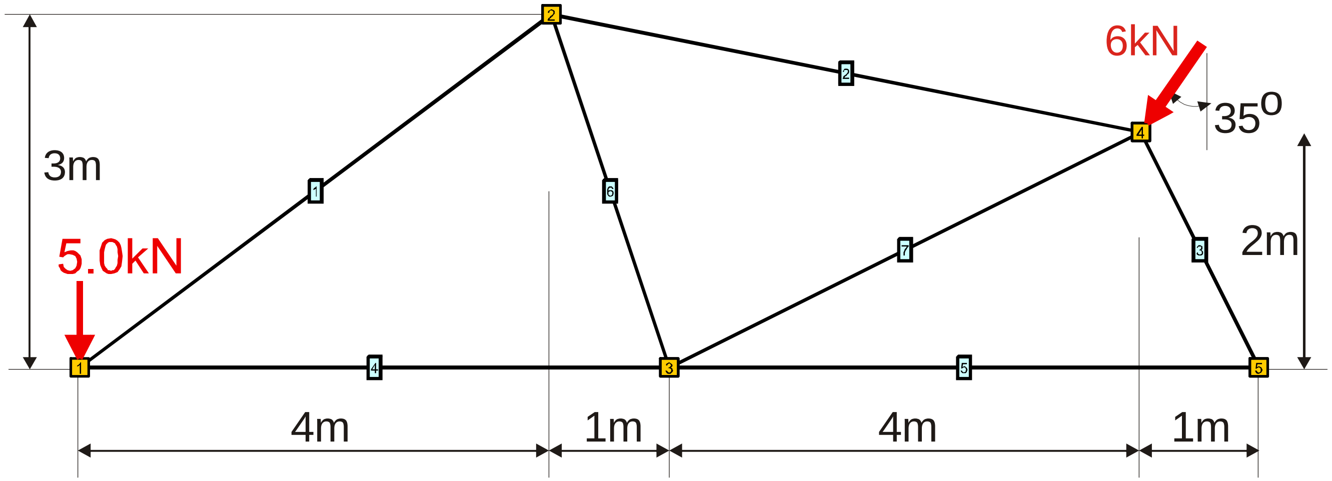
Statyka kratownicy stalowej o 3 różnych przekrojach prętów



$E := 208GPa$ *- Moduł Younga stali* $ORIGIN := 1$

$A1 := 5cm^2$ *- Pole powierzchni przekroju pasa górnego, elementy 1, 2, 3*

$A2 := 4cm^2$ *- Pole powierzchni przekroju pasa dolnego, elementy 4, 5*

$A3 := 2cm^2$ *- Pole powierzchni przekroju krzyżulców, elementy 6, 7*

Parametry pomocnicze:

$Le := 7$ *- Liczba elementów* $Lw := 5$ *- Liczba węzłów* $Lss := 2$ *- Liczba stopni swobody węzła*

$Lr := Lss \cdot Lw$ *- Liczba równań* $o := Le + 1$ *- położenie w tablicy elementu zerowego*

$K_{o_{Lr, Lr}} := 0$ *Deklaracja globalnej macierzy sztywności i wypełnienie jej zerami*

Współrzędne węzłów kratownicy

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} m \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} m$$

Tablica połączeń węzłów - liczby w tej tablicy są numerami elementów łączących węzeł początkowy (Wp=nr wiersza) i węzłem końcowym (Wk=nr kolumny)

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Numery węzłów początkowych (Wp) i końcowych (Wk) elementów wyliczone zostaną automatycznie z macierzy połączeń ***C***

