Obliczenie ugięcia membrany metodą obszarów kontrolnych (objętości skończonych -MOS) - rozwiązanie równania Poissona

ORIGIN := 0

Obliczyć przemieszczenie prostokątnej membrany o wymiarach Lx, Ly, opartej na obwodzie, obciążonej stałym ciśnieniem p0 i rozciąganej stałym napięciem T

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f(x,y)=0$$

$nx:=18 \quad ny:=11 \quad N_{ny,nx}:=0$

Numery obszarów i węzłów

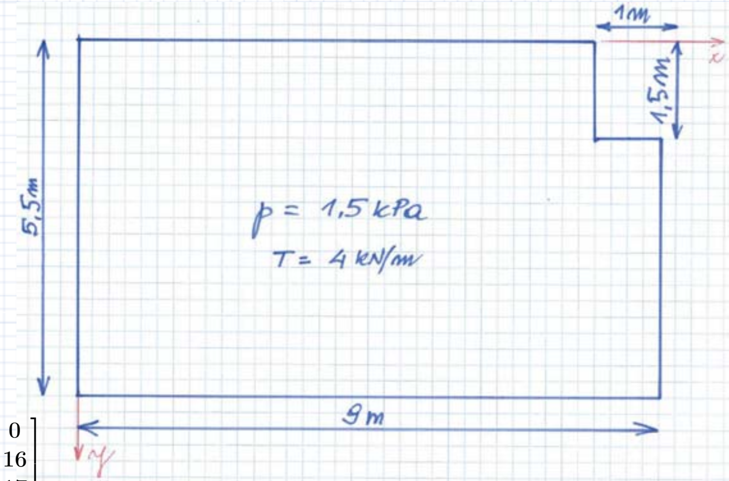
$i:=0..ny-2 \quad k:=1..nx-1 \quad N_{i+1,k}:=i\cdot(nx-1)+k$

N =

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	0
0	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	0
0	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	0
0	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	0
0	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	0
0	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	0
0	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	0
0	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	0
0	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	0
0	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

N =

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	0
0	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	0
0	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	0
0	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	0
0	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	0
0	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	0
0	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	0
0	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	0
0	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	0
0	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0



$$s:=\begin{bmatrix}0\\16\\17\\33\\34\\50\\51\end{bmatrix}$$ *<--- numery węzłów "brzegowych"*

Tworzenie macierzy alokacji obszarów

$Lw:=\mathrm{rows}(N)-1=11 \quad Lk:=\mathrm{cols}(N)-1=18 \quad w:=0..Lw-1 \quad k:=0..Lk-1$

$AL_{k+w\cdot Lk,0}:=N_{w,k}$ "i" $\quad AL_{k+w\cdot Lk,1}:=N_{w,k+1}$ "j" $\quad AL_{k+w\cdot Lk,2}:=N_{w+1,k+1}$ "k" $\quad AL_{k+w\cdot Lk,3}:=N_{w+1,k}$ "l"

Macierz alokacji, jej wiersze są wektorami ----> alokacji obszarów kontrolnych

AL =

	0	1	2	3
0	0	0	1	0
1	0	0	2	1
2	0	0	3	2
3	0	0	4	3
4	0	0	5	4
5	0	0	6	5
6	0	0	7	6
7	0	0	8	7
8	0	0	9	8
9	0	0	10	9
10	0	0	11	10
11	0	0	12	11
12	0	0	13	12
13	0	0	14	13
14	0	0	15	14
15	0	0	16	15
16	0	0	17	16
17	0	0	0	17
18	0	1	18	0
19	1	2	19	18
20	2	3	20	19
21	3	4	21	20
⋮				⋮
197				

$Lx:=9\cdot m \quad Ly:=5.5\ m \quad p0:=1.5\cdot kPa \quad T:=4\cdot\frac{kN}{m}$

