Obliczenie ugięcia membrany metodą obszarów kontrolnych (objętości skończonych -MOS) - rozwiązanie równania Poissona

ORIGIN := 1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y) = 0$$

Obliczyć przemieszczenie prostokątnej membrany o wymiarach Lx, Ly, opartej na obwodzie, obciążonej stałym ciśnieniem p0 i rozciąganej stałym napięciem T

$Lx := 6m$ $\quad Ly := 5m$ $\quad p0 := 5kPa$ $\quad T := 15\frac{kN}{m}$ $\quad nx := 4$ $\quad ny := 4$

$bx := \frac{Lx}{nx} = 1.5\,m$ $\quad by := \frac{Ly}{ny} = 1.25\,m$ $\quad A1 := bx \cdot by = 1.875\,m^2$ $\quad f := \frac{p0 \cdot A1}{T} = 0.625\,m$

Macierz alokacji pól

$$AL := \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 10 & 10 & 1 & 10 \\ 10 & 10 & 2 & 1 \\ 10 & 10 & 3 & 2 \\ 10 & 10 & 10 & 3 \\ 10 & 1 & 4 & 10 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & 10 & 10 & 6 \\ 10 & 4 & 7 & 10 \\ 4 & 5 & 8 & 7 \\ 5 & 6 & 9 & 8 \\ 6 & 10 & 10 & 9 \\ 10 & 7 & 10 & 10 \\ 7 & 8 & 10 & 10 \\ 8 & 9 & 10 & 10 \\ 9 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \end{array} \end{array}$$

AL =

	1	2	3	4
1	10	10	1	10
2	10	10	2	1
3	10	10	3	2
4	10	10	10	3
5	10	1	4	10
6	1	2	5	4
7	2	3	6	5
8	3	10	10	6
9	10	4	7	10
10	4	5	8	7
11	5	6	9	8
12	6	10	10	9
13	10	7	10	10
14	7	8	10	10
15	8	9	10	10
16	9	10	10	10

Funkcja AGR2 - używana przy agregacji macierzy geometrycznej.
Oznaczenia parametrów: A - zerowa macierz globalna,
B - macierz eometryczna obszaru, L - macierz alokacji, n - numer pola

```
AGR2(A, B, L, n) := | for  i ∈ 1 .. rows(B)
                    |   for  j ∈ 1 .. cols(B)
                    |     A(L[n,i], L[n,j]) ← B[i,j]
                    | A
```

Macierz geometryczna obszaru kontrolnego

$$A^*G_e = \frac{1}{8}\left(\lambda + 1/\lambda\right)\begin{bmatrix} -3 & 1+2\kappa & 1 & 1-2\kappa \\ 1+2\kappa & -3 & 1-2\kappa & 1 \\ 1 & 1-2\kappa & -3 & 1+2\kappa \\ 1-2\kappa & 1 & 1+2\kappa & -3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = b_x / b_y \qquad \kappa = (1-\lambda^2)/(1+\lambda^2)$$

$$\lambda := \frac{bx}{by} = 1.2 \qquad \kappa := \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} = -0.18 \qquad \begin{aligned} \kappa1 &:= 1 + 2\cdot\kappa = 0.639344 \\ \kappa2 &:= 1 - 2\cdot\kappa = 1.360656 \end{aligned}$$

$$G1 := \frac{\lambda + \frac{1}{\lambda}}{8}\cdot\begin{pmatrix} -3 & \kappa1 & 1 & \kappa2 \\ \kappa1 & -3 & \kappa2 & 1 \\ 1 & \kappa2 & -3 & \kappa1 \\ \kappa2 & 1 & \kappa1 & -3 \end{pmatrix}$$ *Macierz geometryczna pola Nr 1.*

$$G1 = \begin{pmatrix} -0.7625 & 0.1625 & 0.254167 & 0.345833 \\ 0.1625 & -0.7625 & 0.345833 & 0.254167 \\ 0.254167 & 0.345833 & -0.7625 & 0.1625 \\ 0.345833 & 0.254167 & 0.1625 & -0.7625 \end{pmatrix}$$