$i := 1 .. Lw - 1 \qquad j := 2 .. Lw$

$Wp_{\left(C_{i,j}\right)} := i \qquad Wk_{\left(C_{i,j}\right)} := j$

Wp =

	1
1	1
2	2
3	4
4	1
5	3
6	2
7	3
8	4

Wk =

	1
1	2
2	4
3	5
4	3
5	5
6	3
7	4
8	4

Przekroje elementów

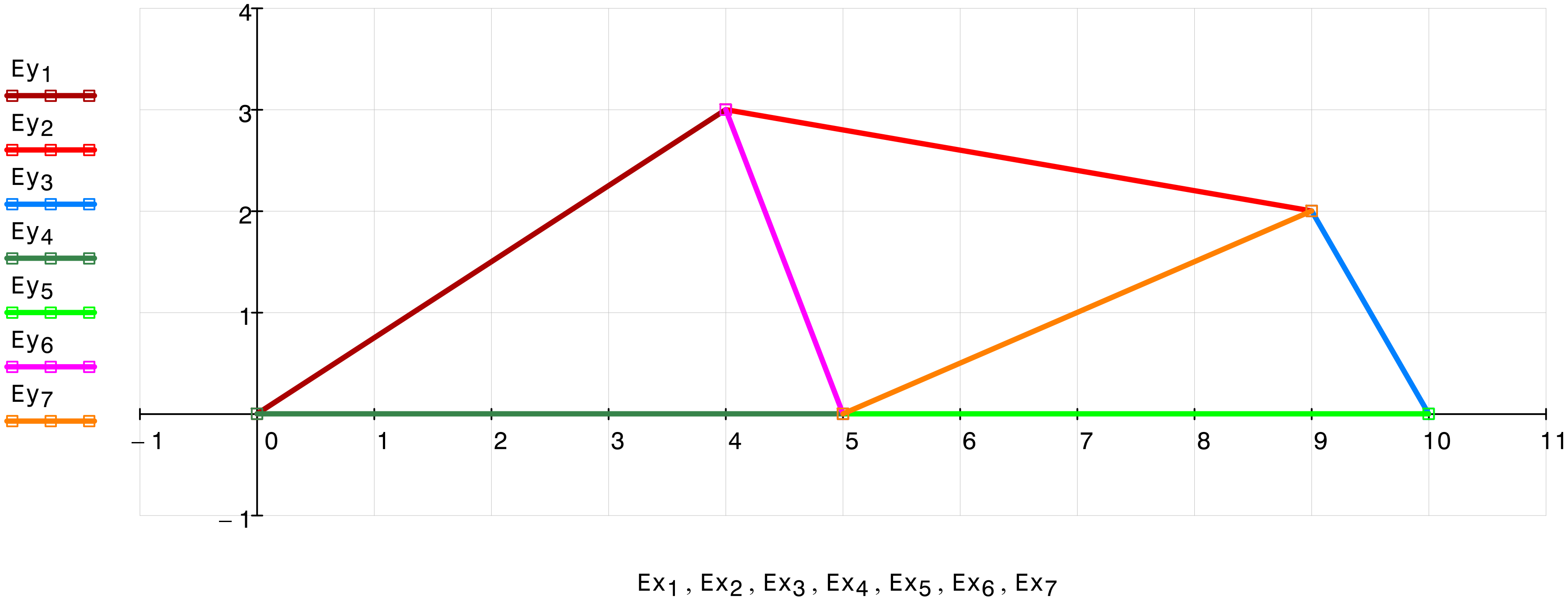
$$A := \begin{pmatrix} A1 \\ A1 \\ A1 \\ A2 \\ A2 \\ A3 \\ A3 \end{pmatrix}$$

$e := 1 .. Le$ *Pętla po wszystkich elementach kratownicy*

Rysunek elementów kratownicy pozwala kontrolować poprawność wprowadzonych danych

$$Ex_e := \begin{bmatrix} X_{(Wp_e)} \\ X_{(Wk_e)} \end{bmatrix} \qquad Ey_e := \begin{bmatrix} Y_{(Wp_e)} \\ Y_{(Wk_e)} \end{bmatrix}$$

Ex, Ey - współrzędne węzłów elementów kratownicy



Macierze sztywności elementów kratownicy

$Lx_e := X_{(Wk_e)} - X_{(Wp_e)}$ $Ly_e := Y_{(Wk_e)} - Y_{(Wp_e)}$ $L_e := \sqrt{(Lx_e)^2 + (Ly_e)^2}$

$Lx =$ (m)

	1
1	4.000
2	5.000
3	1.000
4	5.000
5	5.000
6	1.000
7	4.000

$Ly =$ (m)

