

Trójkatny element tarczowy

ORIGIN := 1

$E := 20\text{GPa}$ - moduł Younga

$\nu := 0.2$ - współczynnik Poissona

$t := 0.01\text{m}$ - grubość tarczy

wektor współrzędnych elementu

wektor przemieszczeń elementu

$$xa = \begin{pmatrix} xi \\ yi \\ xj \\ yj \\ xk \\ yk \end{pmatrix} \quad xa := \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2} \quad u := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}$$

N(x, y) := (1 x y) - wielomiany funkcji kształtu

$dNx(x, y) = \frac{d}{dx} N(x, y)$
- pochodna wielomianu funkcji kształtu

$$dNx := (0 \quad 1 \quad 0)$$

$dNy(x, y) = \frac{d}{dy} N(x, y)$
- pochodna wielomianu funkcji kształtu

$$dNy := (0 \quad 0 \quad 1)$$

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & xi & yi \\ 1 & xj & yj \\ 1 & xk & yk \end{pmatrix} \quad - \text{macierz współrzędnych elementu}$$

$$M(x) := \text{stack}(N(x_1, x_2), N(x_3, x_4), N(x_5, x_6))$$

$$Ma := M(xa) \quad Ma = \begin{pmatrix} 1 & -0.05 & 0 \\ 1 & 0.02 & -0.01 \\ 1 & 0 & 0.02 \end{pmatrix} \quad - \text{macierz współrzędnych elementu}$$

$$|Ma| = 1.9 \times 10^{-3}$$

$$Va := \frac{t}{2} \cdot |Ma| \quad - \text{objętość elementu}$$

Wyznaczanie współczynników funkcji kształtu

$$u_i := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_j := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_k := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i := \text{lsolve}(Ma, u_i) \quad \alpha_j := \text{lsolve}(Ma, u_j) \quad \alpha_k := \text{lsolve}(Ma, u_k)$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0.211 \\ -15.789 \\ -10.526 \end{pmatrix} \quad \alpha_j = \begin{pmatrix} 0.526 \\ 10.526 \\ -26.316 \end{pmatrix} \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0.263 \\ 5.263 \\ 36.842 \end{pmatrix}$$

$$N_i(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_i \quad \text{- funkcja kształtu węzła "i"}$$

$$N_j(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_j \quad \text{- funkcja kształtu węzła "j"}$$

$$N_k(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_k \quad \text{- funkcja kształtu węzła "k"}$$

$$B\alpha(\alpha) := \begin{pmatrix} dN_x \cdot \alpha & 0 \\ 0 & dN_y \cdot \alpha \\ dN_y \cdot \alpha & dN_x \cdot \alpha \end{pmatrix} \quad \text{- macierz geometryczna węzła}$$

$$B := \text{augment}(B\alpha(\alpha_i), B\alpha(\alpha_j), B\alpha(\alpha_k)) \quad \text{- macierz geometryczna elementu}$$

$$B = \begin{pmatrix} -15.789 & 0 & 10.526 & 0 & 5.263 & 0 \\ 0 & -10.526 & 0 & -26.316 & 0 & 36.842 \\ -10.526 & -15.789 & -26.316 & 10.526 & 36.842 & 5.263 \end{pmatrix}$$

$$D := \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{pmatrix} \quad \text{- macierz stałych sprężystych dla PSN}$$

Macierz sztywności elementu CST

$$K = \int B^T \cdot D \cdot B \, dV \quad \underline{\underline{K}} := B^T \cdot D \cdot B \cdot Va$$

$$K = \begin{pmatrix} 581.1 & 197.4 & -109.6 & 76.8 & -471.5 & -274.1 \\ 197.4 & 416.7 & 285.1 & 416.7 & -482.5 & -833.3 \\ -109.6 & 285.1 & 767.5 & -328.9 & -657.9 & 43.9 \\ 76.8 & 416.7 & -328.9 & 1458.3 & 252.2 & -1875.0 \\ -471.5 & -482.5 & -657.9 & 252.2 & 1129.4 & 230.3 \\ -274.1 & -833.3 & 43.9 & -1875.0 & 230.3 & 2708.3 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{cm}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} := B \cdot u = \begin{pmatrix} 2.6316 \\ -8.9474 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \% \quad - \text{wektor odkształceń elementu CST}$$

$$\sigma := D \cdot \varepsilon = \begin{pmatrix} 1.754 \times 10^4 \\ -1.754 \times 10^5 \\ -5.782 \times 10^{-12} \end{pmatrix} \cdot MPa \quad - \text{wektor naprężeń w elemencie przy PSN}$$

- macierz stałych sprężystych dla PSO

$$D2 := \frac{E}{(1 - \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} := D2 \cdot \varepsilon = \begin{pmatrix} 1.316 \times 10^4 \\ -2.763 \times 10^5 \\ -8.674 \times 10^{-12} \end{pmatrix} \cdot MPa \quad - \text{wektor naprężeń w elemencie przy PSO}$$

Prostokątny element tarczowy

$$Lx := 5 \cdot 10^{-2}$$

$$Ly := 4 \cdot 10^{-2}$$

$$\underline{N}(x, y) := (1 \quad x \quad y \quad x \cdot y)$$

$$dN_x(x, y) = \frac{d}{dx} N(x, y)$$

$$dN_x(x, y) := (0 \quad 1 \quad 0 \quad y)$$

$$dN_y(x, y) = \frac{d}{dy} N(x, y)$$

$$dN_y(x, y) := (0 \quad 0 \quad 1 \quad x)$$

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i \cdot y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j \cdot y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k \cdot y_k \\ 1 & x_l & y_l & x_l \cdot y_l \end{pmatrix}$$

