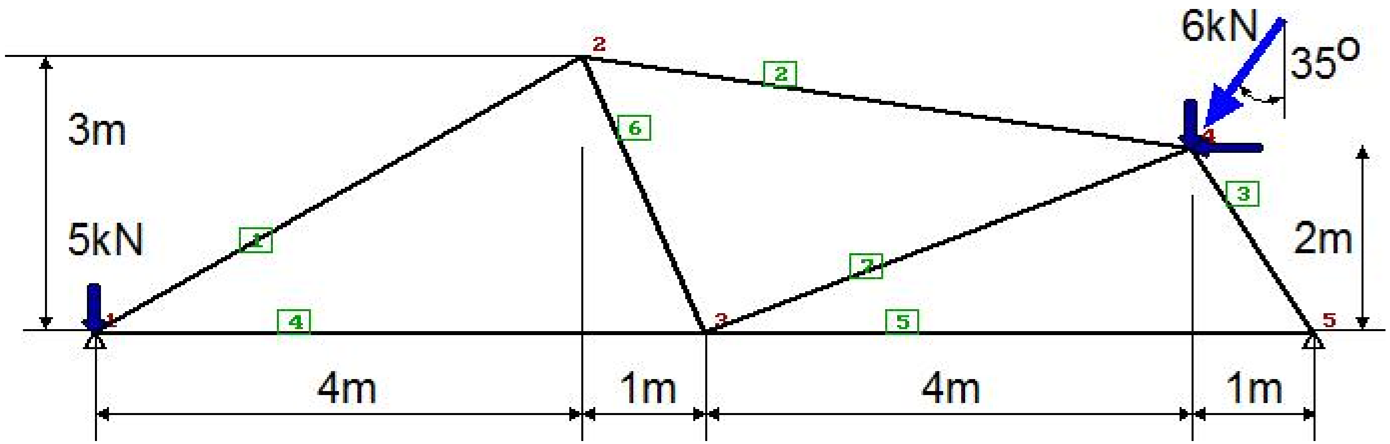
Statyka kratownicy stalowej o jednakowych przekrojach wszystkich prętów



$EA := 31000 \qquad Le := 7 \qquad Lw := 5 \qquad Lss := 2 \qquad Lr := Lss \cdot Lw \qquad K_{Lr,\,Lr} := 0$

Współrzędne węzłów kratownicy

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Numery węzłów początkowych (Wp) i końcowych (Wk) wszystkich elementów

$$Wp := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad Wk := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$e := 1 .. Le$ *Pętla po wszystkich elementach kratownicy*

$Lx_e := X_{(Wk_e)} - X_{(Wp_e)}$ $Lx^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 5 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$Ly_e := Y_{(Wk_e)} - Y_{(Wp_e)}$ $Ly^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

$L_e := \sqrt{(Lx_e)^2 + (Ly_e)^2}$ $L^T = \begin{pmatrix} 5.000 & 5.099 & 2.236 & 5.000 & 5.000 & 3.162 & 4.472 \end{pmatrix}$

$$J_e := \frac{EA}{(L_e)^3} \cdot \begin{bmatrix} (Lx_e)^2 & Lx_e \cdot Ly_e \\ Lx_e \cdot Ly_e & (Ly_e)^2 \end{bmatrix}$$

Mimo, że nie jest to potrzebne w dalczych obliczeniach, można pokazać bloki ***J*** *macierzy sztywności wszystkich elementów*

$J_1 = \begin{pmatrix} 3.968 \times 10^3 & 2.976 \times 10^3 \\ 2.976 \times 10^3 & 2.232 \times 10^3 \end{pmatrix}$ $J_2 = \begin{pmatrix} 5.846 \times 10^3 & -1.169 \times 10^3 \\ -1.169 \times 10^3 & 233.831 \end{pmatrix}$

$J_3 = \begin{pmatrix} 2.773 \times 10^3 & -5.545 \times 10^3 \\ -5.545 \times 10^3 & 1.109 \times 10^4 \end{pmatrix}$ $J_4 = \begin{pmatrix} 6.2 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $J_5 = \begin{pmatrix} 6.2 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$J_6 = \begin{pmatrix} 980.306 & -2.941 \times 10^3 \\ -2.941 \times 10^3 & 8.823 \times 10^3 \end{pmatrix}$ $J_7 = \begin{pmatrix} 5.545 \times 10^3 & 2.773 \times 10^3 \\ 2.773 \times 10^3 & 1.386 \times 10^3 \end{pmatrix}$

