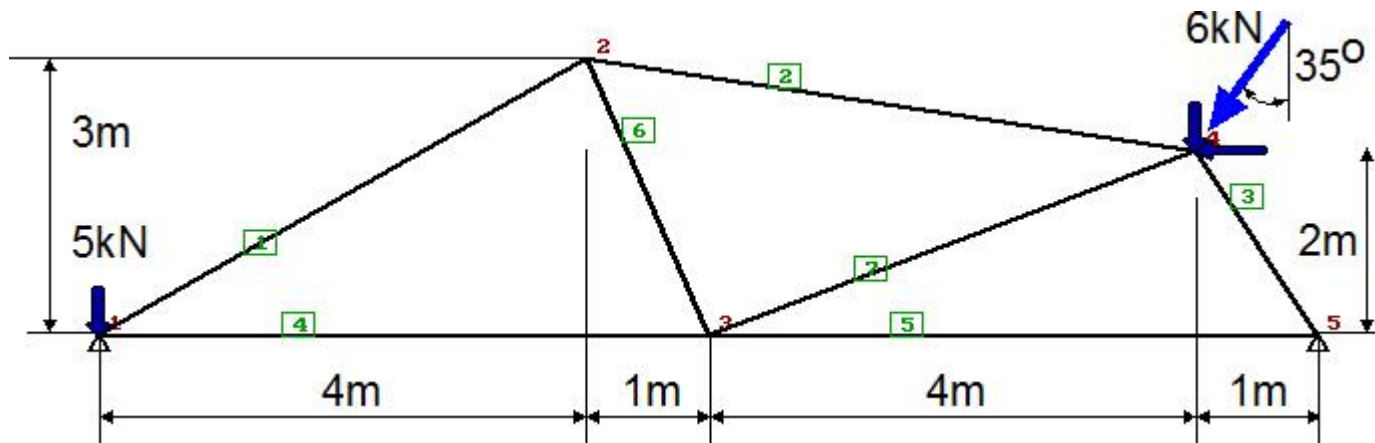


## Statyka kratownicy stalowej o 3 różnych przekrojach prętów



$E := 2.08 \cdot 10^8$  [kPa] - Moduł Younga stali

$A1 := 5 \cdot 10^{-4}$  [m<sup>2</sup>] - Pole powierzchni przekroju pasa górnego, elementy 1, 2, 3

$A2 := 4 \cdot 10^{-4}$  [m<sup>2</sup>] - Pole powierzchni przekroju pasa dolnego, elementy 4, 5

$A3 := 2 \cdot 10^{-4}$  [m<sup>2</sup>] - Pole powierzchni przekroju krzyżulców, elementy 6, 7

*Parametry pomocnicze:*

$L_e := 7$  - Liczba elementów       $L_w := 5$  - Liczba węzłów       $L_{ss} := 2$  - Liczba stopni swobody węzła

$L_r := L_{ss} \cdot L_w$  - Liczba równań

$K_{L_r, L_r} := 0$  Deklaracja globalnej macierzy sztywności

*Współrzędne węzłów kratownicy*

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \quad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*Numery węzłów początkowych (Wp)  
i końcowych (Wk) wszystkich elementów*

$$Wp := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad Wk := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} A1 \\ A2 \\ A3 \end{pmatrix}$$

