozdz. I, wymagającą tworzenia macierzy połączeń. Wielkość tych macierzy sprawia, że operowanie nimi jest niewygodne, więc rzadko używa się tej metody w komputerowych implementacjach algorytmu MES. Dużo prostszą metodą jest przedstawiona równaniami (2.41), (2.42) metoda dodawania bloków macierzy. Postać równań macierzowych (2.41) i (2.42) może wydawać się skomplikowana, ale w rzeczywistości mamy tu do czynienia z bardzo prostymi operacjami wstawiania bloków. Metodę tę najlepiej objaśnia poglądowy rysunek Rys.2.5.


Numery węzłów
1 2 . . . . n_i . . . . n_j . . N_n
Globalny numer węzła początkowego elementu
Globalny numer węzła końcowego elementu
$\mathbf{K}=$
$\mathbf{K}_{n_i n_i}$
$\mathbf{K}_{n_i n_j}$
$\mathbf{K}_{n_j n_i}$
$\mathbf{K}_{n_j n_j}$
$\mathbf{K}^e=$
$\mathbf{J}^e$
$-\mathbf{J}^e$
$-\mathbf{J}^e$
$\mathbf{J}^e$
i
j

Rys.2.5

Znaki "+" przy strzałkach wskazujących miejsce lokowania bloków $\mathbf{K}^e$ oznaczają, że bloki $\mathbf{J}^e$ należy dodać do istniejącej zawartości „komórek” macierzy $\mathbf{K}_{n_i n_i}$ lub $\mathbf{K}_{n_j n_j}$, a bloki $-\mathbf{J}^e$ leżące poza przekątną dodać do „komórek” $\mathbf{K}_{n_i n_j}$ lub $\mathbf{K}_{n_j n_i}$. W przypadku kratownicy, gdzie węzły łączone są na ogół jednym elementem, bloki leżące poza główną przekątną zawierają tylko pojedyncze macierze $-\mathbf{J}^e$. Bloki leżące na głównej przekątnej, $\mathbf{K}_{n_i n_i}$ zawierają sumy tylu macierzy $\mathbf{J}^e$, ile elementów dołączonych jest do węzła n_i. Odpowiedni przykład liczbowy objaśniający technikę agregacji macierzy sztywności zawiera Zadanie 2.Z1.

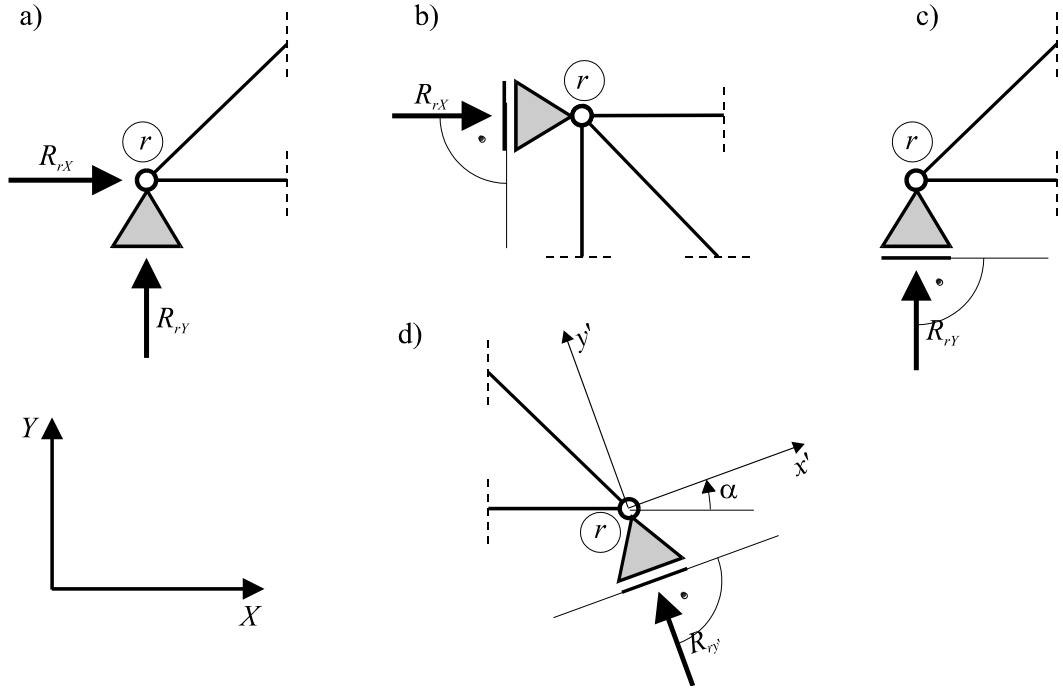
2.6. WARUNKI BRZEGOWE

Jak już wspomniano w poprzednim punkcie tego rozdziału globalna macierz sztywności konstrukcji bezpośrednio po agregacji jest najczęściej osobliwa tzn. jej wyznacznik jest równy zero. Ponieważ układ równań (2.43) musi mieć jednoznaczne rozwiązanie dla zagadnień statyki to fakt ten zmusza nas do zmodyfikowania globalnej macierzy sztywności tak, aby możliwe było rozwiązanie układu równań liniowych (2.43). Powodem osobliwości macierzy **K** jest brak informacji o podporach konstrukcji. Nigdzie dotychczas nie wykorzystywaliśmy informacji o warunkach podparcia, należy więc zastanowić się co oznacza podparcie węzła.

Dla kratownic płaskich możliwe są dwa rodzaje podpór: podpora przegubowa i przegubowo-przesuwna. Schematyczny rysunek podpory przegubowej przedstawiono na Rys.2.6a. Podpora ta uniemożliwia ruch węzła w dowolnym kierunku, tzn.:

$$u_{rX} = 0,\ u_{rY} = 0. \tag{2.46}$$

Próba przesunięcia węzła podporowego r wywoła w podporze przegubowej powstanie reakcji o dwóch składowych R_X i R_Y (Rys.2.6b), które przeciwdziałają przesunięciu węzła. O podporze tej mówi się też, że zapewnia *swobodne podparcie* węzła.