$bx:=\frac{Lx}{Lk}=0.5\ m \quad by:=\frac{Ly}{Lw}=0.5\ m \quad A0:=bx\cdot by=0.25\ m^2 \quad f:=\frac{p0}{T}\cdot A0=9.3750\ cm$

Macierz geometryczna obszaru kontrolnego

$$\lambda := \frac{bx}{by} = 1 \qquad \kappa := \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} = 0$$

Macierz geometryczna obszaru prostokątnego, wszystkie obszary są jednakowe, więc wystarczy tylko jedna macierz G4

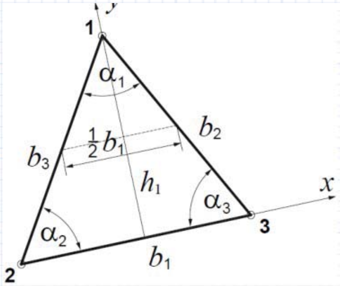
$$G4 := \frac{\lambda + \frac{1}{\lambda}}{8} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 1+2\ \kappa & 1 & 1-2\ \kappa \\ 1+2\ \kappa & -3 & 1-2\ \kappa & 1 \\ 1 & 1-2\ \kappa & -3 & 1+2\ \kappa \\ 1-2\ \kappa & 1 & 1+2\ \kappa & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.75 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & -0.75 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & -0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & -0.75 \end{bmatrix}$$

Macierz geometryczna obszaru kwadratowego po złożeniu 2 obszarów trójkątnych

$$G3 := \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Macierz geometryczna obszaru trójkątnego

$$Ge = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -[ctg(\alpha_2)+ctg(\alpha_3)] & ctg(\alpha_3) & ctg(\alpha_2) \\ ctg(\alpha_3) & -[ctg(\alpha_1)+ctg(\alpha_3)] & ctg(\alpha_1) \\ ctg(\alpha_2) & ctg(\alpha_1) & -[ctg(\alpha_1)+ctg(\alpha_2)] \end{bmatrix}$$

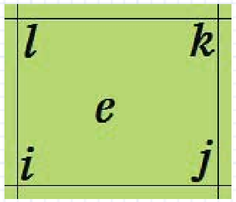


$Lo := \text{rows}(AL) - 1$ *Liczba obszarów* $Lo = 197$

$Lr := \max(AL) = 170$ *Liczba równań- liczba węzłów siatki*

$G1 := G4$ *Macierz geometryczna 1 "oczka" siatki*

$G_{Lr,Lr} := 0$ *Zerowa globalna macierz geometryczna*



Agregacja globalnej macierzy geometrycznej

$e := 0..Lo \qquad i := AL^{\langle 0 \rangle} \qquad j := AL^{\langle 1 \rangle} \qquad k := AL^{\langle 2 \rangle} \qquad l := AL^{\langle 3 \rangle}$

$$G_{i_e,i_e} := G_{i_e,i_e} + G1_{0,0} \qquad G_{i_e,j_e} := G_{i_e,j_e} + G1_{0,1} \qquad G_{i_e,k_e} := G_{i_e,k_e} + G1_{0,2} \qquad G_{i_e,l_e} := G_{i_e,l_e} + G1_{0,3}$$

$$G_{j_e,i_e} := G_{j_e,i_e} + G1_{1,0} \qquad G_{j_e,j_e} := G_{j_e,j_e} + G1_{1,1} \qquad G_{j_e,k_e} := G_{j_e,k_e} + G1_{1,2} \qquad G_{j_e,l_e} := G_{j_e,l_e} + G1_{1,3}$$

$$G_{k_e,i_e} := G_{k_e,i_e} + G1_{2,0} \qquad G_{k_e,j_e} := G_{k_e,j_e} + G1_{2,1} \qquad G_{k_e,k_e} := G_{k_e,k_e} + G1_{2,2} \qquad G_{k_e,l_e} := G_{k_e,l_e} + G1_{2,3}$$

$$G_{l_e,i_e} := G_{l_e,i_e} + G1_{3,0} \qquad G_{l_e,j_e} := G_{l_e,j_e} + G1_{3,1} \qquad G_{l_e,k_e} := G_{l_e,k_e} + G1_{3,2} \qquad G_{l_e,l_e} := G_{l_e,l_e} + G1_{3,3}$$