	1
1	3.000
2	-1.000
3	-2.000
4	0.000
5	0.000
6	-3.000
7	2.000

$L =$ (m)

	1
1	5.000
2	5.099
3	2.236
4	5.000
5	5.000
6	3.162
7	4.472

$$J_e := \frac{E \cdot A_e}{(L_e)^3} \cdot \begin{bmatrix} (Lx_e)^2 & Lx_e \cdot Ly_e \\ Lx_e \cdot Ly_e & (Ly_e)^2 \end{bmatrix}$$

Mimo, że nie jest to potrzebne w dalczych obliczeniach, można pokazać bloki **J** *macierzy sztywności wszystkich elementów*

$$J_1 = \begin{pmatrix} 13312.0 & 9984.0 \\ 9984.0 & 7488.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 19611.6 & -3922.3 \\ -3922.3 & 784.5 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 9302.0 & -18604.1 \\ -18604.1 & 37208.2 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 16640.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_5 = \begin{pmatrix} 16640.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m} \qquad J_6 = \begin{pmatrix} 1315.5 & -3946.5 \\ -3946.5 & 11839.6 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$J_7 = \begin{pmatrix} 7441.6 & 3720.8 \\ 3720.8 & 1860.4 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

Fukcja LBM - Lokuj Blok Macierzy, używana przy agregacji macierzy sztywności

$$
\mathrm{LBM}(A, B, w, k) := \left|\begin{array}{l} \text{for } i \in 0 .. \ \mathrm{rows}(B) - 1 \\ \quad \text{for } j \in 0 .. \ \mathrm{cols}(B) - 1 \\ \qquad A_{w+i,\, k+j} \leftarrow B_{1+i,\, 1+j} \\ A \end{array}\right.
$$

Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej

$n_e := Lss \cdot Wp_e - 1$ $\qquad$ $k_e := Lss \cdot Wk_e - 1$ $\qquad$ *<--- numery stopni swobody węzłów początkowych (n_e) i końcowych (k_e)*

$$K := \sum_e \left(LBM\left(K_o, J_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(K_o, J_e, k_e, k_e\right) - LBM\left(K_o, J_e, n_e, k_e\right) - LBM\left(K_o, J_e, k_e, n_e\right) \right)$$

K =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	29952.0	9984.0	-13312.0	-9984.0	-16640.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	9984.0	7488.0	-9984.0	-7488.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	-13312.0	-9984.0	34239.1	2115.2	-1315.5	3946.5	-19611.6	3922.3	0.0	0.0
4	-9984.0	-7488.0	2115.2	20112.0	3946.5	-11839.6	3922.3	-784.5	0.0	0.0
5	-16640.0	0.0	-1315.5	3946.5	42037.1	-225.7	-7441.6	-3720.8	-16640.0	0.0
6	0.0	0.0	3946.5	-11839.6	-225.7	13700.0	-3720.8	-1860.4	0.0	0.0
7	0.0	0.0	-19611.6	3922.3	-7441.6	-3720.8	36355.3	-18805.6	-9302.0	18604.1
8	0.0	0.0	3922.3	-784.5	-3720.8	-1860.4	-18805.6	39853.0	18604.1	-37208.2
9	0.0	0.0	0.0	0.0	-16640.0	0.0	-9302.0	18604.1	25942.0	-18604.1
10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	18604.1	-37208.2	-18604.1	37208.2

$\cdot \dfrac{kN}{m}$

Globalna macierz sztywności ***K*** *bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.* $|\mathbf{K}|=0$

$$\left| K \cdot \frac{1m}{kN} \right| = 1.747 \times 10^{-5}$$

Aby obliczyć wyznacznik macierzy, której elementy nie są liczbami bezwymiarowymi musimy macierz pomnożyć przez odwrotność jednostek aby doprowadzić elementy do postaci bezwymiarowej - to jest wymóg MatCada.

Zamiast zera wyznacznik może być "bardzo małą" liczbą ze względu na niedostateczną dokładność wyrazów macierzy sztywności.