$Lo := rows(AL) = 16$ *Liczba obszarów*

$Lr := max(AL) = 10$ *Liczba równań- liczba węzłów siatki*

$Go_{Lr,Lr} := 0$ *Zerowa globalna macierz geometryczna*

Agregacja globalnej macierzy geometrycznej

$e := 1 .. Lo$

$$G := \sum_{e} (AGR2(Go, -G1, AL, e))$$

$i := 1 .. Lr$ $p_i := f$ *- prawa strona układu równań*

$u_{10} = 0$ -----------------------> $G_{10,i} := 0$ $G_{10,10} := 1$ $p_{10} := 0$

G =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3.05	-0.325	0	-0.692	-0.254	0	0	0	0	-0.671
2	-0.325	3.05	-0.325	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0	-0.6
3	0	-0.325	3.05	0	-0.254	-0.692	0	0	0	-0.763
4	-0.692	-0.254	0	3.05	-0.325	0	-0.692	-0.254	0	-0.417
5	-0.254	-0.692	-0.254	-0.325	3.05	-0.325	-0.254	-0.692	-0.254	0
6	0	-0.254	-0.692	0	-0.325	3.05	0	-0.254	-0.692	-0.417
7	0	0	0	-0.692	-0.254	0	3.05	-0.325	0	-0.763
8	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	-0.325	3.05	-0.325	-0.6
9	0	0	0	0	-0.254	-0.692	0	-0.325	3.05	-0.763
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

p =

	1
1	62.5
2	62.5
3	62.5
4	62.5
5	62.5
6	62.5
7	62.5
8	62.5
9	62.5
10	0

$\cdot cm$

Rozwiązanie układu równań

$u := \mathrm{lsolve}(G, p)$

$u =$ · cm

	1
1	46.073
2	56.935
3	46.073
4	58.784
5	74.2
6	58.784
7	46.073
8	56.935
9	46.073
10	0

$\max(u) = 74.2 \cdot cm$

*Przepisanie rozwiązania z wektora **u** do macierzy dwuwymiarowej **U***

$U_{5,5} := 0$

$U =$

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

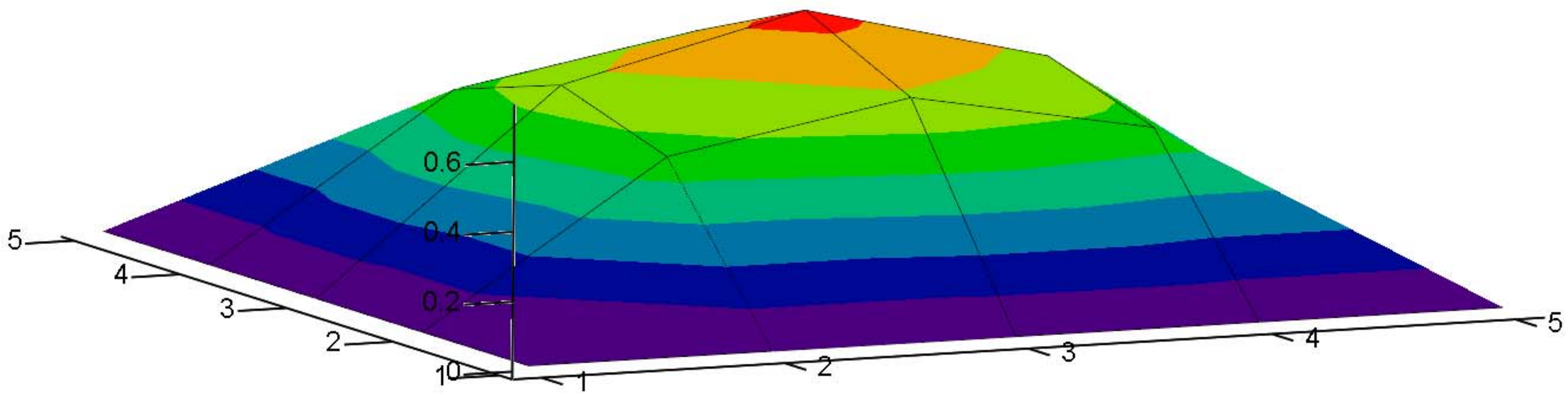
$U_{2,2} := u_1$ $U_{2,3} := u_2$ $U_{2,4} := u_3$

$U_{3,2} := u_4$ $U_{3,3} := u_5$ $U_{3,4} := u_6$

$U_{4,2} := u_7$ $U_{4,3} := u_8$ $U_{4,4} := u_9$

$U =$ m

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	0.461	0.569	0.461	0
3	0	0.588	0.742	0.588	0
4	0	0.461	0.569	0.461	0
5	0	0	0	0	0



U