*Przekroje elementów*

$$Np := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

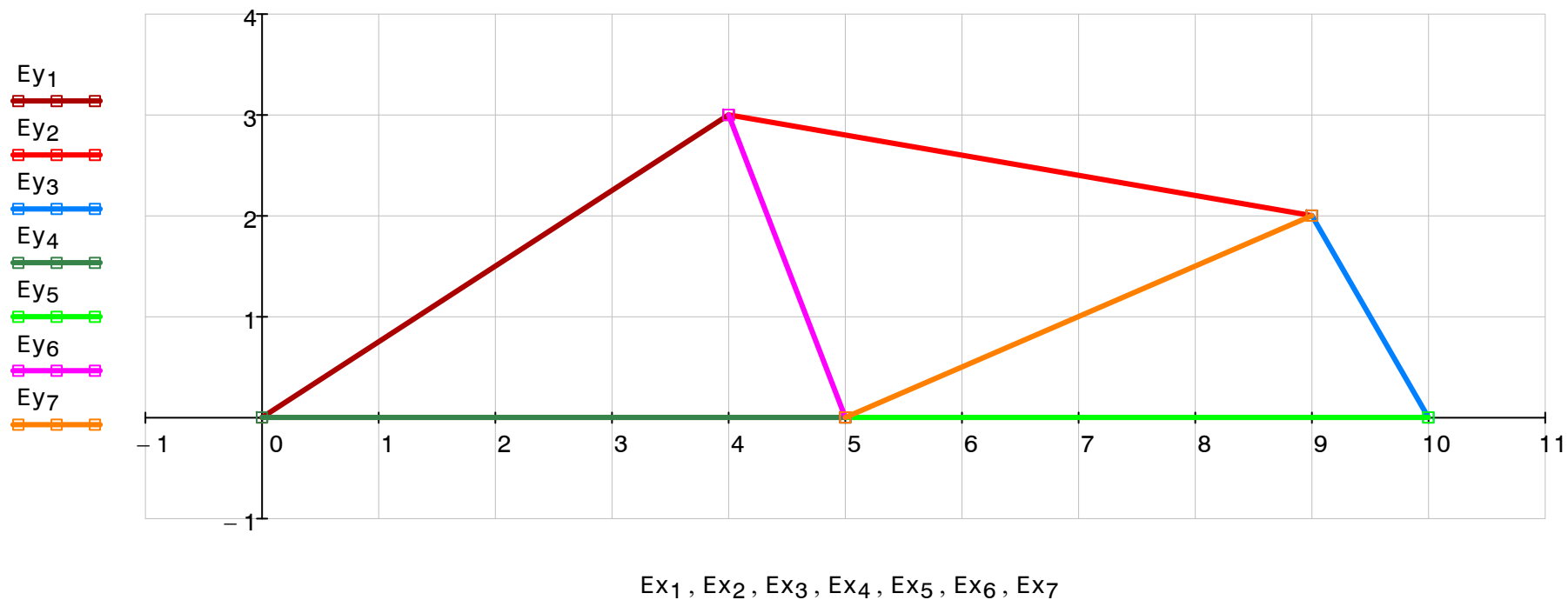
*Numery przekrojów elementów*

$e := 1 .. Le$

*Pętla po wszystkich elementach kratownicy*

*Rysunek elementów kratownicy pozwala kontrolować poprawność wprowadzonych danych*

$$Ex_e := \begin{bmatrix} X_{(Wp_e)} \\ X_{(Wk_e)} \end{bmatrix} \quad Ey_e := \begin{bmatrix} Y_{(Wp_e)} \\ Y_{(Wk_e)} \end{bmatrix}$$



## Macierze sztywności elementów kratownicy

$$Lx_e := X_{(Wk_e)} - X_{(Wp_e)}$$

$$Lx^T = (4 \quad 5 \quad 1 \quad 5 \quad 5 \quad 1 \quad 4)$$

$$Ly_e := Y_{(Wk_e)} - Y_{(Wp_e)}$$

$$Ly^T = (3 \quad -1 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \quad -3 \quad 2)$$

$$L_e := \sqrt{(Lx_e)^2 + (Ly_e)^2}$$

$$L^T = (5.000 \quad 5.099 \quad 2.236 \quad 5.000 \quad 5.000 \quad 3.162 \quad 4.472)$$

$$J_e := \frac{E \cdot A_{(Np_e)}}{(L_e)^3} \cdot \begin{bmatrix} (Lx_e)^2 & Lx_e \cdot Ly_e \\ Lx_e \cdot Ly_e & (Ly_e)^2 \end{bmatrix}$$

