

Trójkatny element tarczowy

ORIGIN := 1

$E := 20\text{GPa}$ - moduł Younga

$\nu := 0.2$ - współczynnik Poissona

$t := 0.01\text{m}$ - grubość tarczy

wektor współrzędnych elementu

$$xa = \begin{pmatrix} xi \\ yi \\ xj \\ yj \\ xk \\ yk \end{pmatrix} \quad xa := \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2}$$

wektor przemieszczeń elementu

$$u := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}$$

N(x, y) := (1 x y) - wielomiany funkcji kształtu

$dNx(x, y) = \frac{d}{dx} N(x, y)$
- pochodna wielomianu funkcji kształtu

$$dNx := (0 \quad 1 \quad 0)$$

$dNy(x, y) = \frac{d}{dy} N(x, y)$
- pochodna wielomianu funkcji kształtu

$$dNy := (0 \quad 0 \quad 1)$$

$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & xi & yi \\ 1 & xj & yj \\ 1 & xk & yk \end{pmatrix}$ - macierz współrzędnych elementu

$$M(x) := \text{stack}(N(x_1, x_2), N(x_3, x_4), N(x_5, x_6))$$

$Ma := M(xa)$ $Ma = \begin{pmatrix} 1 & -0.04 & 0 \\ 1 & 0.02 & 0.01 \\ 1 & 0 & 0.04 \end{pmatrix}$ - macierz współrzędnych elementu

$$|Ma| = 2 \times 10^{-3}$$

$Va := \frac{t}{2} \cdot |Ma|$ - objętość elementu

Wyznaczanie współczynników funkcji kształtu

$$u_i := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_j := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_k := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i := \text{lsolve}(Ma, u_i) \quad \alpha_j := \text{lsolve}(Ma, u_j) \quad \alpha_k := \text{lsolve}(Ma, u_k)$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0.4 \\ -15 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \alpha_j = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 20 \\ -20 \end{pmatrix} \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} -0.2 \\ -5 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$N_i(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_i \quad \text{- funkcja kształtu węzła "i"}$$

$$N_j(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_j \quad \text{- funkcja kształtu węzła "j"}$$

$$N_k(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_k \quad \text{- funkcja kształtu węzła "k"}$$

$$B\alpha(\alpha) := \begin{pmatrix} dN_x \cdot \alpha & 0 \\ 0 & dN_y \cdot \alpha \\ dN_y \cdot \alpha & dN_x \cdot \alpha \end{pmatrix} \quad \text{- macierz geometryczna węzła}$$

$$B := \text{augment}(B\alpha(\alpha_i), B\alpha(\alpha_j), B\alpha(\alpha_k)) \quad \text{- macierz geometryczna elementu}$$

$$B = \begin{pmatrix} -15 & 0 & 20 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & -20 & 0 & 30 \\ -10 & -15 & -20 & 20 & 30 & -5 \end{pmatrix}$$

$$D := \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{pmatrix} \quad \text{- macierz stałych sprężystych dla PSN}$$

Macierz sztywności elementu CST

$$K = \int B^T \cdot D \cdot B \, dV \quad \underline{K} := B^T \cdot D \cdot B \cdot Va$$

$$K = \begin{pmatrix} 552.1 & 187.5 & -458.3 & -41.7 & -93.7 & -145.8 \\ 187.5 & 395.8 & 166.7 & 166.7 & -354.2 & -562.5 \\ -458.3 & 166.7 & 1166.7 & -500.0 & -708.3 & 333.3 \\ -41.7 & 166.7 & -500.0 & 1166.7 & 541.7 & -1333.3 \\ -93.7 & -354.2 & -708.3 & 541.7 & 802.1 & -187.5 \\ -145.8 & -562.5 & 333.3 & -1333.3 & -187.5 & 1895.8 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{cm}$$

$$\underline{\varepsilon} := B \cdot u = \begin{pmatrix} 3.5 \\ -7 \\ 3.5 \end{pmatrix} \cdot \% \quad - \text{wektor odkształceń elementu CST}$$

$$\sigma := D \cdot \varepsilon = \begin{pmatrix} 4.375 \times 10^4 \\ -1.313 \times 10^5 \\ 2.917 \times 10^4 \end{pmatrix} \cdot MPa \quad - \text{wektor naprężeń w elemencie przy PSN}$$

- macierz stałych sprężystych dla PSO

$$D2 := \frac{E}{(1 - \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\sigma} := D2 \cdot \varepsilon = \begin{pmatrix} 5.833 \times 10^4 \\ -2.042 \times 10^5 \\ 4.375 \times 10^4 \end{pmatrix} \cdot MPa \quad - \text{wektor naprężeń w elemencie przy PSO}$$

Prostokątny element tarczowy

$$Lx := 6 \cdot 10^{-2}$$

$$Ly := 3 \cdot 10^{-2}$$

$$N(x, y) := (1 \quad x \quad y \quad x \cdot y)$$

$$dNx(x, y) = \frac{d}{dx} N(x, y)$$

$$dNx(x, y) := (0 \quad 1 \quad 0 \quad y)$$

$$dNy(x, y) = \frac{d}{dy} N(x, y)$$

$$dNy(x, y) := (0 \quad 0 \quad 1 \quad x)$$

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i \cdot y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j \cdot y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k \cdot y_k \\ 1 & x_l & y_l & x_l \cdot y_l \end{pmatrix}$$