Rys.2.6. Rodzaje podpór kratownicy płaskiej

Następna podpora przedstawiona schematycznie na Rys.2.6b nosi nazwę przegubowo-przesuwnej, zezwala na ruch węzła tylko wzdłuż jednej prostej, uniemożliwia więc przesuwanie węzła prostopadle do kierunku tej prostej. Reakcja, która powstaje w podporze przegubowo-przesuwnej jest prostopadła do kierunku przesuwu (Rys.2.6 b, c, d). Podpora ta może występować w kilku wariantach, dwa najczęściej spotykane (pokazane na Rys.2.6 b, c) dają bardzo proste warunki podparcia:

- podpora przesuwna wzdłuż osi *Y* globalnego układu współrzędnych (Rys.2.6b)

$$\mathbf{u}_{rX} = 0, \tag{2.47}$$

- podpora przesuwna wzdłuż osi *X* globalnego układu współrzędnych (Rys.2.6c)

$$\mathbf{u}_{rY} = 0. \qquad (2.48)$$

Trzeci wariant podparcia przesuwnego sprawi nam trochę kłopotu przy opisaniu warunków brzegowych, gdyż kierunek reakcji na tej podporze (Rys.2.6d) nie jest równoległy do żadnej z osi globalnego układu współrzędnych. Jest to istotne z tego względu, że równania równowagi (2.40) prowadzące do równania (2.43), zapisane zostały w globalnym układzie współrzędnych. Na podporze z przesuwem nierównoległym do żadnej z osi układu globalnego (będziemy takie podpory nazywali *podporami ukośnymi*) musimy zrezygnować z tego wygodnego podejścia i zapisać je w układzie $x'y'$, związanym z podporą. Układ $x'y'$ obrócony jest w stosunku do układu globalnego o kąt α' (Rys.2.6d). Metodę transformacji równań równowagi dla węzła podporowego do układu lokalnego omówimy w następnym punkcie, teraz skupimy się na opisie warunku brzegowego. Warunek braku możliwości ruchu wzdłuż osi y' zapiszemy analogicznie jak (2.48):

$$\mathbf{u}_{ry'} = 0. \qquad (2.49)$$

Równania, opisujące warunki brzegowe ((2.46) ... (2.49)) dają nam gotowe wartości przemieszczeń w węzłach podporowych, tak więc część równań układu (2.43) powinna zostać usunięta, gdyż zawiera ona nieznane siły działające na węzły podporowe (reakcje więzów). Zamiast tych równań wstawić można do układu (2.43) równania warunków brzegowych (np.(2.46)). Operację taką wykonuje się zwykle przez modyfikację części równań (2.43).

Jeżeli m oznacza globalny numer stopnia swobody, który zostaje wyeliminowany warunkiem brzegowym: $u_m = 0$, modyfikujemy wtedy wiersz o numerze m w globalnej macierzy sztywności **K**, zastępując go wierszem zawierającym zera i jedynkę w kolumnie m:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \cdots & \mathbf{K}_{1m} & \cdots & \mathbf{K}_{1N_n} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \cdots & \mathbf{K}_{2m} & \cdots & \mathbf{K}_{2N_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{N_n 1} & \mathbf{K}_{N_n 2} & \cdots & \mathbf{K}_{N_n m} & \cdots & \mathbf{K}_{N_n N_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \\ \vdots \\ u_{N_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ P_{N_n} \end{bmatrix}$$

lub $\mathbf{K}^o \mathbf{u} = \mathbf{p}^r$. (2.50)

Zmodyfikować też należy wektor obciążeń węzłowych **p** tak, aby równanie m miało zero po prawej stronie. Zmodyfikowane macierze oznaczone zostały w równaniu (2.50) górnymi indeksami o, r.

Modyfikacja macierzy sztywności zaburza jej symetrię, gdyż $K_{im} \neq 0$ ale $K_{mi} = 0$ gdy $i \neq m$ (por. (2.50)). Brak symetrii macierzy sztywności nie uniemożliwia rozwiązania równań równowagi (2.43), ale znacznie obciąża pamięć komputera przechowującego współczynniki K_{ij} czy to w pamięci operacyjnej (RAM) czy też zewnętrznej (dysk) oraz wydłuża czas rozwiązania układu równań (por. dodatek 2). Spróbujmy zatem przywrócić symetrię macierzy $\mathbf{K}^o$ (2.50). Zauważmy, że wyrazy znajdujące się w kolumnie o numerze m mnożone są przez zerową wartość przemieszczenia u_m, nic więc nie stoi na przeszkodzie, aby wyzerować również współczynniki w kolumnie m (poza jednym umiejscowionym w wierszu m, który musi pozostać równy 1), gdyż wynik mnożenia będzie jednakowy. Zerowanie kolumny przywróci symetrię macierzy sztywności:

$$\mathbf{K}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \cdots & 0 & \cdots & \mathbf{K}_{1N_n} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \cdots & 0 & \cdots & \mathbf{K}_{2N_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{N_n 1} & \mathbf{K}_{N_n 2} & \cdots & 0 & \cdots & \mathbf{K}_{N_n N_n} \end{bmatrix} \tag{2.51}$$

Ostatecznie rozwiązujemy równanie

lub $\mathbf{K}^r \mathbf{u} = \mathbf{p}^r$, (2.52)

którego macierz $\mathbf{K}^r$ jest symetryczna i przy odpowiednim doborze warunków brzegowych nie osobliwa, tzn. $\det \mathbf{K}^r \neq 0$. Na podstawie twierdzenia o dodatniej wartości energii odkształcenia (równ. 1.45, rozdz. I) można też wyciągnąć wniosek, że macierz $\mathbf{K}^r$ musi być dodatnio określona, więc:

$\det \mathbf{K}^r > 0$. (2.53)

Zatem układ równań (2.52) ma jednoznaczne rozwiązanie.

W małych systemach (programach) MES pozostawia się zwykle macierz $\mathbf{K}^r$ w postaci jak w równaniu (2.51), duże systemy przygotowane do rozwiązywania zadań opisywanych wieloma tysiącami równań, usuwają zwykle wiersze i kolumny zawierające zera z macierzy $\mathbf{K}^r$ oraz wektora $\mathbf{p}^r$, aby zmniejszyć rozmiary rozwiązywanego problemu. Podejście takie wymaga dodatkowej modyfikacji macierzy $\mathbf{K}^r$, nowego ponumerowania stopni swobody konstrukcji. Ponieważ nie jest ono ściśle związane z MES, ale raczej z komputerową implementacją algorytmu MES, nie będziemy go tu omawiać.

2.7. TRANSFORMACJA MACIERZY SZTYWNOŚCI DLA PODPÓR „UKOŚNYCH”

Omówimy teraz sposoby transformacji macierzy sztywności elementu dołączonego do węzła podpartego podporą „ukośną” (Rys.2.6d). Układ współrzędnych $x'y'$ dobieramy tak, aby kierunek reakcji podporowej pokrywał się z osią y' a linia przesuwu równoległa była do osi x' (możliwy jest oczywiście odwrotny wybór lokalnego układu współrzędnych). Oś x' obrócona jest w stosunku do osi X układu globalnego o kąt α', który będziemy uważali za dodatni wówczas, gdy obrót od osi X do x' wykonywany będzie przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Rys.2.6d pokazuje dodatni zwrot kąta α'.

Jeżeli równania równowagi węzła podporowego r zapiszemy w układzie $x'y'$, to warunek brzegowy na tej podporze określi równanie (2.49). Spróbujmy wykonać potrzebną transformację. Wykorzystamy w tym celu związki (2.20) i (2.22), które posłużyły nam w p.2.3 do przejścia z układu lokalnego elementu do układu globalnego.

