

## Trójkatny element tarczowy

ORIGIN := 1

$E := 20\text{GPa}$  - moduł Younga

$\nu := 0.2$  - współczynnik Poissona

$t := 0.01\text{m}$  - grubość tarczy

wektor współrzędnych elementu

wektor przemieszczeń elementu

$$xa = \begin{pmatrix} xi \\ yi \\ xj \\ yj \\ xk \\ yk \end{pmatrix} \quad xa := \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 10^{-2} \quad u := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}$$

N(x, y) := (1 x y) - wielomiany funkcji kształtu

$dNx(x, y) = \frac{d}{dx} N(x, y)$   
- pochodna wielomianu funkcji kształtu

$$dNx := (0 \quad 1 \quad 0)$$

$dNy(x, y) = \frac{d}{dy} N(x, y)$   
- pochodna wielomianu funkcji kształtu

$$dNy := (0 \quad 0 \quad 1)$$

$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & xi & yi \\ 1 & xj & yj \\ 1 & xk & yk \end{pmatrix}$  - macierz współrzędnych elementu

$$M(x) := \text{stack}(N(x_1, x_2), N(x_3, x_4), N(x_5, x_6))$$

$$Ma := M(xa) \quad Ma = \begin{pmatrix} 1 & -0.02 & 0 \\ 1 & 0.03 & -0.02 \\ 1 & 0 & 0.03 \end{pmatrix} \quad \text{- macierz współrzędnych elementu}$$

$$|Ma| = 1.9 \times 10^{-3}$$

$$Va := \frac{t}{2} \cdot |Ma| \quad \text{- objętość elementu}$$

## Wyznaczanie współczynników funkcji kształtu

$$u_i := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_j := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_k := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i := \text{lsolve}(Ma, u_i) \quad \alpha_j := \text{lsolve}(Ma, u_j) \quad \alpha_k := \text{lsolve}(Ma, u_k)$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0.474 \\ -26.316 \\ -15.789 \end{pmatrix} \quad \alpha_j = \begin{pmatrix} 0.316 \\ 15.789 \\ -10.526 \end{pmatrix} \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0.211 \\ 10.526 \\ 26.316 \end{pmatrix}$$

$$N_i(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_i \quad \text{- funkcja kształtu węzła "i"}$$

$$N_j(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_j \quad \text{- funkcja kształtu węzła "j"}$$

$$N_k(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_k \quad \text{- funkcja kształtu węzła "k"}$$

$$B\alpha(\alpha) := \begin{pmatrix} dN_x \cdot \alpha & 0 \\ 0 & dN_y \cdot \alpha \\ dN_y \cdot \alpha & dN_x \cdot \alpha \end{pmatrix} \quad \text{- macierz geometryczna węzła}$$

$$B := \text{augment}(B\alpha(\alpha_i), B\alpha(\alpha_j), B\alpha(\alpha_k)) \quad \text{- macierz geometryczna elementu}$$

$$B = \begin{pmatrix} -26.316 & 0 & 15.789 & 0 & 10.526 & 0 \\ 0 & -15.789 & 0 & -10.526 & 0 & 26.316 \\ -15.789 & -26.316 & -10.526 & 15.789 & 26.316 & 10.526 \end{pmatrix}$$

$$D := \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{pmatrix} \quad \text{- macierz stałych sprężystych dla PSN}$$

## Macierz sztywności elementu CST

$$K = \int B^T \cdot D \cdot B \, dV \quad \underline{\underline{K}} := B^T \cdot D \cdot B \cdot Va$$

$$K = \begin{pmatrix} 1568.0 & 493.4 & -690.8 & -87.7 & -877.2 & -405.7 \\ 493.4 & 1041.7 & 120.6 & -0.0 & -614.0 & -1041.7 \\ -690.8 & 120.6 & 581.1 & -197.4 & 109.6 & 76.8 \\ -87.7 & -0.0 & -197.4 & 416.7 & 285.1 & -416.7 \\ -877.2 & -614.0 & 109.6 & 285.1 & 767.5 & 328.9 \\ -405.7 & -1041.7 & 76.8 & -416.7 & 328.9 & 1458.3 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{cm}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} := B \cdot u \quad - \text{wektor odkształceń elementu CST}$$

$$\sigma := D \cdot \varepsilon \quad - \text{wektor naprężeń w elemencie przy PSN}$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 4.211 \\ -4.737 \\ 2.632 \end{pmatrix} \cdot \% \quad \sigma = \begin{pmatrix} 679.825 \\ -811.404 \\ 219.298 \end{pmatrix} \cdot MPa$$

- macierz stałych sprężystych dla PSO

$$D2 := \frac{E}{(1-\nu) \cdot (1-2\nu)} \cdot \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} := D2 \cdot \varepsilon \quad - \text{wektor naprężeń w elemencie przy PSO}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1008.772 \\ -1228.07 \\ 328.947 \end{pmatrix} \cdot MPa$$

## Prostokątny element tarczowy

ORIGIN := 1

E := 20GPa - moduł Younga

ν := 0.2 - współczynnik Poissona

t := 0.01m - grubość tarczy

Lx := 0.04

Ly := 0.03

N(x, y) := (1 x y x·y)

$dN_x(x, y) = \frac{d}{dx} N(x, y)$

$dN_x(x, y) := (0 \ 1 \ 0 \ y)$

$dN_y(x, y) = \frac{d}{dy} N(x, y)$

$dN_y(x, y) := (0 \ 0 \ 1 \ x)$

$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i \cdot y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j \cdot y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k \cdot y_k \\ 1 & x_l & y_l & x_l \cdot y_l \end{pmatrix}$

