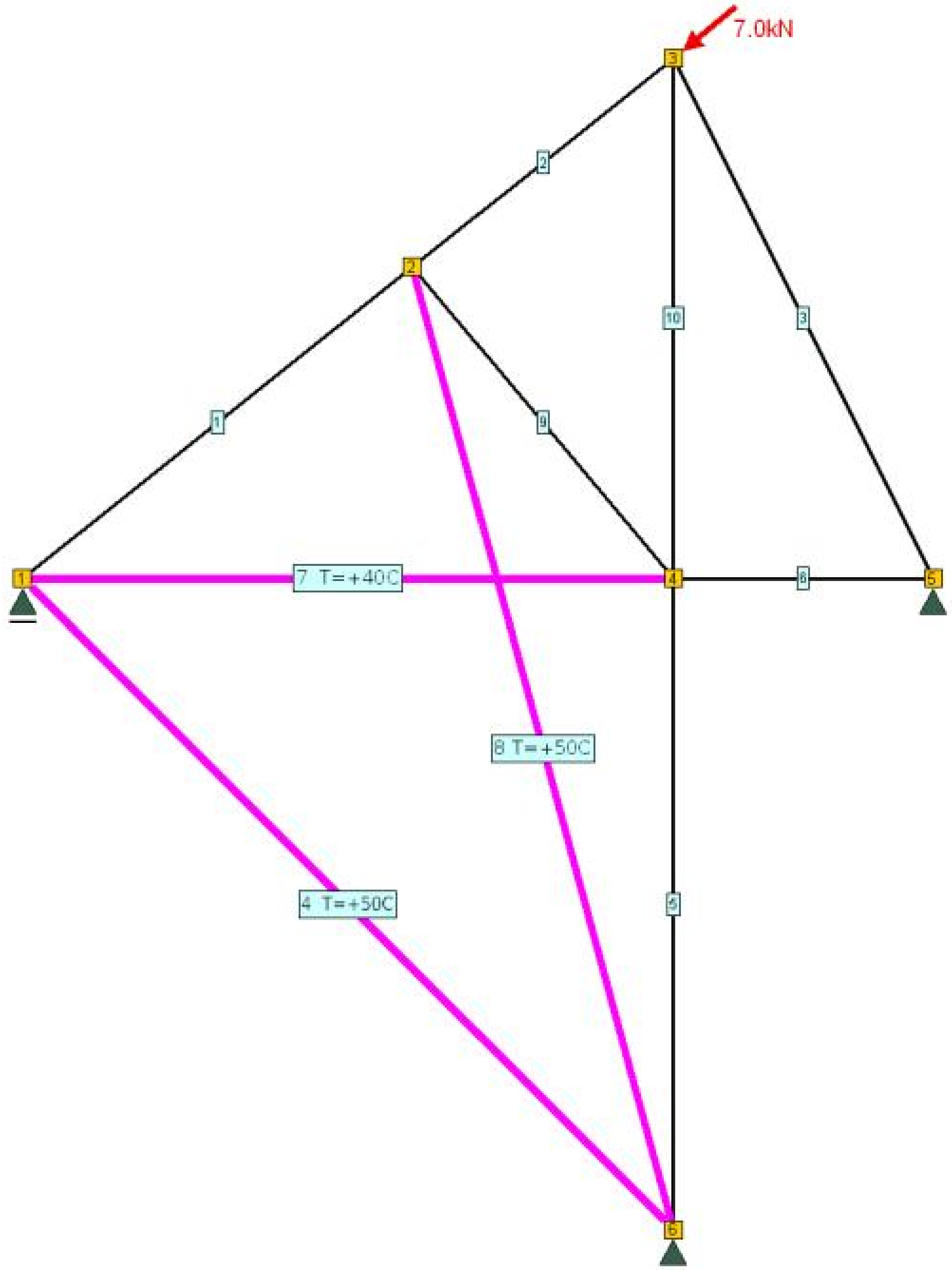
Statyka kratownicy stalowej o 2 różnych przekrojach prętów, obciążonej temperaturą