Agregacja - dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej

$i := 1 .. Lss \quad j := 1 .. Lss$

Blok górny lewy, wiersz w:=LssWp_e *+i-2, kolumna k:=Lss*Wp_e *+j-2*

$$K_{\left[\left(Lss \cdot Wp_e - 2 + i\right),\left(Lss \cdot Wp_e - 2 + j\right)\right]} := K_{\left[\left(Lss \cdot Wp_e - 2 + i\right),\left(Lss \cdot Wp_e - 2 + j\right)\right]} + \left(J_e\right)_{i,j}$$

Blok górny prawy, wiersz w:=LssWp_e *+i-2, kolumna k:=Lss*Wk_e *+j-2*

$$K_{\left[\left(Lss \cdot Wp_e - 2 + i\right),\left(Lss \cdot Wk_e - 2 + j\right)\right]} := K_{\left[\left(Lss \cdot Wp_e - 2 + i\right),\left(Lss \cdot Wk_e - 2 + j\right)\right]} - \left(J_e\right)_{i,j}$$

Blok dolny lewy, wiersz w:=LssWk_e *+i-2, kolumna k:=Lss*Wp_e *+j-2*

$$K_{\left[\left(Lss \cdot Wk_e - 2 + i\right),\left(Lss \cdot Wp_e - 2 + j\right)\right]} := K_{\left[\left(Lss \cdot Wk_e - 2 + i\right),\left(Lss \cdot Wp_e - 2 + j\right)\right]} - \left(J_e\right)_{i,j}$$

Blok dolny prawy, wiersz w:=LssWk_e *+i-2, kolumna k:=Lss*Wk_e *+j-2*

$$K_{\left[\left(Lss \cdot Wk_e - 2 + i\right),\left(Lss \cdot Wk_e - 2 + j\right)\right]} := K_{\left[\left(Lss \cdot Wk_e - 2 + i\right),\left(Lss \cdot Wk_e - 2 + j\right)\right]} + \left(J_e\right)_{i,j}$$

Globalna macierz sztywności **K** *bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.* $|\mathbf{K}|=0$

K =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$1.017\cdot10^{4}$	$2.976\cdot10^{3}$	$-3.968\cdot10^{3}$	$-2.976\cdot10^{3}$	$-6.2\cdot10^{3}$	0	0	0	0	0
2	$2.976\cdot10^{3}$	$2.232\cdot10^{3}$	$-2.976\cdot10^{3}$	$-2.232\cdot10^{3}$	0	0	0	0	0	0
3	$-3.968\cdot10^{3}$	$-2.976\cdot10^{3}$	$1.079\cdot10^{4}$	$-1.134\cdot10^{3}$	-980.306	$2.941\cdot10^{3}$	$-5.846\cdot10^{3}$	$1.169\cdot10^{3}$	0	0
4	$-2.976\cdot10^{3}$	$-2.232\cdot10^{3}$	$-1.134\cdot10^{3}$	$1.129\cdot10^{4}$	$2.941\cdot10^{3}$	$-8.823\cdot10^{3}$	$1.169\cdot10^{3}$	-233.831	0	0
5	$-6.2\cdot10^{3}$	0	-980.306	$2.941\cdot10^{3}$	$1.893\cdot10^{4}$	-168.194	$-5.545\cdot10^{3}$	$-2.773\cdot10^{3}$	$-6.2\cdot10^{3}$	0
6	0	0	$2.941\cdot10^{3}$	$-8.823\cdot10^{3}$	-168.194	$1.021\cdot10^{4}$	$-2.773\cdot10^{3}$	$-1.386\cdot10^{3}$	0	0
7	0	0	$-5.846\cdot10^{3}$	$1.169\cdot10^{3}$	$-5.545\cdot10^{3}$	$-2.773\cdot10^{3}$	$1.416\cdot10^{4}$	$-3.942\cdot10^{3}$	$-2.773\cdot10^{3}$	$5.545\cdot10^{3}$
8	0	0	$1.169\cdot10^{3}$	-233.831	$-2.773\cdot10^{3}$	$-1.386\cdot10^{3}$	$-3.942\cdot10^{3}$	$1.271\cdot10^{4}$	$5.545\cdot10^{3}$	$-1.109\cdot10^{4}$
9	0	0	0	0	$-6.2\cdot10^{3}$	0	$-2.773\cdot10^{3}$	$5.545\cdot10^{3}$	$8.973\cdot10^{3}$	$-5.545\cdot10^{3}$
10	0	0	0	0	0	0	$5.545\cdot10^{3}$	$-1.109\cdot10^{4}$	$-5.545\cdot10^{3}$	$1.109\cdot10^{4}$