Wektor sił węzłowych w węźle r wyrazimy zatem następująco:

$$\begin{bmatrix} F_{rx'} \\ F_{ry'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c' & s' \\ -s' & c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{rX} \\ F_{rY} \end{bmatrix},$$

lub krócej

$$\mathbf{f}'_r = \left(\mathbf{R}'_r\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{f}_r . \tag{2.54}$$

Wektor przemieszczeń węzłowych węzła podporowego transformujemy z układu lokalnego do globalnego następująco:

$$\begin{bmatrix} u_{rX} \\ u_{rY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c' & -s' \\ s' & c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{rx'} \\ u_{ry'} \end{bmatrix},$$

lub w zwartej formie:

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{R}'_r \, \mathbf{u}'_r . \tag{2.55}$$

W równaniach (2.54) i (2.55) oznaczyliśmy:

$$\mathbf{R}'_r = \begin{bmatrix} c' & -s' \\ s' & c' \end{bmatrix}, \; c' = \cos\alpha', \; s' = \sin\alpha'$$

a $\left(\mathbf{R}'_r\right)^{\mathrm{T}}$ jest transpozycją macierzy $\mathbf{R}'_r$.

Załóżmy, że element *e* łączy węzły r_i oraz r_j podparte „ukośnymi" podporami obróconymi o kąty α'_i i α'_j (Rys.2.7). Równania równowagi w węzłach r_i i r_j zapiszemy wtedy w lokalnych układach współrzędnych $x'_i\, y'_i$ w węźle r_i oraz $x'_j\, y'_j$ węźle r_j. Transformacja wektorów sił i przemieszczeń węzłowych elementu *e* do tych układów wygląda następująco:

- wektor sił węzłowych

$$\mathbf{f}'^e = \left(\mathbf{R}'^e\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{f}^e \tag{2.56}$$

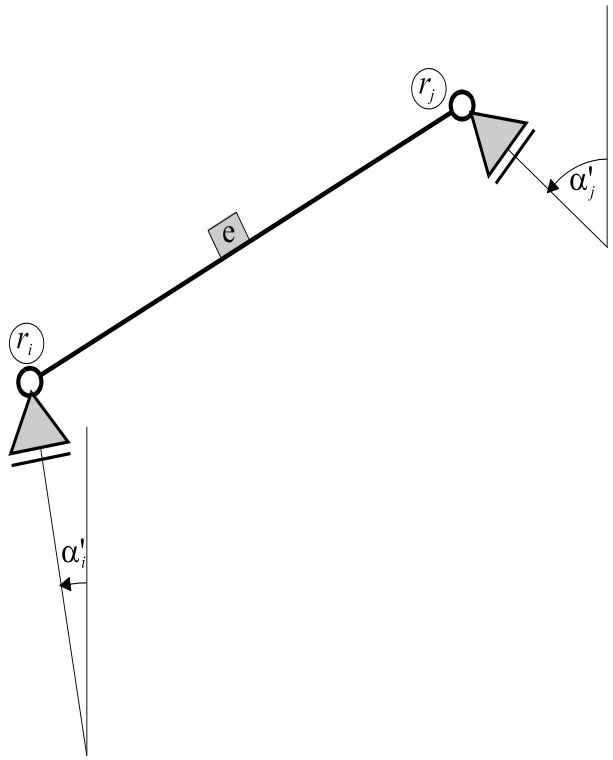
lub w formie rozwiniętej

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}'_{r_i} \\ \mathbf{f}'_{r_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\mathbf{R}'_{r_i}\right)^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \left(\mathbf{R}'_{r_j}\right)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{r_i} \\ \mathbf{f}_{r_j} \end{bmatrix},$$

- wektor przemieszczeń węzłowych:

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{R}'^e \, \mathbf{u}'^e \tag{2.57}$$

lub $\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{r_i} \\ \mathbf{u}_{r_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{r_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}'_{r_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}'_{r_i} \\ \mathbf{u}'_{r_j} \end{bmatrix}$.



Rys.2.7

Podstawiając związek (2.57) do (2.35), a następnie otrzymany wynik do (2.56) znajdziemy równanie transformujące macierz sztywności elementu *e* z globalnego układu współrzędnych do układów podporowych:

$$\mathbf{f}'^{e} = \left(\mathbf{R}'^{e}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{K}^{e} \mathbf{R}'^{e}\, \mathbf{u}'^{e} \tag{2.58}$$

Równanie to uprościmy do postaci:

$$\mathbf{f}'^{e} = \mathbf{K}'^{e}\, \mathbf{u}'^{e}, \tag{2.59}$$

w której wykorzystamy podstawienie:

$$\mathbf{K}'^{e} = \left(\mathbf{R}'^{e}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{K}^{e} \mathbf{R}'^{e}, \tag{2.60}$$

definiujące macierz elementu w podporowych układach współrzędnych.

Najczęściej jeden z kątów α' (Rys.2.7) jest równy zero, gdyż rzadko się zdarza, aby pręt kratownicy łączył dwa węzły podporowe podparte podporami ukośnymi. Macierz obrotu o kąt zerowy jest macierzą jednostkową. (c'=1, s'=0), więc macierz transformacji elementu upraszcza się do postaci:

$$\mathbf{R}'^{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}'_{r_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \tag{2.61}$$

gdy równania dotyczące węzła końcowego pozostają opisane w układzie globalnym, a transformujemy relacje sił i przemieszczeń w węźle początkowym r_i, oraz

$$\mathbf{R}'^{e} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}'_{r_j} \end{bmatrix}, \tag{2.62}$$

gdy transformacja dotyczy tylko węzła końcowego r_j.

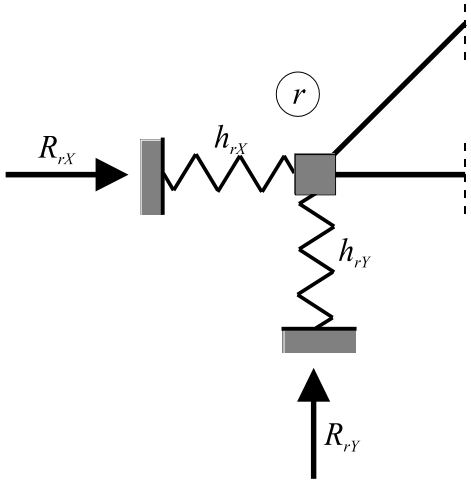
Obecność podpór ukośnych jak widać komplikuje prosty algorytm MES przedstawiony w rozdz.I, gdyż wymaga dodatkowych transformacji macierzy sztywności elementu przed agregacją macierzy globalnej. Są też inne, prostsze choć przybliżone metody rozwiązania tego problemu, które omówione będą w następnym punkcie dotyczącym elementów brzegowych.

2.8. PODPORY SPRĘŻYSTE I ELEMENTY BRZEGOWE

Nie wszystkie rodzaje podpór stosowane do podparcia kratownic dadzą się opisać warunkami brzegowymi typu (2.47), (2.48), (2.49). Istnieją podpory podatne, których przemieszczenia związane są z reakcją podporową np. liniowym związkiem typu:

$$R_{rX} = -h_{rX} u_{rX} \,, \qquad (2.63)$$
$$R_{rY} = -h_{rY} u_{rY} \,,$$

gdzie h_{rX} jest sztywnością podpory w kierunku osi X a h_{rY} jest sztywnością podpory w kierunku osi Y. Dobrym modelem takiej podpory jest liniowa sprężyna pokazana na Rys.2.8.