$ORIGIN := 1$ - *Ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy*

$E := 208GPa$ - *Moduł Younga stali*

$\alpha_t := 10^{-6}$ - *Współczynnik rozszerzalności cieplnej stali*

$A1 := 35cm^2$ - *Pole powierzchni przekroju elementów 1...5*

$A2 := 25cm^2$ - *Pole powierzchni przekroju elementów 6...10*

Parametry pomocnicze:

$Lss := 2$ - *Liczba stopni swobody węzła*

$Le := 10$ - *Liczba elementów*

$Lw := 6$ - *Liczba węzłów*

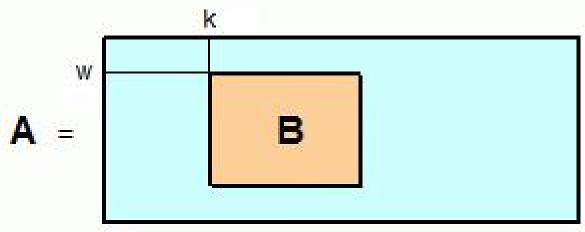
$Lr := Lss \cdot Lw$ - *Liczba równań*

$K_{0_{Lr,Lr}} := 0$ *Deklaracja globalnej macierzy sztywności i wypełnienie jej zerami*

$pT_{0_{Lr}} := 0$ *Deklaracja globalnego wektora obciążeń termicznych i wypełnienie go zerami*

Funkcja LBM - Lokuj Blok Macierzy, używana przy agregacji macierzy sztywności i wektora obciążeń termicznych

LBM (A, B, w, k)
ZNACZENIE PARAMETRÓW:
A - nazwa macierzy
B - nazwa bloku
w - numer wiersza, od którego zostanie wprowadzony blok
k - numer kolumny, od której zostanie wprowadzony blok
UWAGA: Macierz B zostanie ulokowana w większej macierzy A, poczynając od elementu usytuowanego w wierszu o numerze "w" i kolumnie o numerze "k".



```
$LBM(A, B, w, k) :=$
    for  $i \in 0 .. rows(B) - 1$
        for  $j \in 0 .. cols(B) - 1$
            $A_{w+i, k+j} \leftarrow B_{1+i, 1+j}$
    $A$
```

Współrzędne węzłów kratownicy

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} m \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 2.4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} m$$

Numery węzłów początkowych (Wp) i końcowych (Wk) elementów

$$Wp := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad Wk := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Przyrost temperatury elementów