Globalny wektor sił węzłowych

$$p := \begin{pmatrix} 0 \\ -5kN \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Fx_4 \\ Fy_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

p =

	1
1	0.000
2	-5.000
3	0.000
4	0.000
5	0.000
6	0.000
7	-3.441
8	-4.915
9	0.000
10	0.000

$\cdot kN$

Rzutowanie siły w węźle 4 na osie globalnego układu współrzędnych

$$Fx_4 := -6kN \cdot \sin(35deg) = -3.441 \cdot kN$$

$$Fy_4 := -6kN \cdot \cos(35deg) = -4.915 \cdot kN$$

*Kopiowanie Macierzy **K** i wektora **p** przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$K_o := K \qquad p_o := p$

Uwzględnienie warunków brzegowych

węzeł Nr 1: stopień swobody s1 i s2, węzeł Nr 5: stopieńswobody s3 i s4

$s1 := 1 \qquad s2 := 2 \qquad s3 := 9 \qquad s4 := 10$

$i := 1 .. Lr$

$K_{o_{s1,i}} := 0 \qquad K_{o_{s2,i}} := 0 \qquad K_{o_{s3,i}} := 0 \qquad K_{o_{s4,i}} := 0$ *zerowanie wierszy*

$K_{o_{i,s1}} := 0 \qquad K_{o_{i,s2}} := 0 \qquad K_{o_{i,s3}} := 0 \qquad K_{o_{i,s4}} := 0$ *zerowanie kolumn*

$K_{o_{s1,s1}} := 1\frac{kN}{m} \qquad K_{o_{s2,s2}} := 1\frac{kN}{m} \qquad K_{o_{s3,s3}} := 1\frac{kN}{m} \qquad K_{o_{s4,s4}} := 1\frac{kN}{m}$ *wstawianie jedności na przekątną macierzy sztywności*

$p_{o_{s1}} := 0 \qquad p_{o_{s2}} := 0 \qquad p_{o_{s3}} := 0 \qquad p_{o_{s4}} := 0$ *zerowanie wartości w wektorze "prawej strony"*

$K_o =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	34239.1	2115.2	-1315.5	3946.5	-19611.6	3922.3	0.0	0.0
4	0.0	0.0	2115.2	20112.0	3946.5	-11839.6	3922.3	-784.5	0.0	0.0
5	0.0	0.0	-1315.5	3946.5	42037.1	-225.7	-7441.6	-3720.8	0.0	0.0
6	0.0	0.0	3946.5	-11839.6	-225.7	13700.0	-3720.8	-1860.4	0.0	0.0
7	0.0	0.0	-19611.6	3922.3	-7441.6	-3720.8	36355.3	-18805.6	0.0	0.0
8	0.0	0.0	3922.3	-784.5	-3720.8	-1860.4	-18805.6	39853.0	0.0	0.0
9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0

$\cdot \frac{kN}{m}$

$p_o =$

	1
1	0.000
2	0.000
3	0.000
4	0.000
5	0.000
6	0.000
7	-3.441
8	-4.915
9	0.000
10	0.000

$\cdot kN$

$$\left| K_o \cdot 1 \frac{m}{kN} \right| = 8.723 \times 10^{25}$$

- wyznacznik macierzy $\mathbf{K}_o$ *jest zawsze większy od zera,* $|\mathbf{K}_o| > 0$