Rys.2.8

Jeżeli reakcje R_{rX} oraz R_{rY}, działające na węzeł podparty sprężyście, potraktować jak siły zewnętrze, to otrzymamy wektor sił węzłowych zawierający nieznane przemieszczenia u_{rX}, u_{rY}:

$$
\mathbf{p}=\begin{bmatrix} P_{1X} \\ P_{1Y} \\ \hline P_{2X} \\ P_{2Y} \\ \hline \vdots \\ \hline R_{rX} \\ R_{rY} \\ \hline \vdots \\ \hline P_{N_nX} \\ P_{N_nY} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ 2 \\ \\ \vdots \\ r \\ \\ \vdots \\ N_n \\ \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} P_{1X} \\ P_{1Y} \\ P_{2X} \\ P_{2Y} \\ \vdots \\ -h_{rX}u_{rX} \\ -h_{rY}u_{rY} \\ \vdots \\ P_{N_nX} \\ P_{N_nY} \end{bmatrix} \tag{2.64}
$$

Oczywiście taki wektor **p** nie może być użyty jako prawa strona równania (2.43), gdyż nieznane wartości przemieszczeń węzłowych powinny się znaleźć po lewej stronie równania. Przekształcimy teraz wektor **p** opisany równaniem (2.64) w ten sposób, że reakcje węzłowe węzła sprężystego *r* przeniesiemy na lewą stronę równania równowagi:

$$
\mathbf{K}^s\mathbf{u} = \mathbf{p}^r , \tag{2.65}
$$

gdzie $\mathbf{K}^s$ jest macierzą sztywności zawierającą informacje o sprężystych podporach konstrukcji, a $\mathbf{p}^r$ wektorem sił węzłowych, w którym zostały uwzględnione warunki brzegowe (podpory sprężyste, po przeniesieniu związków je opisujących na lewą stronę równania traktować można teraz jak niepodatne), opisany równaniem (2.50).

Macierz $\mathbf{K}^s$ opisana jest równaniem:

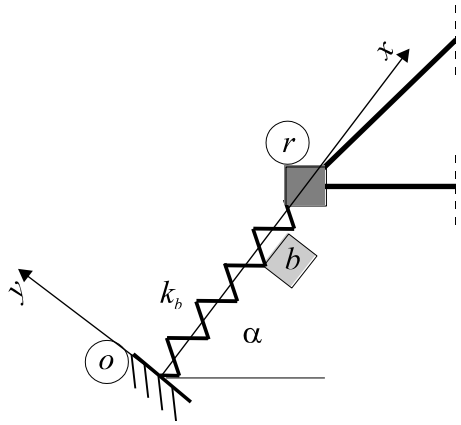
$$\mathbf{K}^s = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc|c|cc|c|c} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & & \mathbf{K}_{1m} & \mathbf{K}_{1(m+1)} & & \mathbf{K}_{1N_n} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \cdots & \mathbf{K}_{2m} & \mathbf{K}_{2(m+1)} & \cdots & \mathbf{K}_{2N_n} \\ \hline \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \hline \mathbf{K}_{m1} & \mathbf{K}_{m2} & & \mathbf{K}_{mm}+h_{rX} & \mathbf{K}_{m(m+1)} & & \mathbf{K}_{mN_n} \\ \mathbf{K}_{(m+1)1} & \mathbf{K}_{(m+1)2} & \cdots & \mathbf{K}_{(m+1)m} & \mathbf{K}_{(m+1)(m+1)}+h_{rY} & \cdots & \mathbf{K}_{(m+1)N_n} \\ \hline \vdots & & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{K}_{N_n1} & \mathbf{K}_{N_n2} & \cdots & \mathbf{K}_{N_nm} & \mathbf{K}_{N_n(m+1)} & \cdots & \mathbf{K}_{N_nN_n} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \\ \vdots \\ r \\ \\ N_n \end{array} \qquad (2.66)$$

gdzie m jest globalnym numerem pierwszego stopnia swobody węzła r. Przy standardowej numeracji $m=(r-1)N_D+1$, gdzie N_D jest ilością stopni swobody węzła. Dla kratownicy płaskiej $N_D=2$, więc numer pierwszego stopnia swobody węzła r jest wtedy równy $m=2r-1$.

Zmodyfikowana macierz sztywności $\mathbf{K}^s$ zawiera teraz na głównej przekątnej, w wierszach opisujących równowagę węzła r, sztywności podpór sprężystych dodane do wyrazów sztywność elementów konstrukcji. Taka interpretacja podpór sprężystych nasuwa pewien wygodny, choć uproszczony sposób uwzględnienia niepodatnych podpór. Zastępujemy je podporami sprężystymi o bardzo dużej sztywności, wstawiając na przekątną macierzy sztywności liczby równe np. $H=1\cdot10^{30}$. Sposób ten obmyślił Irons [7], który mnożył wyrazy leżące na przekątnej macierzy **K**

w odpowiednim wierszu przez liczby rzędu 10^6. Po wstawieniu dużej liczby na przekątną, zbędne są zerowania wierszy i kolumn w macierzy **K** oraz odpowiedniego wiersza w wektorze prawej strony **p**. Ma to szczególne duże znaczenie przy dużych macierzach sztywności, przechowywanych często w innych strukturach danych niż tablice kwadratowe (por. dodatek 2). Prostota tego sposobu sprawia, że jest on powszechnie stosowany w komputerowych implementacjach algorytmu MES, zamiast metody dokładnej opisanej w p.2.6.

Podpory sprężyste podsuwają też pomysł użycia specjalnego elementu podporowego, który mógłby zastąpić wszelkie więzy sprężyste, jak i sztywne (które traktować należy jak sprężyste o bardzo dużej sztywności). Element ten obrócony względem układu globalnego o kąt α pokazuje Rys.2.9.



Rys.2.9

Macierz sztywności takiego elementu możemy łatwo otrzymać z macierzy zwykłego elementu prętowego kratownicy opisanego równaniem (2.14) w lokalnym układzie współrzędnych lub (2.36) w układzie globalnym. Należy mianowicie zastąpić sztywności pręta EA/L, sztywnością sprężyny elementu brzegowego k_b. Ponieważ węzeł *o* tego elementu z założenia jest zawsze nieruchomy, możemy usunąć go z układu równań co pozwala traktować element brzegowy jak element o dwóch stopniach swobody:

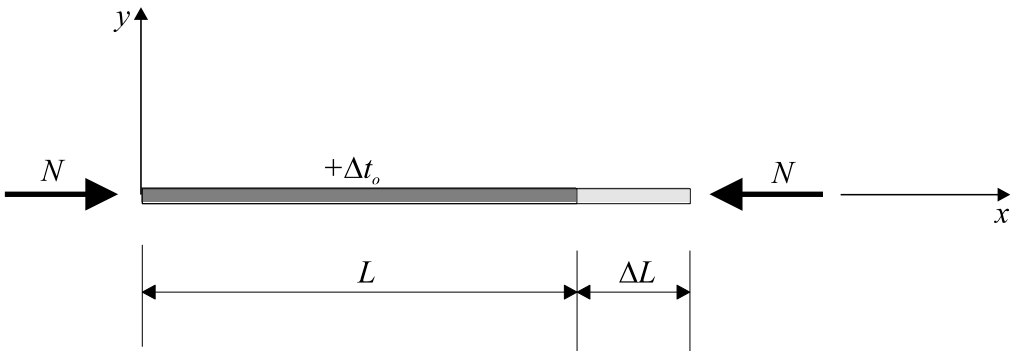
$$\mathbf{K}^b = k_b \begin{bmatrix} c^2 & sc \\ sc & s^2 \end{bmatrix}, \tag{2.67}$$

gdzie analogicznie jak w równaniu (2.37) $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$.