$$T := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Przekroje elementów

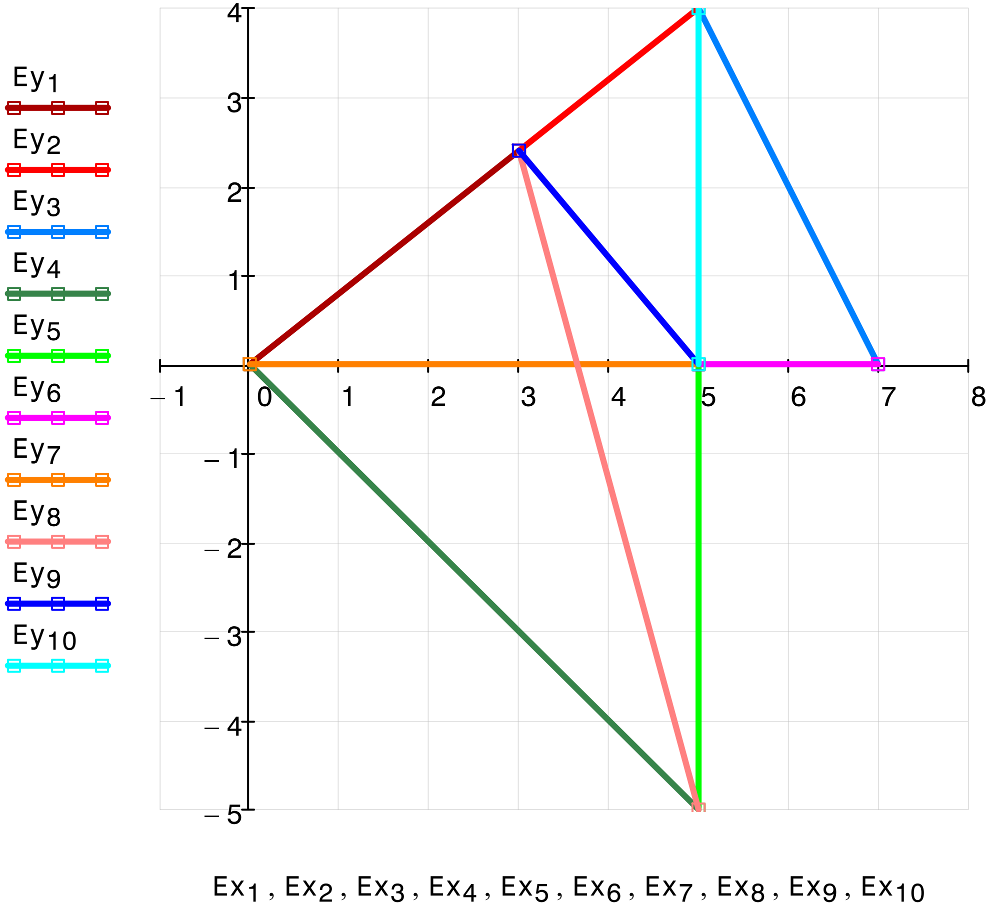
$$A := \begin{pmatrix} A1 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \\ A1 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \\ A2 \end{pmatrix}$$

$e := 1 .. Le$ *Pętla po wszystkich elementach kratownicy*

Rysunek elementów kratownicy pozwala kontrolować poprawność wprowadzonych danych

$$Ex_e := \begin{bmatrix} X_{(Wp_e)} \\ X_{(Wk_e)} \end{bmatrix} \qquad Ey_e := \begin{bmatrix} Y_{(Wp_e)} \\ Y_{(Wk_e)} \end{bmatrix}$$

Ex, Ey - współrzędne węzłów elementów kratownicy



Macierze sztywności elementów kratownicy

$$Lx_e := X_{(Wk_e)} - X_{(Wp_e)} \qquad Ly_e := Y_{(Wk_e)} - Y_{(Wp_e)} \qquad L_e := \sqrt{(Lx_e)^2 + (Ly_e)^2}$$

$Lx =$ … m

	1
1	3.000
2	2.000
3	2.000
4	5.000
5	0.000
6	2.000
7	5.000
8	2.000
9	2.000
10	0.000

$Ly =$ … m

	1
1	2.400
2	1.600
3	-4.000
4	-5.000
5	-5.000
6	0.000
7	0.000
8	-7.400
9	-2.400
10	-4.000

$L =$ … m

	1
1	3.842
2	2.561
3	4.472
4	7.071
5	5.000
6	2.000
7	5.000
8	7.666
9	3.124
10	4.000

$$J_e := \frac{E\cdot A_e}{(L_e)^3}\cdot\begin{bmatrix}(Lx_e)^2 & Lx_e\cdot Ly_e \\ Lx_e\cdot Ly_e & (Ly_e)^2\end{bmatrix}$$

Mimo, że nie jest to potrzebne w dalczych obliczeniach, można pokazać bloki **J** *macierzy sztywności wszystkich elementów*

$$J_1 = \begin{pmatrix}115543.2 & 92434.6 \\ 92434.6 & 73947.6\end{pmatrix}\cdot\frac{kN}{m} \qquad J_2 = \begin{pmatrix}173314.8 & 138651.8 \\ 138651.8 & 110921.5\end{pmatrix}\cdot\frac{kN}{m} \qquad J_3 = \begin{pmatrix}32557.1 & -65114.3 \\ -65114.3 & 130228.6\end{pmatrix}\cdot\frac{kN}{m}$$