Globalna macierz geometryczna po agregacji

$$G=\begin{bmatrix}
-53 & 1.75 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1.75 & 1 & 0 & 0 & \\
1.75 & -3 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.25 & 0 & \\
1 & 0.5 & -3 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & \\
1 & 0 & 0.5 & -3 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & \\
1 & 0 & 0 & 0.5 & -3 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -3 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -3 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -3 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -3 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -3 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -3 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -3 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -3 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -3 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -3 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -3 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -3 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & \\
1.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -3 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \ddots
\end{bmatrix}$$

$r:=1..Lr$ $\qquad p_r:=-f$ $\qquad$ *- prawa strona układu równań*

Uwzględnienie warunków brzegowych

$$s=\begin{bmatrix}0\\16\\17\\33\\34\\50\\51\end{bmatrix}$$ *<--- numery węzłów "brzegowych"*

$r:=0..\text{rows}(s)-1$ $\qquad n:=0..\text{cols}(G)-1$ $\qquad G_{s_r,n}:=0$ $\qquad G_{s_r,s_r}:=1$ $\qquad p_{s_r}:=0\ \boldsymbol{m}$

Rozwiązanie układu równań $\qquad u:=\text{lsolve}(G,p)$

Przepisanie rozwiązania z wektora ***u*** *do macierzy dwuwymiarowej* ***U***

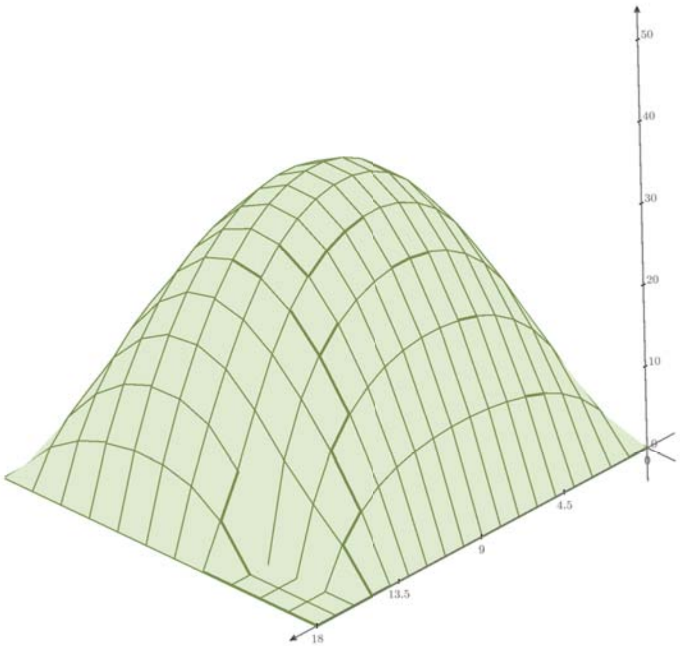
1. Dwuwymiarowa macierz przemieszczeń węzłów

$U_{ny,nx}:=0\ \boldsymbol{cm}$ $\qquad i:=1..ny-1$ $\qquad k:=1..nx-1$ $\qquad U_{i,k}:=u_{\left(N_{i,k}\right)}$