Rozwiązanie układu równań: $u := \mathrm{lsolve}(K_o, p_o)$

u - wektor przemieszczeń węzłowych

$u^T =$

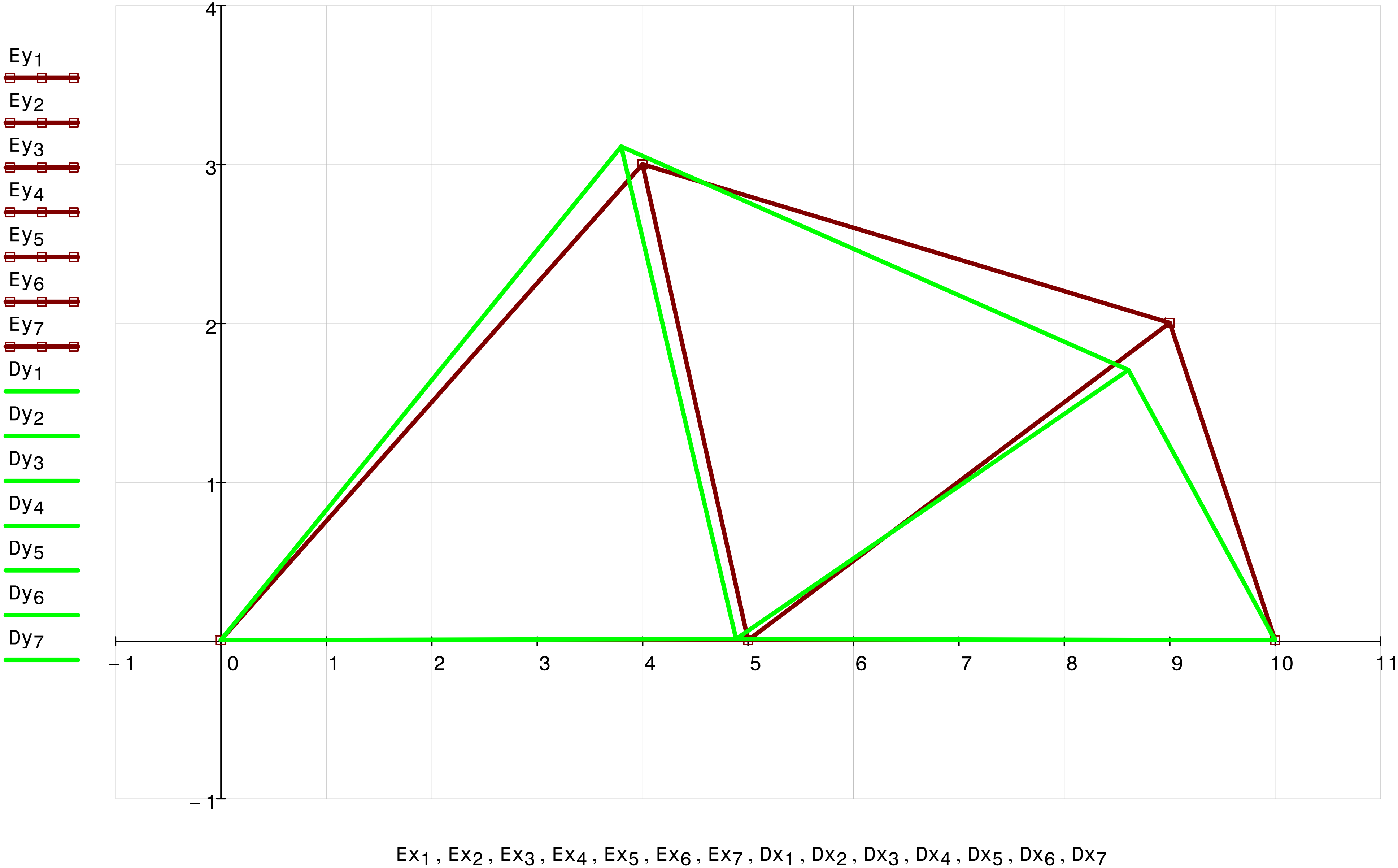
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0.0000	0.0000	-0.2022	0.1120	-0.1123	0.0068	-0.3912	-0.2960	0.0000	0.0000

$\cdot mm$

Rysunek przemieszczeń kratownicy pozwala kontrolować poprawność otrzymanych wyników

$skala := 1000$

$$Dx_e := Ex_e + skala \cdot \begin{bmatrix} u_{(2 \cdot Wp_e - 1)} \\ u_{(2 \cdot Wk_e - 1)} \end{bmatrix} \qquad Dy_e := Ey_e + skala \cdot \begin{bmatrix} u_{(2 \cdot Wp_e)} \\ u_{(2 \cdot Wk_e)} \end{bmatrix}$$