$$J_4 = \begin{pmatrix}51477.4 & -51477.4 \\ -51477.4 & 51477.4\end{pmatrix}\cdot\frac{kN}{m} \qquad J_5 = \begin{pmatrix}0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 145600.0\end{pmatrix}\cdot\frac{kN}{m} \qquad J_6 = \begin{pmatrix}260000.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0\end{pmatrix}\cdot\frac{kN}{m}$$

$$J_7 = \begin{pmatrix}104000.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0\end{pmatrix}\cdot\frac{kN}{m} \qquad J_8 = \begin{pmatrix}4617.9 & -17086.1 \\ -17086.1 & 63218.5\end{pmatrix}\cdot\frac{kN}{m} \qquad J_9 = \begin{pmatrix}68216.4 & -81859.6 \\ -81859.6 & 98231.6\end{pmatrix}\cdot\frac{kN}{m}$$

Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej

$n_e := Lss \cdot Wp_e - 1$ $\qquad$ $k_e := Lss \cdot Wk_e - 1$ $\qquad$ *<--- numery stopni swobody węzłów początkowych (n_e) i końcowych (k_e)*

$$K := \sum_e \left(LBM\left(K_o, J_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(K_o, J_e, k_e, k_e\right) - LBM\left(K_o, J_e, n_e, k_e\right) - LBM\left(K_o, J_e, k_e, n_e\right) \right)$$

K = $\cdot \dfrac{kN}{m}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	271020.6	40957.2	-115543.2	-92434.6	0.0	0.0	-104000.0	0.0	0.0	0.0
2	40957.2	125425.0	-92434.6	-73947.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	-115543.2	-92434.6	361692.2	132140.7	-173314.8	-138651.8	-68216.4	81859.6	0.0	0.0
4	-92434.6	-73947.6	132140.7	346319.2	-138651.8	-110921.5	81859.6	-98231.6	0.0	0.0
5	0.0	0.0	-173314.8	-138651.8	205871.9	73537.5	0.0	0.0	-32557.1	65114.3
6	0.0	0.0	-138651.8	-110921.5	73537.5	371150.1	0.0	-130000.0	65114.3	-130228.6
7	-104000.0	0.0	-68216.4	81859.6	0.0	0.0	432216.4	-81859.6	-260000.0	0.0
8	0.0	0.0	81859.6	-98231.6	0.0	-130000.0	-81859.6	373831.6	0.0	0.0
9	0.0	0.0	0.0	0.0	-32557.1	65114.3	-260000.0	0.0	292557.1	-65114.3
10	0.0	0.0	0.0	0.0	65114.3	-130228.6	0.0	0.0	-65114.3	...

Globalna macierz sztywności ***K*** *bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.* $|\mathbf{K}|=0$

$$\left| K \cdot \frac{1m}{kN} \right| = 0.000 \times 10^0$$

Aby obliczyć wyznacznik macierzy, której elementy nie są liczbami bezwymiarowymi musimy macierz pomnożyć przez odwrotność jednostek aby doprowadzić elementy do postaci bezwymiarowej - to jest wymóg MatCada.

Zamiast zera wyznacznik może być "bardzo małą" liczbą ze względu na niedostateczną dokładność wyrazów macierzy sztywności.

Globalny wektor sił węzłowych

$$p := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Fx_3 \\ Fy_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

p =

	1
1	0.000
2	0.000
3	0.000
4	0.000
5	-5.362
6	-4.500
7	0.000
8	0.000
9	0.000
10	0.000
11	0.000
12	0.000

· kN

Rzutowanie siły w węźle 3 na osie globalnego układu współrzędnych

$$Fx_3 := -7kN\cdot \sin(50deg) = -5.362\cdot kN$$

$$Fy_3 := -7kN\cdot \cos(50deg) = -4.500\cdot kN$$

- siły węzłowe wywołane temperaturą w elemencie "e"

$$t_e := \alpha_t \cdot T_e \cdot \frac{E \cdot A_e}{L_e} \begin{pmatrix} Lx_e \\ Ly_e \end{pmatrix}$$