*Mimo, że nie jest to potrzebne w dalszych obliczeniach, można pokazać bloki **J** macierzy sztywności wszystkich elementów*

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1.331 \times 10^4 & 9.984 \times 10^3 \\ 9.984 \times 10^3 & 7.488 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1.961 \times 10^4 & -3.922 \times 10^3 \\ -3.922 \times 10^3 & 784.465 \end{pmatrix}$$

$$J_3 = \begin{pmatrix} 9.302 \times 10^3 & -1.86 \times 10^4 \\ -1.86 \times 10^4 & 3.721 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 1.664 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_5 = \begin{pmatrix} 1.664 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_6 = \begin{pmatrix} 1.316 \times 10^3 & -3.947 \times 10^3 \\ -3.947 \times 10^3 & 1.184 \times 10^4 \end{pmatrix}$$

$$J_7 = \begin{pmatrix} 7.442 \times 10^3 & 3.721 \times 10^3 \\ 3.721 \times 10^3 & 1.86 \times 10^3 \end{pmatrix}$$

*Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej*

$i := 1 .. Lss \quad j := 1 .. Lss$

*Blok górny lewy, wiersz  $w := Lss * Wp_e + i - 2$ , kolumna  $k := Lss * Wp_e + j - 2$*

$$K_{[(Lss \cdot Wp_e - 2 + i), (Lss \cdot Wp_e - 2 + j)]} := K_{[(Lss \cdot Wp_e - 2 + i), (Lss \cdot Wp_e - 2 + j)]} + (J_e)_{i, j}$$

*Blok górny prawy, wiersz  $w := Lss * Wp_e + i - 2$ , kolumna  $k := Lss * Wk_e + j - 2$*

$$K_{[(Lss \cdot Wp_e - 2 + i), (Lss \cdot Wk_e - 2 + j)]} := K_{[(Lss \cdot Wp_e - 2 + i), (Lss \cdot Wk_e - 2 + j)]} - (J_e)_{i, j}$$

*Blok dolny lewy, wiersz  $w := Lss * Wk_e + i - 2$ , kolumna  $k := Lss * Wp_e + j - 2$*

$$K_{[(Lss \cdot Wk_e - 2 + i), (Lss \cdot Wp_e - 2 + j)]} := K_{[(Lss \cdot Wk_e - 2 + i), (Lss \cdot Wp_e - 2 + j)]} - (J_e)_{i, j}$$

*Blok dolny prawy, wiersz  $w := Lss * Wk_e + i - 2$ , kolumna  $k := Lss * Wk_e + j - 2$*

$$K_{[(Lss \cdot Wk_e - 2 + i), (Lss \cdot Wk_e - 2 + j)]} := K_{[(Lss \cdot Wk_e - 2 + i), (Lss \cdot Wk_e - 2 + j)]} + (J_e)_{i, j}$$

Globalna macierz sztywności  $\mathbf{K}$  bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.  $|\mathbf{K}|=0$