Gdy chcemy tym elementem zastąpić podporę niepodatną, przyjmujemy k_b=H. Wielkość liczby H zależy od systemu komputerowego, na którym ma zostać uruchomiony program a w szczególności od stosowanego typu liczb rzeczywistych (pojedyncza, podwójna precyzja). Dla wielu systemów można przyjąć np. H=1·10^{30}.

2.9. WEKTOR OBCIĄŻEŃ WĘZŁOWYCH PRZY OBCIĄŻENIU TEMPERATURĄ I CIĘŻAREM WŁASNYM

Jak już wspominaliśmy na wstępie tego rozdziału jedynymi obciążeniami kratownicy, które działają na elementy, a nie bezpośrednio na węzły, są obciążenia termiczne i grawitacyjne. Pokażemy teraz jak te obciążenia sprowadzić do znanego nam obciążenia - sił skupionych działających na węzły konstrukcji.



Rys.2.10

Jak wiemy wzrost temperatury elementu wywołuje jego wydłużenie, które przy założeniu równomiernego wzrostu temperatury na całej długości pręta, opisane jest równaniem:

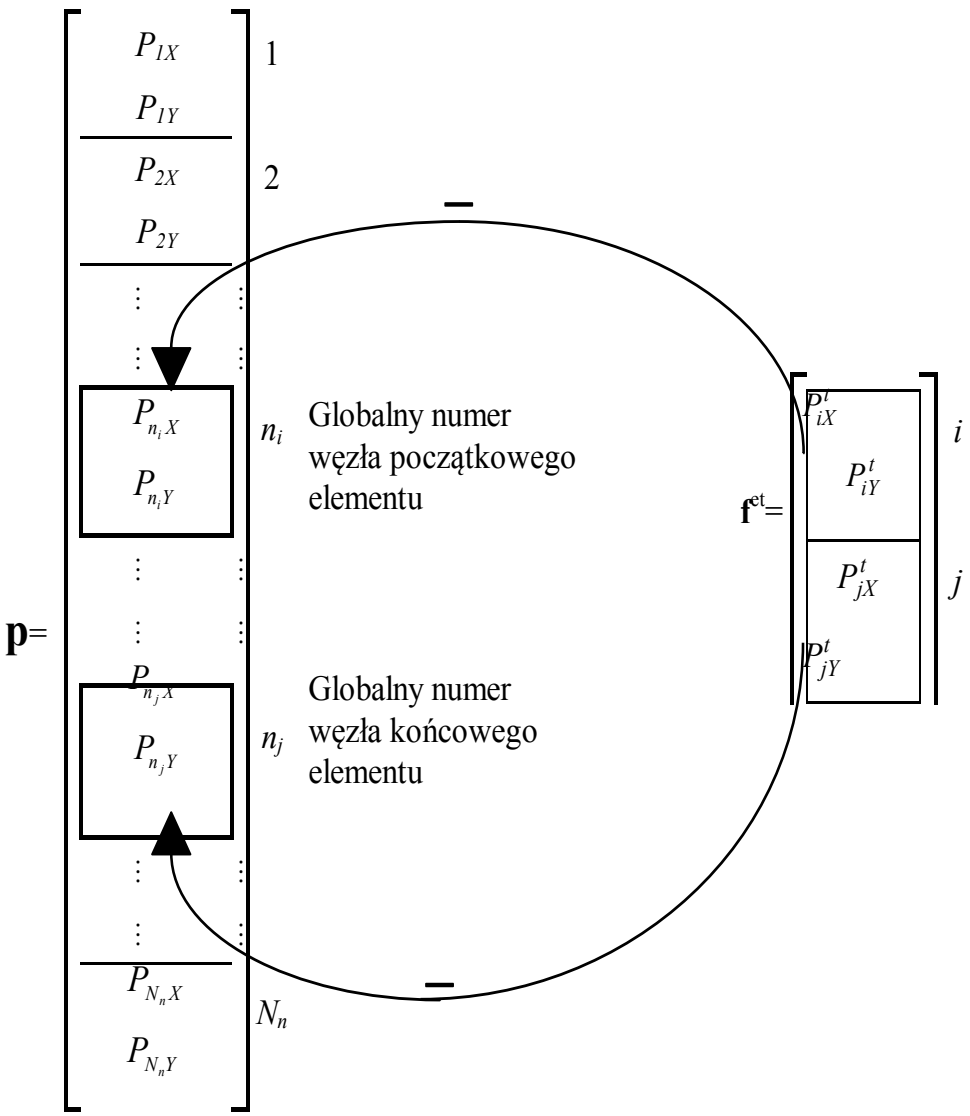
$$\varepsilon_t = \frac{\Delta L}{L} = \alpha_t \Delta t_o, \tag{2.68}$$

gdzie α_t - jest współczynnikiem rozszerzalności cieplnej materiału, z którego wykonany jest element, Δt_o oznacza przyrost temperatury włókien środkowych (łączących środki ciężkości przekrojów poprzecznych elementu).

Zakładamy równomierny wzrost temperatury w całym przekroju, oraz jednorodność materiału. Przyjmując, że element nie ma swobody wydłużenia się, lecz jest ograniczony nieruchomymi węzłami, otrzymamy siłę osiową, która powstaje wewnątrz elementu:

$$N = -\int_A \sigma_t dA = -\int_A E\varepsilon_t dA = -\int_A E\alpha_t \Delta t_o dA = -E\alpha_t \Delta t_o A, \tag{2.69}$$

gdzie E oznacza moduł Younga materiału, A - pole powierzchni przekroju poprzecznego elementu.


p=
P_{1X}
P_{1Y}
1
P_{2X}
P_{2Y}
2
P_{n_iX}
P_{n_iY}
n_i
Globalny numer węzła początkowego elementu
P_{n_jX}
P_{n_jY}
n_j
Globalny numer węzła końcowego elementu
P_{N_nX}
P_{N_nY}
N_n
f^{et}=
P^t_{iX}
P^t_{iY}
P^t_{jX}
P^t_{jY}
i
j

$F_{iX}^{t} = EA\alpha_t \Delta t_o \cos\alpha$ $\qquad$ $F_{jX}^{t} = -EA\alpha_t \Delta t_o \cos\alpha$

$F_{iY}^{t} = EA\alpha_t \Delta t_o \sin\alpha$ $\qquad$ $F_{jY}^{t} = -EA\alpha_t \Delta t_o \sin\alpha$

