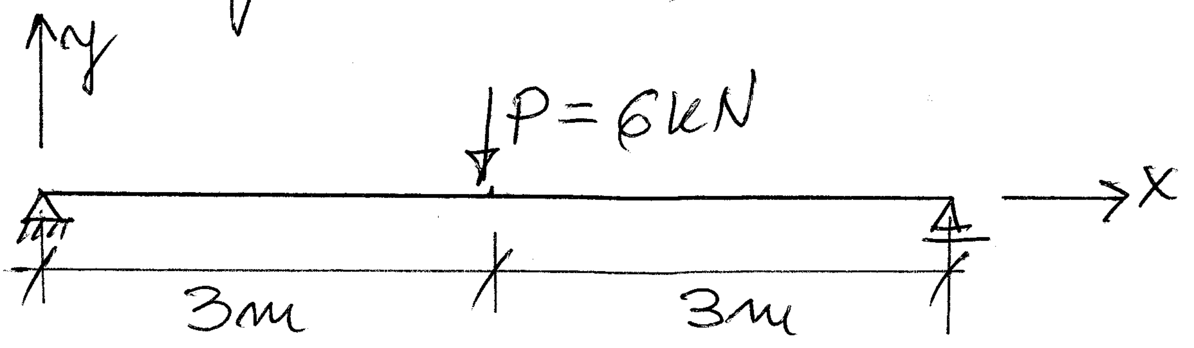
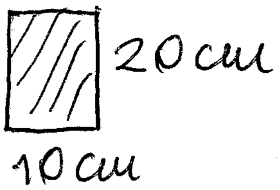
Obliczymy ugięcie belki swobodnie podpartej metodą różnic skończonych (MRS)



$L = 6m$, $E = 1.0 \cdot 10^7$ kPa - drewno

Przekrój



$J = \frac{10 \cdot 20^3}{12} = 666{,}7$ cm^4 $= 0{,}6667 \cdot 10^{-4} m^4$

Różniczkowe równanie ugięcia belki:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EJ}$$

Równanie momentu zginającego:

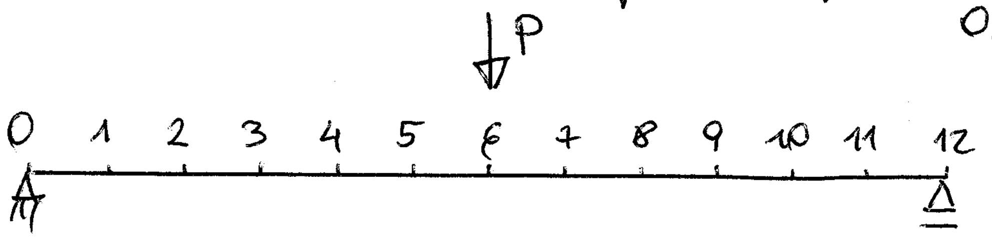
$M(x) = \frac{P}{2} \cdot x$ dla $x \in (0; 3m)$

$M(x) = \frac{P}{2} \cdot x - P(x - 3m)$ dla $x \in (3m; 6m)$

Stosując centralną różnicę dla zastąpienia drugiej pochodnej otrzymamy:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{(\Delta x)^2}$$

Dzielimy belkę na n odcinków skończonych o długościach $\Delta x = a = \frac{L}{n}$.
Przyjmując $n = 12$ otrzymamy: $\Delta x = a = \frac{6m}{12} = 0{,}5\,m$



Warunki brzegowe: $x = 0 \rightarrow y = 0$

$x = L \rightarrow y = 0$

ugięcia należy obliczyć w punktach o numerach $1 \div 11$. Zapisujemy 11 równań różnicowych: dla $i = 1 \div 11$

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = \frac{(\Delta x)^2}{EJ} M(x_i), \text{ lub}$$

$$\underset{\sim}{A} = \underbrace{\left.\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & \cdot & \cdot & & & \\ & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}\right\}}_{\text{11 kolumn}} \text{11 równań}
\qquad
\underset{\sim}{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_9 \\ y_{10} \\ y_{11} \end{bmatrix}
\qquad
\underset{\sim}{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_9 \\ m_9 \\ m_{11} \end{bmatrix}$$

$$\alpha = -\frac{a^2 P}{EJ}$$

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{y} = \alpha \underset{\sim}{m} \qquad m_i = \frac{M(x_i)}{P}$$

Po rozwiązaniu układu równań otrzymujemy ugięcia w punktach $1 \div 11$.
Największe ugięcie występuje na środku belki w punkcie nr 6 i wynosi

$$y_6 = -0{,}041062 \ m$$

Rozwiązując analitycznie równanie ugięcia mamy:

$$y_{max} = \frac{PL^3}{48EJ},$$

zatem błąd rozwiązania numerycznego przy podziale na 12 odcinków wynosi:

$$\delta = \frac{y_{max} - y_6}{y_{max}} = 1 - \frac{|y_6|}{y_{max}} \cong -0{,}0139$$

$$\cong -1{,}39\,\%$$

(Znak minus oznacza, że ugięcie obliczone metodą różnic skończonych jest większe od rzeczywistego)

$$2y_i = \frac{PL}{4EJ} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$y = \frac{PL^3}{8EJ \cdot 4} = \frac{PL^3}{32EJ}$$