$|K| = -4.139\times10^{-9}$

Zamiast zera wyznacznik może być "bardzo małą" liczbą ze wzgledu na niedostateczną dokładność wyrazów macierzy sztywności

Globalny wektor sił węzłowych

$$p := \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Fx_4 \\ Fy_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Fx_4 := -6\sin\left(\pi \cdot \frac{35}{180}\right) = -3.441$$

$$Fy_4 := -6\cos\left(\pi \cdot \frac{35}{180}\right) = -4.915$$

$p^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	-5	0	0	0	0	-3.441	-4.915	0	0

Kopiowanie Macierzy **K** *i wektora* **p** *przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$K_o := K \qquad p_o := p$

Uwzględnienie warunków brzegowych
węzeł Nr 1: stopień swobody s1 i s2, węzeł Nr 5: stopień swobody s3 i s4

$s1 := 1 \quad s2 := 2 \qquad s3 := 9 \quad s4 := 10$

$i := 1 .. Lr$

$K_{o_{s1,i}} := 0 \qquad K_{o_{s2,i}} := 0 \qquad K_{o_{s3,i}} := 0 \qquad K_{o_{s4,i}} := 0$

$K_{o_{i,s1}} := 0 \qquad K_{o_{i,s2}} := 0 \qquad K_{o_{i,s3}} := 0 \qquad K_{o_{i,s4}} := 0$

$K_{o_{s1,s1}} := 1 \qquad K_{o_{s2,s2}} := 1 \qquad p_{o_{s1}} := 0 \quad p_{o_{s2}} := 0$

$K_{o_{s3,s3}} := 1 \qquad K_{o_{s4,s4}} := 1 \qquad p_{o_{s3}} := 0 \quad p_{o_{s4}} := 0$

$K_o =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	$1.079\cdot10^4$	$-1.134\cdot10^3$	-980.306	$2.941\cdot10^3$	$-5.846\cdot10^3$	$1.169\cdot10^3$	0	0
4	0	0	$-1.134\cdot10^3$	$1.129\cdot10^4$	$2.941\cdot10^3$	$-8.823\cdot10^3$	$1.169\cdot10^3$	-233.831	0	0
5	0	0	-980.306	$2.941\cdot10^3$	$1.893\cdot10^4$	-168.194	$-5.545\cdot10^3$	$-2.773\cdot10^3$	0	0
6	0	0	$2.941\cdot10^3$	$-8.823\cdot10^3$	-168.194	$1.021\cdot10^4$	$-2.773\cdot10^3$	$-1.386\cdot10^3$	0	0
7	0	0	$-5.846\cdot10^3$	$1.169\cdot10^3$	$-5.545\cdot10^3$	$-2.773\cdot10^3$	$1.416\cdot10^4$	$-3.942\cdot10^3$	0	0
8	0	0	$1.169\cdot10^3$	-233.831	$-2.773\cdot10^3$	$-1.386\cdot10^3$	$-3.942\cdot10^3$	$1.271\cdot10^4$	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$p_o^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	-3.441	-4.915	0	0

$|K_o| = 4.78 \times 10^{23}$ *- wyznacznik macierzy* $\mathbf{K}_o > 0$

Rozwiązanie układu równań:

$u := \mathrm{lsolve}(K_o, p_o)$ *- wektor przemieszczeń węzłowych*

$u^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	$-2.578\cdot10^{-4}$	$-1.849\cdot10^{-4}$	$-3.013\cdot10^{-4}$	$-3.808\cdot10^{-4}$	$-7.206\cdot10^{-4}$	$-6.971\cdot10^{-4}$	0	0

Obliczenie reakcji podpór

$$r := K \cdot u - p$$

$r^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3.441	6.18	0	0	0	0	0	0	$4.25 \cdot 10^{-4}$	3.735

Obliczenie sił wewnętrznych

$$i := 1 .. Le$$

$$N_i := \frac{EA}{\left(L_i\right)^2} \cdot \left[\left(u_{2 \cdot Wk_i - 1} - u_{2 \cdot Wp_i - 1}\right) \cdot Lx_i + \left(u_{2 \cdot Wk_i} - u_{2 \cdot Wp_i}\right) \cdot Ly_i\right]$$

$N^T =$

	1	2	3	4	5	6	7
1	-1.966	-2.148	-4.176	-1.868	1.868	1.688	-3.58