- macierz współrzędnych elementu

$$\underline{M}(x) := \text{stack}(N(x_1, x_2), N(x_3, x_4), N(x_5, x_6), N(x_7, x_8))$$

$$Ma := M(xa)$$

$$Ma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.05 & 0 & 0 \\ 1 & 0.05 & 0.04 & 2 \times 10^{-3} \\ 1 & 0 & 0.04 & 0 \end{pmatrix}$$

wektor współrzędnych elementu

$$xa = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \\ x_k \\ y_k \\ x_l \\ y_l \end{pmatrix} \quad \underline{xa} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Lx \\ 0 \\ Lx \\ Ly \\ 0 \\ Ly \end{pmatrix}$$

$$Lss := \text{rows}(xa) = 8$$

$$|Ma| = -4 \times 10^{-6}$$

$$\underline{A} := Lx \cdot Ly \quad \text{- pole powierzchni elementu}$$

$$\underline{Va} := t \cdot A \quad \text{- objętość elementu}$$

Wyznaczanie współczynników funkcji kształtu

$$u_i := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_j := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_k := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_l := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

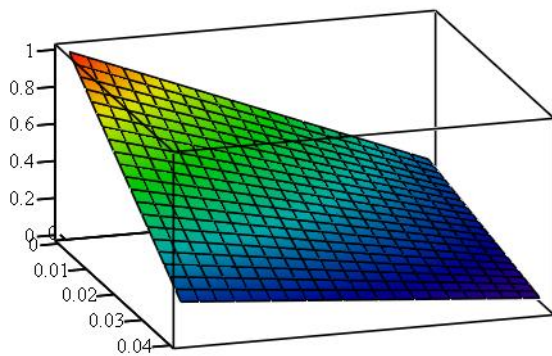
$$\alpha_i := \text{lsolve}(Ma, u_i) \quad \alpha_j := \text{lsolve}(Ma, u_j)$$

$$\alpha_k := \text{lsolve}(Ma, u_k) \quad \alpha_l := \text{lsolve}(Ma, u_l)$$

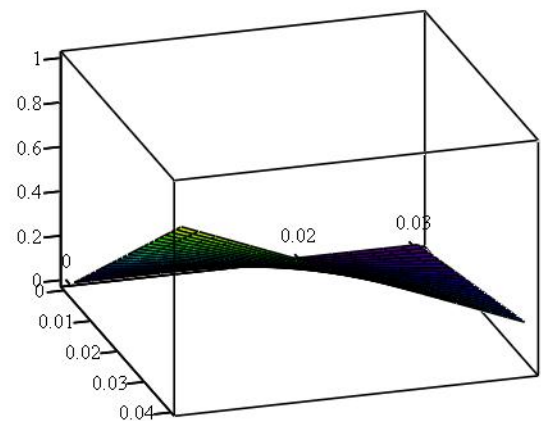
$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 1 \\ -20 \\ -25 \\ 500 \end{pmatrix} \quad \alpha_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \\ -500 \end{pmatrix} \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \end{pmatrix} \quad \alpha_l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25 \\ -500 \end{pmatrix}$$

$$N_i(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_i \quad - \text{funkcja kształtu węzła "i"}$$

$$N_j(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_j \quad - \text{funkcja kształtu węzła "j"}$$



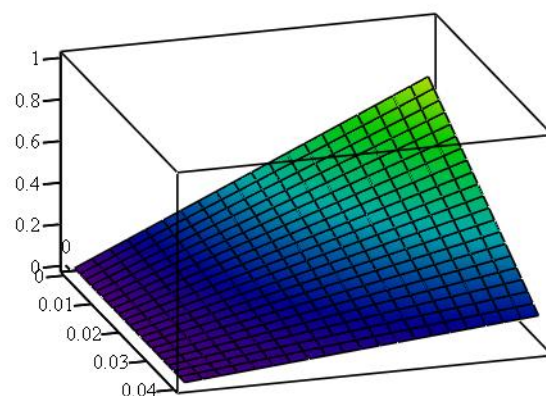
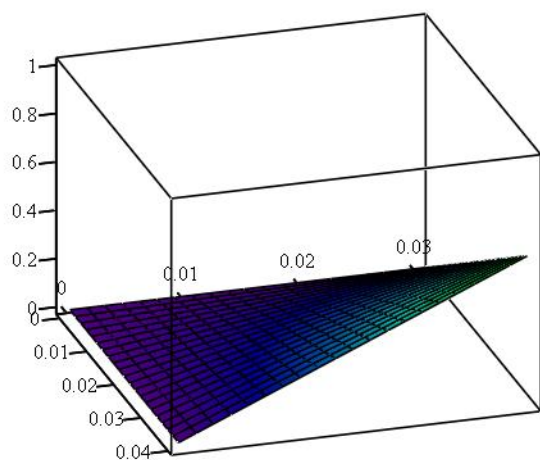
N_i



N_j

$N_k(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_k$ - funkcja kształtu węzła "k"

$N_L(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_L$ - funkcja kształtu węzła "l"



N_L

N_k