Agregacja wektora obciążeń termicznych **p**T *(metodą podobną do stosowanej w agregacji macierzy sztywności)*

$$pT := \sum_{e} \left(LBM\left(pT_o, t_e, n_e, 1\right) - LBM\left(pT_o, t_e, k_e, 1\right) \right)$$

$pT^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	46.539	-25.739	6.784	-25.099	0.000	0.000	-20.800	0.000	0.000	0.000	-32.522	50.838

$\cdot kN$

Kopiowanie Macierzy **K** *i wektora* **p** *przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$K_o := K \qquad p_o := p - pT$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$\mathrm{Lwb} := 5$ *- liczba warunków brzegowych*

$$s := \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

- globalne numery przemieszczeń węzłów blokowanych na podporach

$i := 1 .. \mathrm{Lr} \qquad j := 1 .. \mathrm{Lwb}$

$K_{o_{s_j, i}} := 0$ *zerowanie wierszy*

$K_{o_{i, s_j}} := 0$ *zerowanie kolumn*

$K_{o_{s_j, s_j}} := 1 \frac{kN}{m}$ *wstawianie jedności na przekątną macierzy sztywności*

$p_{o_{(s_j)}} := 0$ *zerowanie wartości w wektorze "prawej strony"*

$K_o =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	271020.6	0.0	-115543.2	-92434.6	0.0	0.0	-104000.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	-115543.2	0.0	361692.2	132140.7	-173314.8	-138651.8	-68216.4	81859.6	0.0	0.0	0.0
4	-92434.6	0.0	132140.7	346319.2	-138651.8	-110921.5	81859.6	-98231.6	0.0	0.0	0.0
5	0.0	0.0	-173314.8	-138651.8	205871.9	73537.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6	0.0	0.0	-138651.8	-110921.5	73537.5	371150.1	0.0	-130000.0	0.0	0.0	0.0
7	-104000.0	0.0	-68216.4	81859.6	0.0	0.0	432216.4	-81859.6	0.0	0.0	0.0
8	0.0	0.0	81859.6	-98231.6	0.0	-130000.0	-81859.6	373831.6	0.0	0.0	0.0
9	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0
12	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	...

$\cdot \dfrac{kN}{m}$

$\left|K_o \cdot 1\dfrac{m}{kN}\right| = 4.325 \times 10^{37}$ *- wyznacznik macierzy* $\mathbf{K}_o$ *jest zawsze większy od zera,* $|\mathbf{K}_o| > 0$

$p_o^{T} =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	-46.539	0.000	-6.784	25.099	-5.362	-4.500	20.800	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