$$N=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 0\\
0 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 0\\
0 & 35 & 36 & 37 & 38 & 39 & 40 & 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 & 47 & 48 & 49 & 50 & 51 & 0\\
0 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 & 57 & 58 & 59 & 60 & 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 & 67 & 68 & 0\\
0 & 69 & 70 & 71 & 72 & 73 & 74 & 75 & 76 & 77 & 78 & 79 & 80 & 81 & 82 & 83 & 84 & 85 & 0\\
0 & 86 & 87 & 88 & 89 & 90 & 91 & 92 & 93 & 94 & 95 & 96 & 97 & 98 & 99 & 100 & 101 & 102 & 0\\
0 & 103 & 104 & 105 & 106 & 107 & 108 & 109 & 110 & 111 & 112 & 113 & 114 & 115 & 116 & 117 & 118 & 119 & 0\\
0 & 120 & 121 & 122 & 123 & 124 & 125 & 126 & 127 & 128 & 129 & 130 & 131 & 132 & 133 & 134 & 135 & 136 & 0\\
0 & 137 & 138 & 139 & 140 & 141 & 142 & 143 & 144 & 145 & 146 & 147 & 148 & 149 & 150 & 151 & 152 & 153 & 0\\
0 & 154 & 155 & 156 & 157 & 158 & 159 & 160 & 161 & 162 & 163 & 164 & 165 & 166 & 167 & 168 & 169 & 170 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$U=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 13.792 & 22.526 & 28.551 & 32.811 & 35.809 & 37.849 & 39.118 & 39.721 & 39.699 & 39.02 & 37.571 & 35.117 & \\ 0 & 22.393 & 38.162 & 49.405 & 57.464 & 63.174 & 67.075 & 69.509 & 70.678 & 70.659 & 69.406 & 66.727 & 62.223 & \\ 0 & 28.019 & 48.742 & 63.954 & 75.023 & 82.929 & 88.357 & 91.762 & 93.418 & 93.443 & 91.795 & 88.256 & 82.379 & \\ 0 & 31.48 & 55.341 & 73.173 & 86.295 & 95.734 & 102.243 & 106.349 & 108.378 & 108.482 & 106.644 & 102.669 & 96.159 & \\ 0 & 33.137 & 58.521 & 77.65 & 91.809 & 102.034 & 109.11 & 113.594 & 115.846 & 116.046 & 114.207 & 110.182 & 103.666 & \\ 0 & 33.138 & 58.524 & 77.655 & 91.82 & 102.053 & 109.143 & 113.653 & 115.951 & 116.233 & 114.54 & 110.772 & 104.708 & \\ 0 & 31.483 & 55.349 & 73.188 & 86.323 & 95.783 & 102.332 & 106.507 & 108.66 & 108.985 & 107.539 & 104.26 & 98.978 & \\ 0 & 28.024 & 48.752 & 63.974 & 75.059 & 82.994 & 88.473 & 91.969 & 93.788 & 94.102 & 92.97 & 90.353 & 86.117 & \\ 0 & 22.397 & 38.172 & 49.423 & 57.497 & 63.234 & 67.181 & 69.699 & 71.018 & 71.266 & 70.49 & 68.666 & 65.699 & \\ 0 & 13.794 & 22.531 & 28.562 & 32.83 & 35.844 & 37.912 & 39.231 & 39.923 & 40.06 & 39.666 & 38.729 & 37.199 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \end{bmatrix} cm$$

$$u=\begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \\ 16 \\ 17 \\ 18 \\ 19 \\ 20 \\ \vdots \\ 170 \end{array}\begin{bmatrix} 3.172\cdot 10^{-15} \\ 13.792 \\ 22.526 \\ 28.551 \\ 32.811 \\ 35.809 \\ 37.849 \\ 39.118 \\ 39.721 \\ 39.699 \\ 39.02 \\ 37.571 \\ 35.117 \\ 31.216 \\ 25.076 \\ 15.425 \\ 0 \\ 0 \\ 22.393 \\ 38.162 \\ 49.405 \\ \vdots \\ \end{bmatrix} cm$$



$0.3\cdot U\ (cm)$

$$\max(u)=116.233\ cm$$

$Max\_tr = 115.541\ cm$

$Max\_pr = 116.233\ cm$