$$\mathbf{K} =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$2.995 \cdot 10^4$	$9.984 \cdot 10^3$	$-1.331 \cdot 10^4$	$-9.984 \cdot 10^3$	$-1.664 \cdot 10^4$	0	0	0	0	0
2	$9.984 \cdot 10^3$	$7.488 \cdot 10^3$	$-9.984 \cdot 10^3$	$-7.488 \cdot 10^3$	0	0	0	0	0	0
3	$-1.331 \cdot 10^4$	$-9.984 \cdot 10^3$	$3.424 \cdot 10^4$	$2.115 \cdot 10^3$	$-1.316 \cdot 10^3$	$3.947 \cdot 10^3$	$-1.961 \cdot 10^4$	$3.922 \cdot 10^3$	0	0
4	$-9.984 \cdot 10^3$	$-7.488 \cdot 10^3$	$2.115 \cdot 10^3$	$2.011 \cdot 10^4$	$3.947 \cdot 10^3$	$-1.184 \cdot 10^4$	$3.922 \cdot 10^3$	-784.465	0	0
5	$-1.664 \cdot 10^4$	0	$-1.316 \cdot 10^3$	$3.947 \cdot 10^3$	$4.204 \cdot 10^4$	-225.705	$-7.442 \cdot 10^3$	$-3.721 \cdot 10^3$	$-1.664 \cdot 10^4$	0
6	0	0	$3.947 \cdot 10^3$	$-1.184 \cdot 10^4$	-225.705	$1.37 \cdot 10^4$	$-3.721 \cdot 10^3$	$-1.86 \cdot 10^3$	0	0
7	0	0	$-1.961 \cdot 10^4$	$3.922 \cdot 10^3$	$-7.442 \cdot 10^3$	$-3.721 \cdot 10^3$	$3.636 \cdot 10^4$	$-1.881 \cdot 10^4$	$-9.302 \cdot 10^3$	$1.86 \cdot 10^4$
8	0	0	$3.922 \cdot 10^3$	-784.465	$-3.721 \cdot 10^3$	$-1.86 \cdot 10^3$	$-1.881 \cdot 10^4$	$3.985 \cdot 10^4$	$1.86 \cdot 10^4$	$-3.721 \cdot 10^4$
9	0	0	0	0	$-1.664 \cdot 10^4$	0	$-9.302 \cdot 10^3$	$1.86 \cdot 10^4$	$2.594 \cdot 10^4$	$-1.86 \cdot 10^4$
10	0	0	0	0	0	0	$1.86 \cdot 10^4$	$-3.721 \cdot 10^4$	$-1.86 \cdot 10^4$	$3.721 \cdot 10^4$

$$|\mathbf{K}| = 0$$

*Zamiast zera wyznacznik może być "bardzo małą" liczbą ze względu na niedostateczną dokładność wyrazów macierzy sztywności*

### Globalny wektor sił węzłowych

$$p := \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Fx_4 \\ Fy_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Fx_4 := -6 \sin\left(\pi \cdot \frac{35}{180}\right) = -3.441$$

$$Fy_4 := -6 \cos\left(\pi \cdot \frac{35}{180}\right) = -4.915$$

*Rzutowanie siły w węźle 4 na osie globalnego układu współrzędnych*

$$p^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	-5	0	0	0	0	-3.441	-4.915	0	0

*Kopiowanie Macierzy  $\mathbf{K}$  i wektora  $\mathbf{p}$  przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$$K_0 := K \quad p_0 := p$$

*Uwzględnienie warunków brzegowych*

*węzeł Nr 1: stopień swobody  $s_1$  i  $s_2$ , węzeł Nr 5: stopień swobody  $s_3$  i  $s_4$*

$$s_1 := 1 \quad s_2 := 2 \quad s_3 := 9 \quad s_4 := 10$$

$$i := 1 \dots Lr$$

$$K_{0_{s_1, i}} := 0 \quad K_{0_{s_2, i}} := 0 \quad K_{0_{s_3, i}} := 0 \quad K_{0_{s_4, i}} := 0$$

$$K_{0_{i, s_1}} := 0 \quad K_{0_{i, s_2}} := 0 \quad K_{0_{i, s_3}} := 0 \quad K_{0_{i, s_4}} := 0$$

$$K_{0_{s_1, s_1}} := 1 \quad K_{0_{s_2, s_2}} := 1 \quad p_{0_{s_1}} := 0 \quad p_{0_{s_2}} := 0$$

$$K_{0_{s_3, s_3}} := 1 \quad K_{0_{s_4, s_4}} := 1 \quad p_{0_{s_3}} := 0 \quad p_{0_{s_4}} := 0$$