$\cdot kN$

Rozwiązanie układu równań: $u := \mathrm{lsolve}\left(K_o, p_o\right)$

u - wektor przemieszczeń węzłowych

$u^T =$

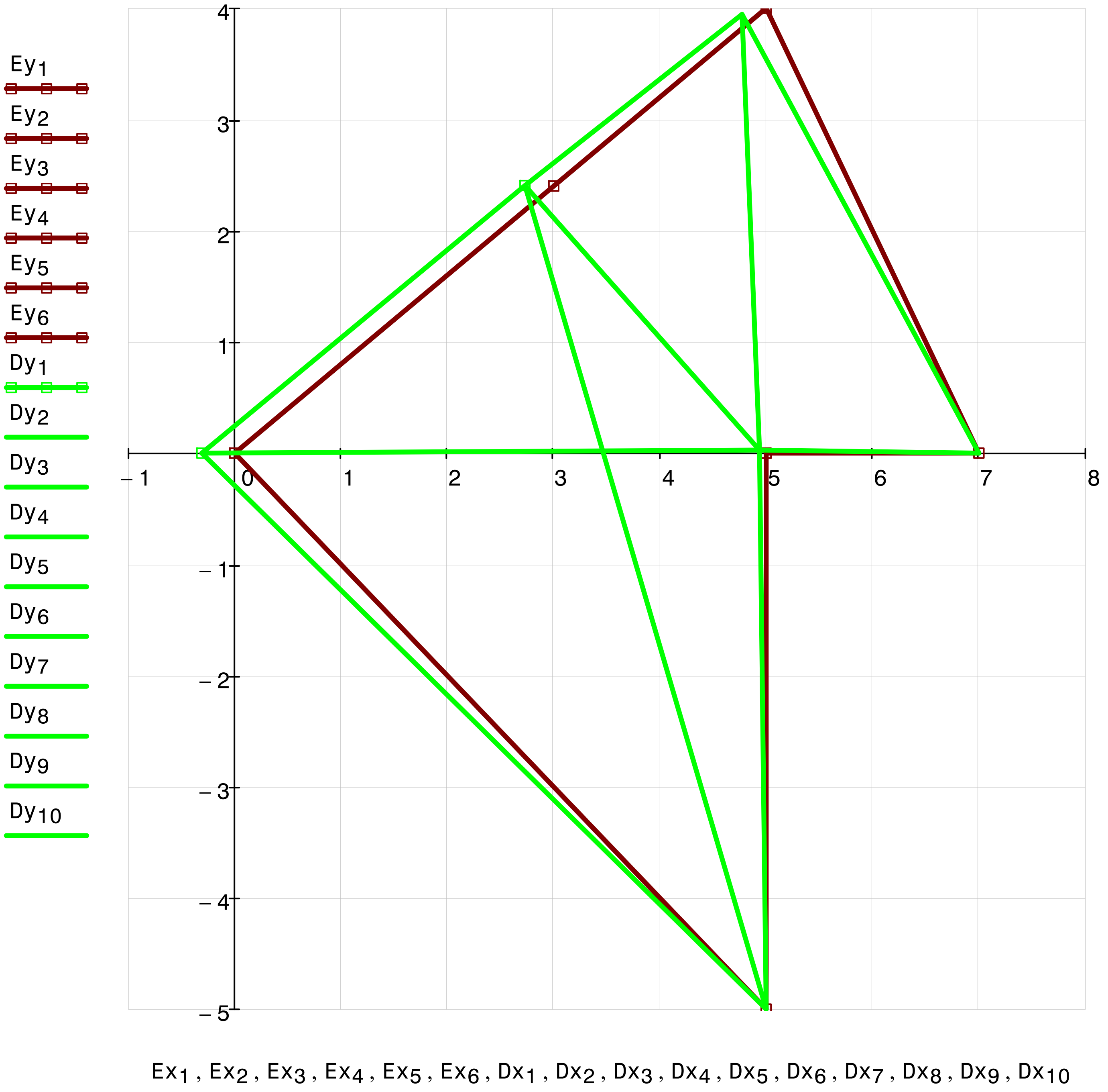
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	-0.3092	0.0000	-0.2690	0.0061	-0.2283	-0.0562	-0.0648	0.0268	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

$\cdot mm$

Rysunek przemieszczeń kratownicy pozwala kontrolować poprawność otrzymanych wyników

$skala := 1000$

$$Dx_e := Ex_e + skala \cdot \begin{bmatrix} u_{\left(2 \cdot Wp_e - 1\right)} \\ u_{\left(2 \cdot Wk_e - 1\right)} \end{bmatrix} \qquad Dy_e := Ey_e + skala \cdot \begin{bmatrix} u_{\left(2 \cdot Wp_e\right)} \\ u_{\left(2 \cdot Wk_e\right)} \end{bmatrix}$$



Ey_1
Ey_2
Ey_3
Ey_4
Ey_5
Ey_6
Dy_1
Dy_2
Dy_3
Dy_4
Dy_5
Dy_6
Dy_7
Dy_8
Dy_9
Dy_{10}
4
3
2
1
–1
–2
–3
–4
–5
–1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
Ex_1 , Ex_2 , Ex_3 , Ex_4 , Ex_5 , Ex_6 , Dx_1 , Dx_2 , Dx_3 , Dx_4 , Dx_5 , Dx_6 , Dx_7 , Dx_8 , Dx_9 , Dx_{10}

Obliczenie reakcji podpór

$r := K \cdot u - p + pT$

$r^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0.000	-13.992	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	20.624	-7.552	-15.261	26.043