- macierz współrzędnych elementu

wektor współrzędnych elementu

$$xa = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \\ x_k \\ y_k \\ x_l \\ y_l \end{pmatrix} \quad xa := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Lx \\ 0 \\ Lx \\ Ly \\ 0 \\ Ly \end{pmatrix}$$

Lss := rows(xa) = 8

M(x) := stack(N(x<sub>1</sub>, x<sub>2</sub>), N(x<sub>3</sub>, x<sub>4</sub>), N(x<sub>5</sub>, x<sub>6</sub>), N(x<sub>7</sub>, x<sub>8</sub>))

Ma := M(xa)

$$Ma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.04 & 0 & 0 \\ 1 & 0.04 & 0.03 & 1.2 \times 10^{-3} \\ 1 & 0 & 0.03 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A2 := |Ma|$$

$$A := Lx \cdot Ly \quad - \text{pole powierzchni elementu}$$

$$A2 = -1.44 \times 10^{-6}$$

$$Va := t \cdot A \quad - \text{objętość elementu}$$

### Wyznaczanie współczynników funkcji kształtu

$$u_i := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_j := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_k := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_l := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

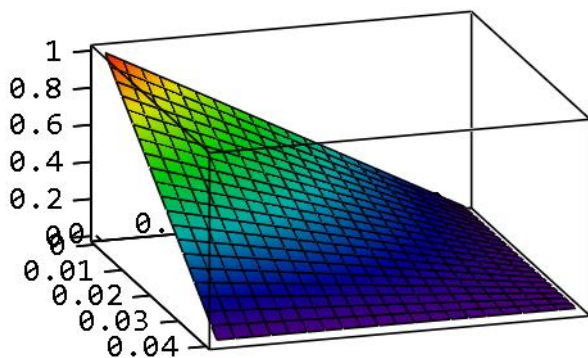
$$\alpha_i := \text{lsolve}(Ma, u_i) \quad \alpha_j := \text{lsolve}(Ma, u_j)$$

$$\alpha_k := \text{lsolve}(Ma, u_k) \quad \alpha_l := \text{lsolve}(Ma, u_l)$$

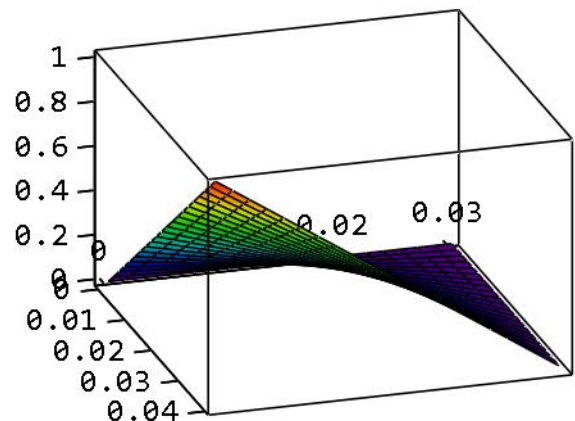
$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 1 \\ -25 \\ -33.333 \\ 833.333 \end{pmatrix} \quad \alpha_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \\ -833.333 \end{pmatrix} \quad \alpha_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 833.333 \end{pmatrix} \quad \alpha_l = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 33.333 \\ -833.333 \end{pmatrix}$$

$$N_i(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_i \quad - \text{funkcja kształtu węzła "i"}$$

$$N_j(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_j \quad - \text{funkcja kształtu węzła "j"}$$



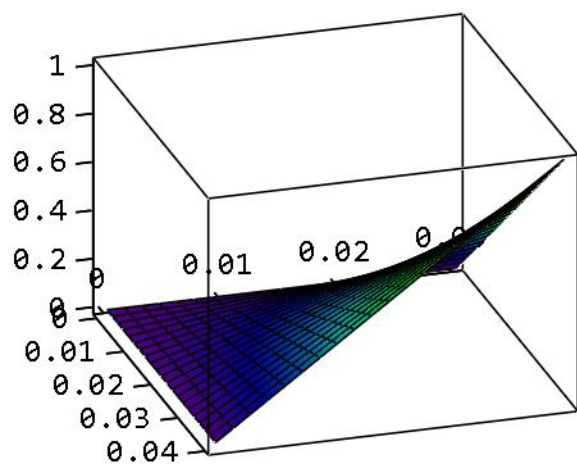
$N_i$



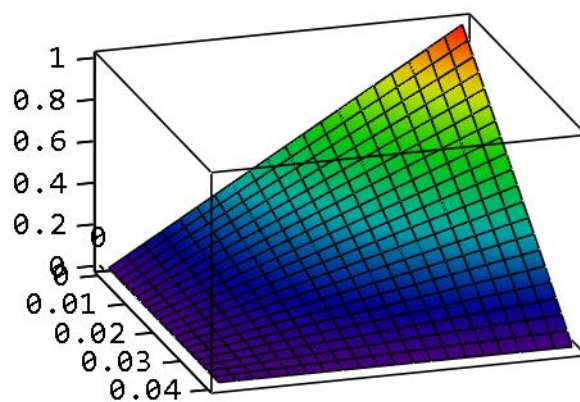
$N_j$

$N_k(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_k$  - funkcja kształtu węzła "k"

$N_L(x, y) := N(x, y) \cdot \alpha_L$  - funkcja kształtu węzła "l"



$N_k$



$N_L$