Rys.2.11

Wektor sił węzłowych elementu wywołanych temperaturą, zapisany w lokalnym układzie współrzędnych *xy* jest zatem równy:

$$\mathbf{f}'^{et} = EA\alpha_t \Delta t_o \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.70}$$

po transformacji do układu globalnego przy pomocy związku (2.31) otrzymamy:

$$\mathbf{f}^{et} = EA\alpha_t \Delta t_o \begin{bmatrix} c \\ s \\ -c \\ -s \end{bmatrix}, \tag{2.71}$$

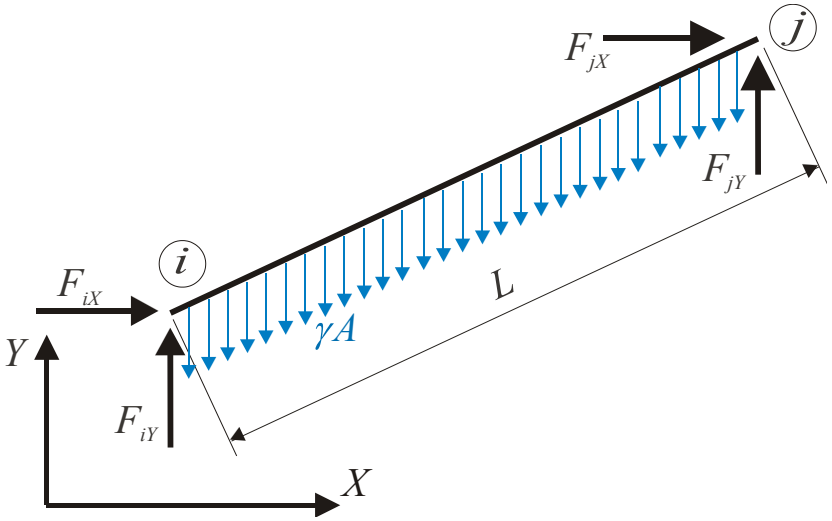
gdzie $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$, α - jest kątem określającym nachylenie obciążanego elementu względem globalnego układu współrzędnych.

Ponieważ do ułożenia równań równowagi niezbędne są siły działające na węzły, które jak wiadomo są przeciwnie skierowane do ich odpowiedników działających na element, to podczas budowy globalnego wektora obciążeń węzłowych odejmujemy je od innych sił działających na węzły. Pokazane jest to poglądowo na Rys.2.11.

- **Siły węzłowe wywołane ciężarem własnym elementów**

Obciążenie ciężarem własnym (obciążenie grawitacyjne) można zastąpić obciążeniem ciągłym, równomiernie rozłożonym na długości elementu, gdy pole przekroju tego elementu jest niezmienne. Gdy ponadto założymy, że globalna oś Y jest równoległa do kierunku sił grawitacyjnych, otrzymamy bardzo prosty układ statyczny przedstawiony na rys.2.11a.

Równowaga sił F_X prowadzi nas do zależności $F_{iX} = -F_{jX}$, wskazującej na samo-równoważenie się tego układu w kierunku poziomym. Można także przyjąć, nie popełniając znaczącego błędu, że siły te są równe zeru gdy ugięcia pręta spowodowane ciężarem własnym są małe w porównaniu z jego długością. Równowaga sił w kierunku pionowym oraz zerowanie ich momentów daje nam wtedy proste zależności: $F_{iY} = F_{jY} = \gamma A \times L/2$, gdzie γ oznacza ciężar właściwy materiału.



Rys. 2.11a

Wektor sił wywołanych ciężarem elementu kratownicy a oddziałujących na węzły konstrukcji $\mathbf{f}^{eq}$ będzie zatem zawierał składowe $-F_{iY}$ oraz $-F_{jY}$:

$$\mathbf{f}^{eq} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F_{iY} \\ 0 \\ -F_{jY} \end{bmatrix} = \frac{\gamma AL}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \tag{2.71a}$$

Agregacja wektora globalnego może być wykonana podobnie jak to było pokazane przy obciążeniu termicznym (Rys. 2.11) z tą różnicą, że teraz będziemy siły dodawali (bo oddziałują na węzeł konstrukcji) a nie odejmowali. Ostatecznie wektor prawej strony układu równań można przedstawić następująco:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^P - \mathbf{p}^t + \mathbf{p}^q, \tag{2.71b}$$

gdzie

- $\mathbf{p}^P$– jest wektorem zewnętrzych sił skupionych przyłozonych do węzłów konstrukcji,
- $\mathbf{p}^t$– jest wektorem sił termicznych działających na węzły elementu
- $\mathbf{p}^q$– jest wektorem sił grawitacyjnych przyłożonych dowęzłów konstrukcji.

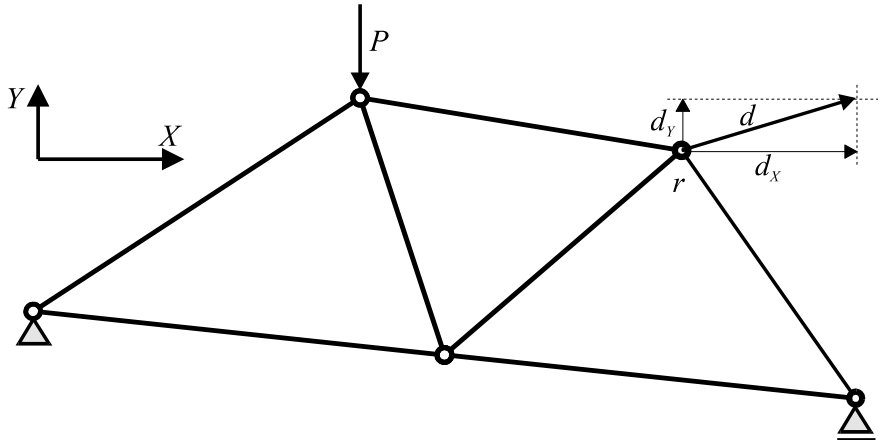
2.10. OBCIĄŻENIE GEOMETRYCZNE KRATOWNICY

Ostatnim typem obciążenia kratownicy, które omówimy, jest obciążenie geometryczne (wymuszenie przemieszczeń węzłów).

Załóżmy, że węzeł *r* został przemieszczony o wektor **d** (Rys.2.12). Oczywiście konieczne jest przyłożenie sił do węzła, aby wymusić to przemieszczenie, ale ich wartości nie są znane, znamy natomiast składowe przemieszczenia węzła *r*:

$$u_{rX} = d_X, \; u_{rY} = d_Y, \tag{2.72}$$

gdzie d_X, d_Y są składowymi wektora wymuszonego przemieszczenia **d**.



Rys.2.12

Równanie (2.72) przypomina nam znane równania warunków brzegowych (2.47) i (2.48), z tą różnicą, że teraz otrzymaliśmy równania niejednorodne. Zmieni to sposób postępowania podczas symetryzacji macierzy sztywności. Poprzednio zerowaliśmy odpowiednią kolumnę macierzy **K**, co nie wywoływało żadnych konsekwencji, gdyż i tak była ona mnożona przez zerową wartość przemieszczeń węzłów podporowych. Teraz musimy zachować składowe macierzy występujące w tej kolumnie, gdyż są one mnożone przez zadane przemieszczenia (por. równ. (2.72), a więc w ogólności nie są zerowe.