$\cdot kN$

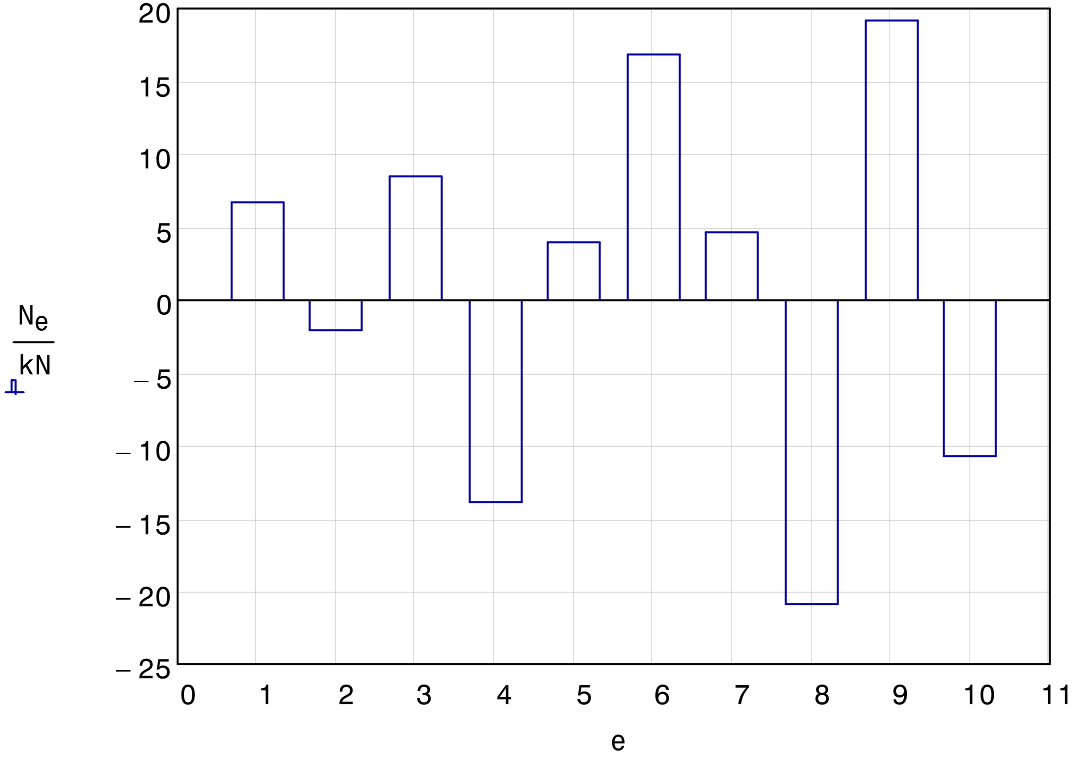
Obliczenie sił wewnętrznych

$$N_e := \frac{E \cdot A_e}{\left(L_e\right)^2} \cdot \left[\left(u_{2 \cdot Wk_e - 1} - u_{2 \cdot Wp_e - 1}\right) \cdot Lx_e + \left(u_{2 \cdot Wk_e} - u_{2 \cdot Wp_e}\right) \cdot Ly_e\right] - \alpha_t \cdot T_e \cdot E \cdot A_e$$

$N =$

	1
1	6.672
2	-2.032
3	8.443
4	-13.893
5	3.899
6	16.848
7	4.614
8	-20.84
9	19.11
10	-10.782

$\cdot kN$



Obliczenie naprężeń

$$\sigma_e := \frac{E}{(L_e)^2}\cdot\left[\left(u_{2\cdot Wk_e - 1} - u_{2\cdot Wp_e - 1}\right)\cdot Lx_e + \left(u_{2\cdot Wk_e} - u_{2\cdot Wp_e}\right)\cdot Ly_e\right] - \alpha_t\cdot T_e\cdot E$$

$\sigma =$

	1
1	1.906
2	-0.580
3	2.412
4	-3.969
5	1.114
6	6.739
7	1.845
8	-8.336
9	7.644
10	-4.313

$\cdot \text{MPa}$