$$K_0 =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	$3.424 \cdot 10^4$	$2.115 \cdot 10^3$	$-1.316 \cdot 10^3$	$3.947 \cdot 10^3$	$-1.961 \cdot 10^4$	$3.922 \cdot 10^3$	0	0
4	0	0	$2.115 \cdot 10^3$	$2.011 \cdot 10^4$	$3.947 \cdot 10^3$	$-1.184 \cdot 10^4$	$3.922 \cdot 10^3$	-784.465	0	0
5	0	0	$-1.316 \cdot 10^3$	$3.947 \cdot 10^3$	$4.204 \cdot 10^4$	-225.705	$-7.442 \cdot 10^3$	$-3.721 \cdot 10^3$	0	0
6	0	0	$3.947 \cdot 10^3$	$-1.184 \cdot 10^4$	-225.705	$1.37 \cdot 10^4$	$-3.721 \cdot 10^3$	$-1.86 \cdot 10^3$	0	0
7	0	0	$-1.961 \cdot 10^4$	$3.922 \cdot 10^3$	$-7.442 \cdot 10^3$	$-3.721 \cdot 10^3$	$3.636 \cdot 10^4$	$-1.881 \cdot 10^4$	0	0
8	0	0	$3.922 \cdot 10^3$	-784.465	$-3.721 \cdot 10^3$	$-1.86 \cdot 10^3$	$-1.881 \cdot 10^4$	$3.985 \cdot 10^4$	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

