Rozwiazanie układu równań liniowych metodą faktoryzacji Banachiewicza-Cholesky'ego

$ORIGIN := 1$ *- Ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy*

$N := 5$

$$A := \begin{pmatrix} 11 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 12 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 13 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 14 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

Generowanie wektora "prawej strony"
dla rozwiązania jednostkowego

$i := 1 .. N$

$k := 1 .. N$

$$b_i := \sum_k A_{i,k}$$

$$b = \begin{pmatrix} 14.000 \\ 16.000 \\ 14.000 \\ 16.000 \\ 25.000 \end{pmatrix}$$

Wyznaczanie składowych macierzy L (trójkatnej dolnej) w kolumnie Nr 1

$n := 1$

$L_{n,n} := \sqrt{A_{n,n}}$ *- wyraz leżący na głównej przekątnej macierzy L*

$w := n + 1 .. N$

$L_{w,n} := \dfrac{A_{w,n}}{L_{n,n}}$ *- wyrazy leżące poniżej przekątnej w kolumnie Nr 1*

$$L = \begin{pmatrix} 3.3166 \\ -0.3015 \\ 0.6030 \\ 0.3015 \\ 0.3015 \end{pmatrix}$$

Wyznaczanie składowych macierzy L (trójkatnej dolnej) w kolumnie Nr 2

$n := 2$

$$L_{n,n} := \sqrt{A_{n,n} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(L_{n,k}\right)^2}$$ *- wyraz leżący na głównej przekątnej macierzy L*

$w := n + 1 .. N$

$$L_{w,n} := \frac{1}{L_{n,n}} \cdot \left[A_{w,n} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(L_{w,k} \cdot L_{n,k}\right)\right]$$ *- wyrazy leżące poniżej przekątnej w kolomnie Nr 2*

$$L = \begin{pmatrix} 3.317 & 0.000 \\ -0.302 & 3.451 \\ 0.603 & -0.527 \\ 0.302 & 0.606 \\ 0.302 & 1.475 \end{pmatrix}$$

Wyznaczanie składowych macierzy L (trójkatnej dolnej) w kolumnie Nr 3

$n := 3$

$$L_{n,n} := \sqrt{A_{n,n} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(L_{n,k}\right)^2}$$ *- wyraz leżący na głównej przekątnej macierzy L*

$w := n + 1 .. N$

$$L_{w,n} := \frac{1}{L_{n,n}} \cdot \left[A_{w,n} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(L_{w,k} \cdot L_{n,k}\right)\right]$$ *- wyrazy leżące poniżej przekątnej w kolumnie Nr 3*

$$L = \begin{pmatrix} 3.317 & 0.000 & 0.000 \\ -0.302 & 3.451 & 0.000 \\ 0.603 & -0.527 & 3.516 \\ 0.302 & 0.606 & -0.530 \\ 0.302 & 1.475 & 1.023 \end{pmatrix}$$

Wyznaczanie składowych macierzy L (trójkatnej dolnej) w kolumnie Nr 4

$n := 4$

$$L_{n,n} := \sqrt{A_{n,n} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(L_{n,k}\right)^2}$$ *- wyraz leżący na głównej przekątnej macierzy L*

$w := n + 1 .. N$

$$L_{w,n} := \frac{1}{L_{n,n}} \cdot \left[A_{w,n} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(L_{w,k} \cdot L_{n,k}\right)\right]$$ *- wyrazy leżące poniżej przekątnej w kolumnie Nr 4*

$$L = \begin{pmatrix} 3.317 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.302 & 3.451 & 0.000 & 0.000 \\ 0.603 & -0.527 & 3.516 & 0.000 \\ 0.302 & 0.606 & -0.530 & 3.642 \\ 0.302 & 1.475 & 1.023 & 0.153 \end{pmatrix}$$

Wyznaczanie składowych macierzy L (trójkatnej dolnej) w kolumnie Nr 5

$n := 5$

$$L_{n,n} := \sqrt{A_{n,n} - \sum_{k=1}^{n-1} \left(L_{n,k}\right)^2}$$ *- wyraz leżący na głównej przekątnej macierzy L*

Kompletna macierz trójkątna dolna

$$L = \begin{pmatrix} 3.317 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.302 & 3.451 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.603 & -0.527 & 3.516 & 0.000 & 0.000 \\ 0.302 & 0.606 & -0.530 & 3.642 & 0.000 \\ 0.302 & 1.475 & 1.023 & 0.153 & 3.415 \end{pmatrix}$$

Macierz trójkątna dolna obliczona za pomocą funkcji Mathcada - "cholesky"

$L0 := \text{cholesky}(A)$

$$L0 = \begin{pmatrix} 3.317 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ -0.302 & 3.451 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.603 & -0.527 & 3.516 & 0.000 & 0.000 \\ 0.302 & 0.606 & -0.530 & 3.642 & 0.000 \\ 0.302 & 1.475 & 1.023 & 0.153 & 3.415 \end{pmatrix}$$

Porównanie obu macierzy $Err := L - L0$

$$Err = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<---- macierze L i L0 są identyczne, oznacza to, że nasza procedura działa identycznie jak procedura MathCada

Rozwiązanie układu równań **L·y=b** *przez podstawienie wprzód*

$n := 1 \qquad y_n := \dfrac{b_n}{L_{n,n}}$

$n := 2 .. N \qquad y_n := \dfrac{1}{L_{n,n}} \cdot \left[b_n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(y_k \cdot L_{n,k} \right) \right] \qquad y = \begin{pmatrix} 4.221 \\ 5.005 \\ 4.008 \\ 3.795 \\ 3.415 \end{pmatrix}$

Rozwiązanie układu równań $\mathbf{L^T \cdot x = y}$ *przez podstawienie wstecz*

$n := N \qquad x_n := \dfrac{y_n}{L_{n,n}}$

$n := N-1 .. 1 \qquad x_n := \dfrac{1}{L_{n,n}} \cdot \left[y_n - \sum_{k=n+1}^{N} \left(x_k \cdot L_{k,n} \right) \right] \qquad x = \begin{pmatrix} 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \\ 1.000 \end{pmatrix}$ ■