Ey1
Ey2
Ey3
Ey4
Ey5
Ey6
Ey7
Dy1
Dy2
Dy3
Dy4
Dy5
Dy6
Dy7
4
3
2
1
−1
0
5
6
7
8
9
10
11
Ex1 , Ex2 , Ex3 , Ex4 , Ex5 , Ex6 , Ex7 , Dx1 , Dx2 , Dx3 , Dx4 , Dx5 , Dx6 , Dx7

Obliczenie reakcji podpór

$r := K \cdot u - p$

$r^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3.441	6.180	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	3.735

$\cdot kN$

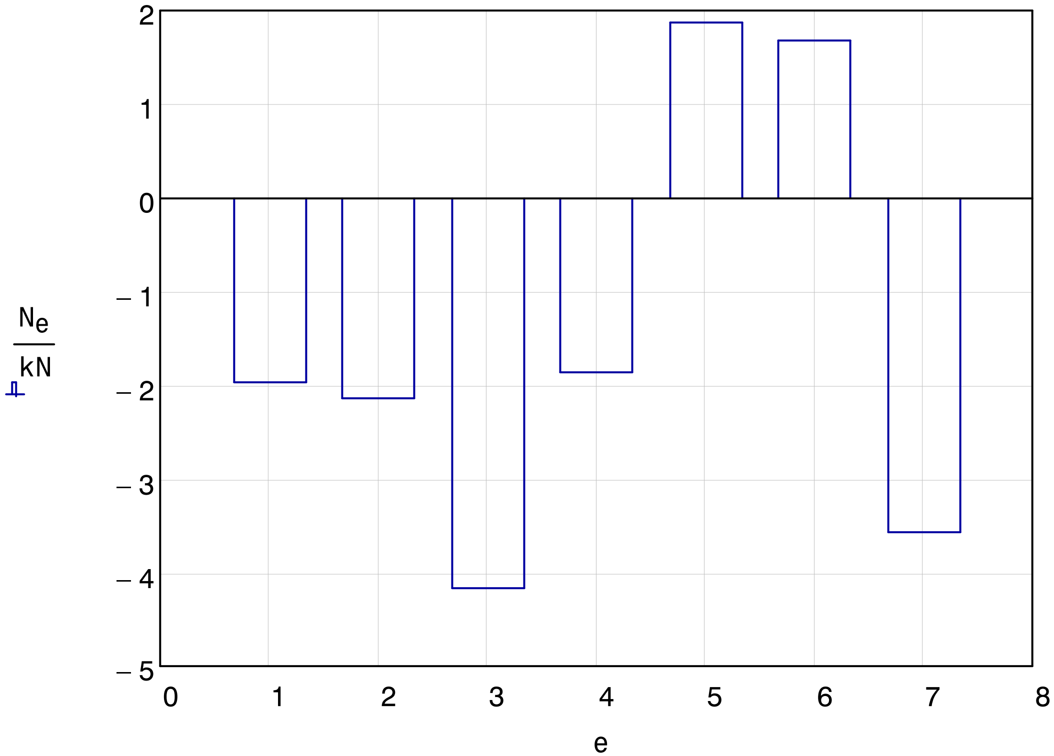
Obliczenie sił wewnętrznych

$$N_e := \frac{E \cdot A_e}{\left(L_e\right)^2} \cdot \left[\left(u_{2 \cdot Wk_e - 1} - u_{2 \cdot Wp_e - 1}\right) \cdot Lx_e + \left(u_{2 \cdot Wk_e} - u_{2 \cdot Wp_e}\right) \cdot Ly_e\right]$$

$N =$

	1
1	-1.966
2	-2.148
3	-4.176
4	-1.868
5	1.868
6	1.688
7	-3.58

$\cdot kN$



Obliczenie naprężeń

$$\sigma_e := \frac{E}{\left(L_e\right)^2} \cdot \left[\left(u_{2 \cdot Wk_e - 1} - u_{2 \cdot Wp_e - 1}\right) \cdot Lx_e + \left(u_{2 \cdot Wk_e} - u_{2 \cdot Wp_e}\right) \cdot Ly_e\right]$$

$\sigma =$

	1
1	-3.933
2	-4.297
3	-8.352
4	-4.670
5	4.670
6	8.439
7	-17.901

$\cdot MPa$