$$p_0^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	-3.441	-4.915	0	0

$$|K_0| = 8.723 \times 10^{25} \quad - \text{wyznacznik macierzy } K_0 > 0$$

*Rozwiązanie układu równań:*

$$u := \text{lssolve}(K_0, p_0) \quad - \text{wektor przemieszczeń węzłowych}$$

$$u^T =$$

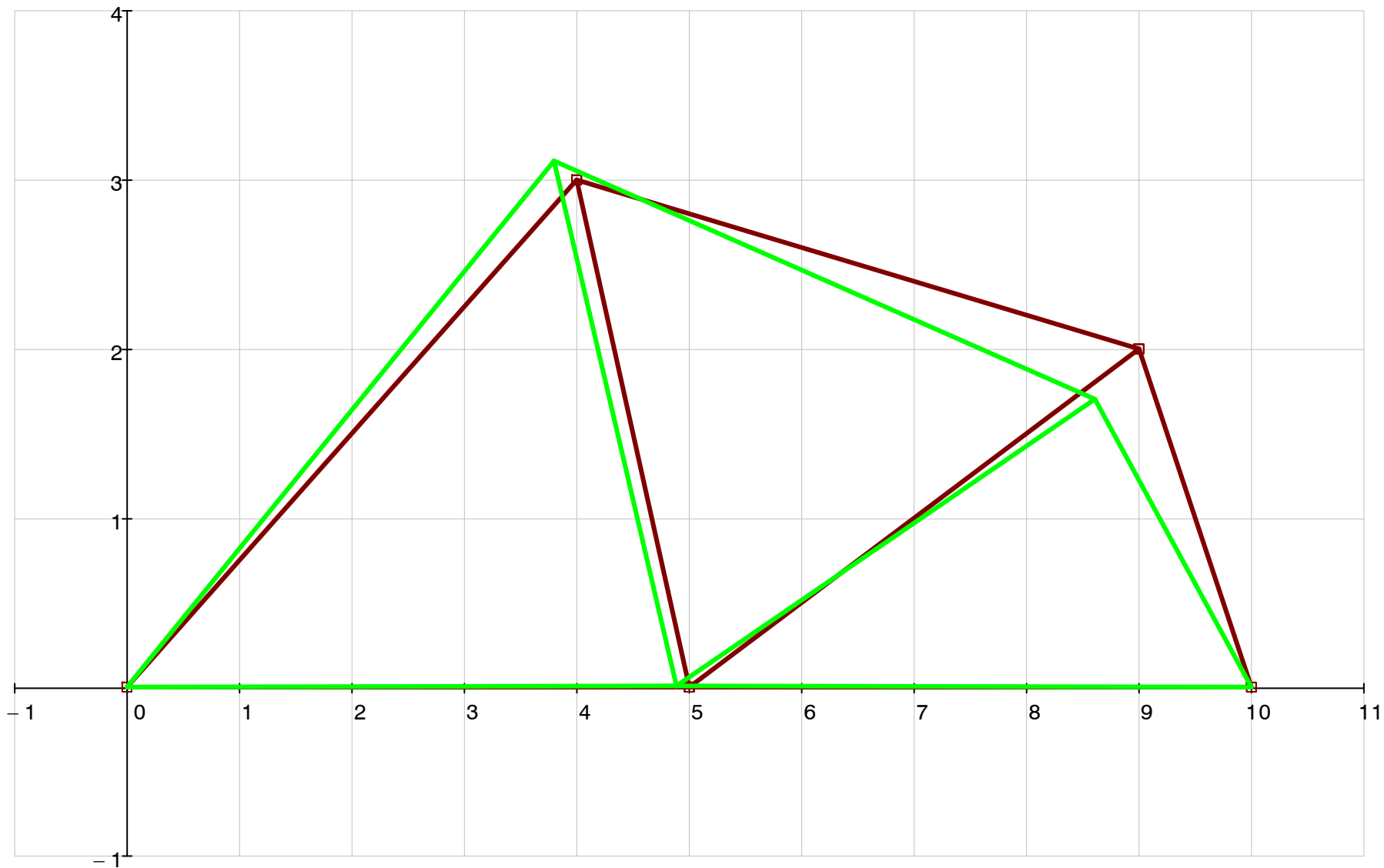
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	$-2.022 \cdot 10^{-4}$	$1.12 \cdot 10^{-4}$	$-1.123 \cdot 10^{-4}$	$6.756 \cdot 10^{-6}$	$-3.912 \cdot 10^{-4}$	$-2.96 \cdot 10^{-4}$	0	0

*Rysunek przemieszczeń kratownicy pozwala kontrolować poprawność otrzymanych wyników*

skala := 1000

$$Dx_e := Ex_e + \text{skala} \cdot \begin{bmatrix} u_{(2 \cdot Wp_e - 1)} \\ u_{(2 \cdot Wk_e - 1)} \end{bmatrix} \quad Dy_e := Ey_e + \text{skala} \cdot \begin{bmatrix} u_{(2 \cdot Wp_e)} \\ u_{(2 \cdot Wk_e)} \end{bmatrix}$$

- Ey1
- Ey2
- Ey3
- Ey4
- Ey5
- Ey6
- Ey7
- Dy1
- Dy2
- Dy3
- Dy4
- Dy5
- Dy6
- Dy7



EX1 , EX2 , EX3 , EX4 , EX5 , EX6 , EX7 , DX1 , DX2 , DX3 , DX4 , DX5 , DX6 , DX7

## Obliczenie reakcji podpór

$$r := K \cdot u - p$$

$$r^T =$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3.441	6.18	0	0	0	0	0	$1.776 \cdot 10^{-15}$	$4.25 \cdot 10^{-4}$	3.735

## Obliczenie sił wewnętrznych

$$N_e := \frac{E \cdot A_{(Np_e)}}{(L_e)^2} \cdot \left[ (u_{2 \cdot Wk_{e-1}} - u_{2 \cdot Wp_{e-1}}) \cdot Lx_e + (u_{2 \cdot Wk_e} - u_{2 \cdot Wp_e}) \cdot Ly_e \right]$$

$$N =$$

	1
1	-1.966
2	-2.148
3	-4.176
4	-1.868
5	1.868
6	1.688
7	-3.58