Transformacje macierzy sztywności **K** oraz wektora obciążeń węzłowych, które doprowadzą do uwzględnienia obciążenia geometrycznego powinny więc wyglądać następująco:

1. Tworzymy wektory $\mathbf{k}_{rX}$ oraz $\mathbf{k}_{rY}$, które są odpowiednimi kolumnami macierzy **K**, powiązanymi z przemieszczeniami węzła r. Kolumna $\mathbf{k}_{rX}$ jest kolumną o numerze równym numerowi globalnemu przemieszczenia u_{rX} a kolumna $\mathbf{k}_{rY}$, kolumną o numerze zgodnym z globalnym numerem przemieszczenia u_{rY}.
2. Przenosimy na prawą stronę układu równań siły węzłowe wywołane znanymi przemieszczeniami d_X i d_Y:

$$\mathbf{p}^d = \mathbf{p} - \mathbf{k}_{rX} d_X - \mathbf{k}_{rY} d_Y . \tag{2.73}$$

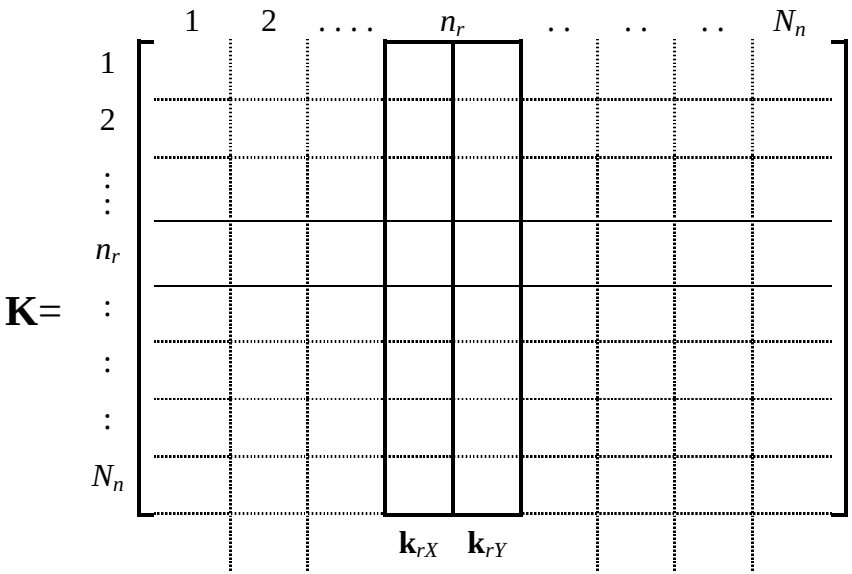
3. Uwzględniamy w standardowy sposób warunki brzegowe tak, jak to było omówione w p.2.6 z tą różnicą, że w wektorze prawej strony $\mathbf{p}^d$ w wiersze o numerach globalnych odpowiadających stopniom swobody u_{rX} oraz u_{rY} wstawiamy znane wartości przemieszczeń d_X oraz d_Y, otrzymując wektor $\mathbf{p}^{rd}$.

Po wykonaniu tych transformacji powstaje następujący układ równań:

$$\mathbf{K}^r \mathbf{u} = \mathbf{p}^{rd} , \tag{2.74}$$

gdzie $\mathbf{K}^r$ jest macierzą sztywności zmodyfikowaną przez standardowe uwzględnienie warunków brzegowych jak w równaniu (2.51), a $\mathbf{p}^{rd}$ zmodyfikowanym wektorem $\mathbf{p}^d$ określonym równaniem (2.73) przez wstawienie zadanych wartości przemieszczeń:

$P_{rX} = d_X$, $P_{rY} = d_Y$.



Rys.2.13 a

$$
\mathbf{p}^{d}=\begin{array}{c|c}
\left[\begin{array}{c} P_{1X} \\ P_{1Y} \\ \hline P_{2X} \\ P_{2Y} \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ \hline P_{rX} \\ P_{rY} \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ \hline \vdots \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ \vdots \\ \vdots \\ n_r \\ \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}
\end{array}
\qquad
\mathbf{-k}_{rX}\cdot d_X\mathbf{-k}_{rY}\cdot d_Y
\qquad
\mathbf{p}^{rd}=\begin{array}{c|c}
\left[\begin{array}{c} \\ \\ \hline \\ \\ \hline \\ \\ \hline d_X \\ d_Y \\ \hline \\ \\ \hline \\ \\ \hline \\ \end{array}\right] & \begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ \vdots \\ \vdots \\ n_r \\ \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array}
\end{array}
$$

Rys.2.13 b

2.11. REAKCJE WĘZŁÓW, SIŁY WEWNĘTRZNE I NAPRĘŻENIA W ELEMENTACH

Po agregacji macierzy sztywności, uwzględnieniu warunków brzegowych, zbudowaniu wektora sił węzłowych otrzymujemy układ równań liniowych w postaci (2.52), (2.65), lub (2.74) o dodatnio określonej, symetrycznej macierzy. Metodom rozwiązywania tego typu równań poświęcony jest dodatek 2. Rozwiązaniem układu równań jest wektor przemieszczeń węzłowych konstrukcji. Znajomość przemieszczeń węzłów pozwala w prosty sposób wyznaczyć sumy kontrolne w węzłach, a w węzłach podporowych - reakcje więzów. Wykorzystujemy w tym celu równanie (2.43), w którym macierz sztywności **K** nie zawiera żadnych informacji o więzach podporowych