- macierz współrzędnych elementu

$$M(x) := \text{stack}(N(x_1, x_2), N(x_3, x_4), N(x_5, x_6), N(x_7, x_8))$$

$$Ma := M(xa)$$

$$Ma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.06 & 0 & 0 \\ 1 & 0.06 & 0.03 & 1.8 \times 10^{-3} \\ 1 & 0 & 0.03 & 0 \end{pmatrix}$$

wektor współrzędnych elementu

$$xa = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \\ x_k \\ y_k \\ x_l \\ y_l \end{pmatrix} \quad xa := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Lx \\ 0 \\ Lx \\ Ly \\ 0 \\ Ly \end{pmatrix}$$

$$Lss := \text{rows}(xa) = 8$$

$$|Ma| = -3.24 \times 10^{-6}$$

$$A := Lx \cdot Ly \quad \text{- pole powierzchni elementu}$$

$$Va := t \cdot A \quad \text{- objętość elementu}$$

Wyznaczanie współczynników funkcji kształtu

$$u_i := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_j := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_k := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_l := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

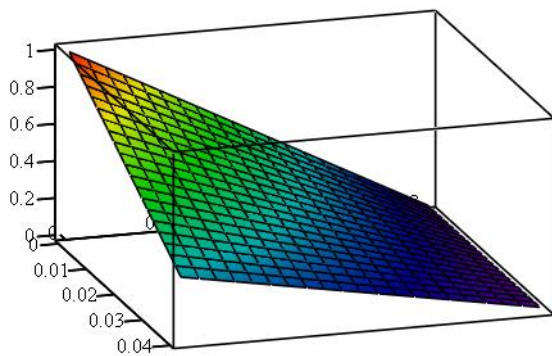
$$\alpha_i := \text{Lsolve}(Ma, u_i) \quad \alpha_j := \text{Lsolve}(Ma, u_j)$$

$$\alpha_k := \text{Lsolve}(Ma, u_k) \quad \alpha_l := \text{Lsolve}(Ma, u_l)$$

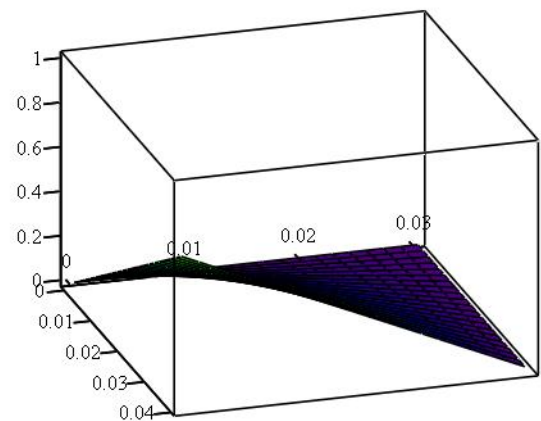
$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 1 \\ -16.667 \\ -33.333 \\ 555.556 \end{pmatrix} \quad \alpha_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 16.667 \\ 0 \\ -555.556 \end{pmatrix} \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 555.556 \end{pmatrix} \quad \alpha_l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 33.333 \\ -555.556 \end{pmatrix}$$

$$N_i(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_i \quad \text{- funkcja kształtu węzła "i"}$$

$$N_j(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_j \quad \text{- funkcja kształtu węzła "j"}$$



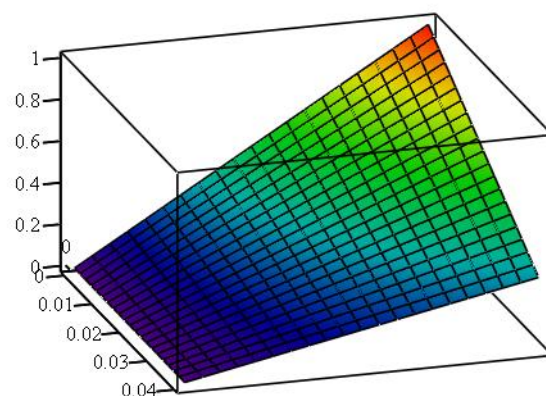
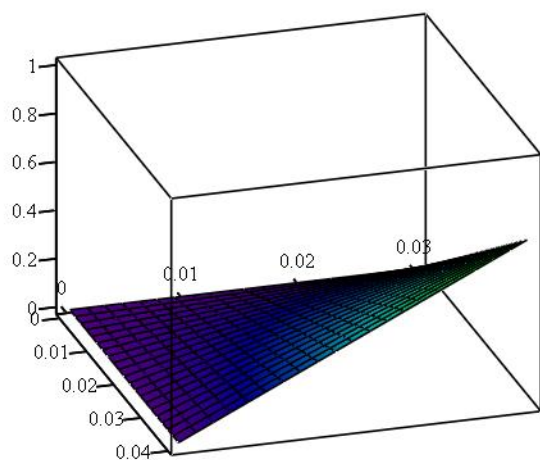
N_i



N_j

$N_k(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_k$ - funkcja kształtu węzła "k"

$N_L(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_L$ - funkcja kształtu węzła "l"



N_L

N_k