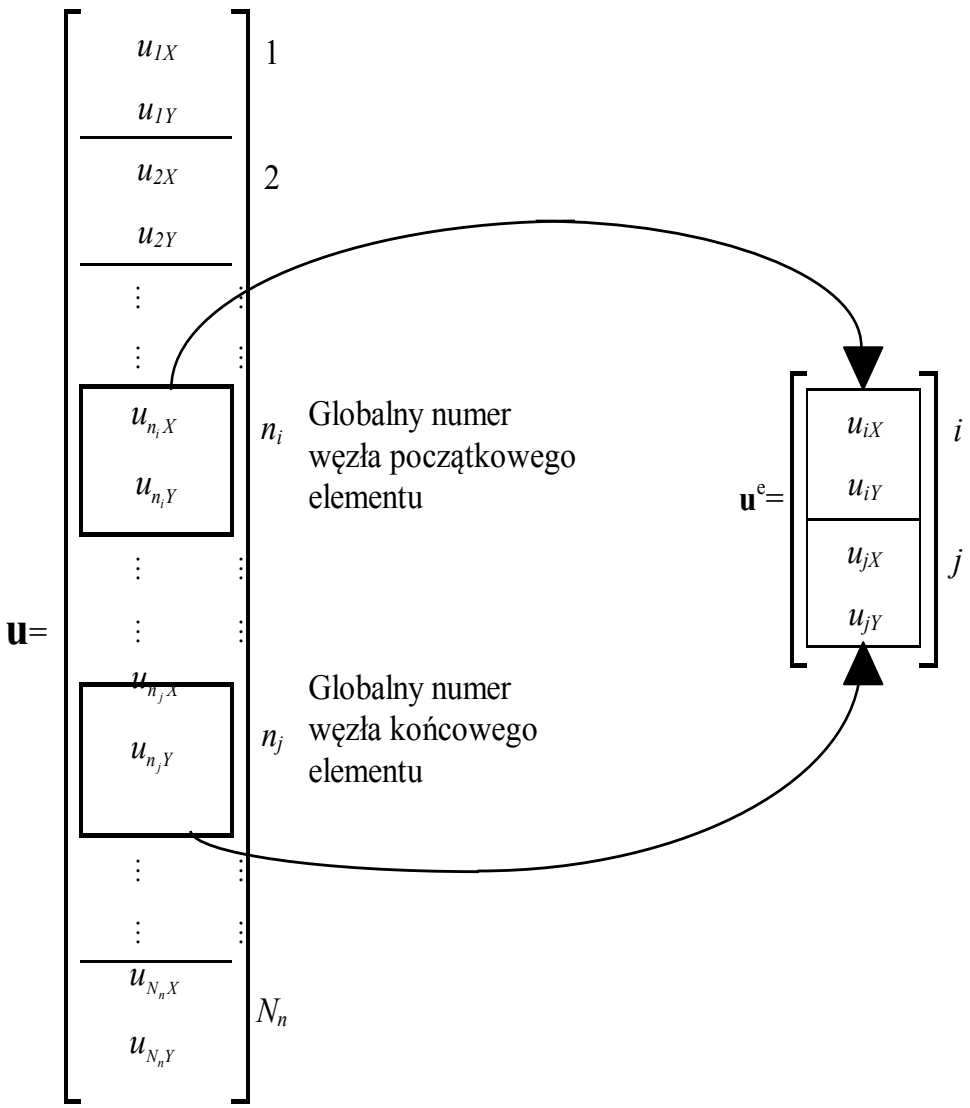
$$\mathbf{r} = \mathbf{K}\,\mathbf{u} - \mathbf{p}\,. \tag{2.75}$$

Wektor reakcji **r** powinien zawierać zera w węzłach swobodnych oraz wartości reakcji w węzłach podporowych. Jeżeli w jakimś węźle założyliśmy lokalny układ współrzędnych (podpory ukośne), to otrzymane składowe reakcji też będą wyrażane w lokalnym układzie współrzędnych.

Ponieważ w czasie rozwiązywania nawarstwiają się błędy numeryczne wynikające z przybliżonych wartości liczb przechowywanych w pamięci komputera, to sumy kontrolne rzadko są równe zero, a częściej są małymi liczbami rzędu np. $1 \cdot 10^{-10}$.

Składowe globalnego wektora przemieszczeń węzłowych umożliwiają utworzenie wektorów przemieszczeń węzłowych elementów (Rys.2.14).

Ponieważ nie zawsze składowe wektora **u** zapisane są w globalnym układzie współrzędnych (podpory ukośne), to może się zdarzyć, że część składowych wektora $\mathbf{u}^e$ wyrażona jest w globalnym a część w lokalnym układzie współrzędnych. Dla prostoty dalszych rozważań, przed użyciem wektora $\mathbf{u}^e$ doprowadzamy do ujednolicenia opisu , sprowadzając jego składowe do globalnego układu współrzędnych, wykorzystując w tym celu równanie (2.57). Należy zauważyć, że jest to konieczne tylko dla elementów połączonych z węzłem podpartym podporą „ukośną”.


u=
u1X
u1Y
1
u2X
u2Y
2
un_iX
un_iY
ni
Globalny numer węzła początkowego elementu
un_jX
un_jY
nj
Globalny numer węzła końcowego elementu
uN_nX
uN_nY
Nn
ue=
uiX
uiY
i
ujX
ujY
j

Rys.2.14

Przemieszczenia węzłów elementu pozwalają łatwo obliczyć siłę wewnętrzną N w pręcie kratownicy. Wykorzystać można równanie (2.11), które wymaga znajomości przemieszczeń w układzie lokalnym elementu, lub też na podstawie równań (2.9), (2.13), (2.32) znajdziemy zależność:

$$N = \frac{EA}{L}\left[c\left(u_{jX} - u_{iX}\right) + s\left(u_{jY} - u_{iY}\right)\right], \tag{2.76}$$

gdzie podobnie jak w równaniu (2.18) $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$.

Naprężenia w elemencie kratownicy, przy założeniu jednorodności pręta, są tylko naprężeniami osiowymi, które można wyliczyć z prostego związku:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{E}{L}\left[c\left(u_{jX} - u_{iX}\right) + s\left(u_{jY} - u_{iY}\right)\right]. \tag{2.77}$$

Jeżeli element obciążony był temperaturą, to w równaniach (2.76) i (2.77) należy uwzględnić poprawkę wynikającą z termicznej rozszerzalności materiału:

$$\sigma_x = E\left(\varepsilon - \varepsilon_t\right) = \frac{E}{L}\left[c\left(u_{jX} - u_{iX}\right) + s\left(u_{jY} - u_{iY}\right) - L\left(\alpha_t \Delta t_o\right)\right] \tag{2.78}$$

oraz

$$N = A\sigma_x = \frac{EA}{L}\left[c\left(u_{jX} - u_{iX}\right) + s\left(u_{jY} - u_{iY}\right) - L\left(\alpha_t \Delta t_o\right)\right]. \tag{2.79}$$

Obliczenie przemieszczeń, reakcji więzów i sił wewnętrznych w elementach kończy analizę statyczną kratownicy.

(2.33) (2.34) (2.35) (2.37)
(2.70) (2.31) (2.75) (2.5)
(2.11) (2.12a) (2.34) (2.10)
Rys.2.11
ROZDZIAŁ II. STATYKA PŁASKICH KONSTRUKCJI KRATOWYCH..... 32
2.1. PODSTAWOWE ZWIĄZKI I OZNACZENIA 32
2.2.MACIERZ SZTYWNOŚCI ELEMENTU KRATOWNICY PŁASKIEJ W LOKALNYM UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH 35
2.3. OBRÓT WEKTORA WĘZŁOWEGO. ZMIANA UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH . 39
2.4.MACIERZ SZTYWNOŚCI ELEMENTU W GLOBALNYM UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH 42
2.5. RÓWNANIA RÓWNOWAGI WĘZŁA I AGREGACJA MACIERZY SZTYWNOŚCI43
2.6. WARUNKI BRZEGOWE 49
2.7. TRANSFORMACJA MACIERZY SZTYWNOŚCI DLA PODPÓR „UKOŚNYCH”54
2.8. PODPORY SPRĘŻYSTE I ELEMENTY BRZEGOWE 57
2.9. WEKTOR OBCIĄŻEŃ WĘZŁOWYCH PRZY OBCIĄŻENIU TEMPERATURĄ .. 62
2.10. OBCIĄŻENIE GEOMETRYCZNE KRATOWNICY 67
2.11. REAKCJE WĘZŁÓW, SIŁY WEWNĘTRZNE I NAPRĘŻENIA W ELEMENTACH73