

Obliczenie ugięcia membrany metodą obszarów kontrolnych (objętości skończonych -MOS) -
rozwiązanie równania Poissona

Obliczyć przemieszczenie sześciokątnej membrany o boku $5 \cdot b$, opartej na obwodzie,
obciążonej stałym ciśnieniem p_0 i rozciąganej stałym napięciem T .
Środek membrany ma wymuszone przemieszczenie równe h .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y) = 0$$

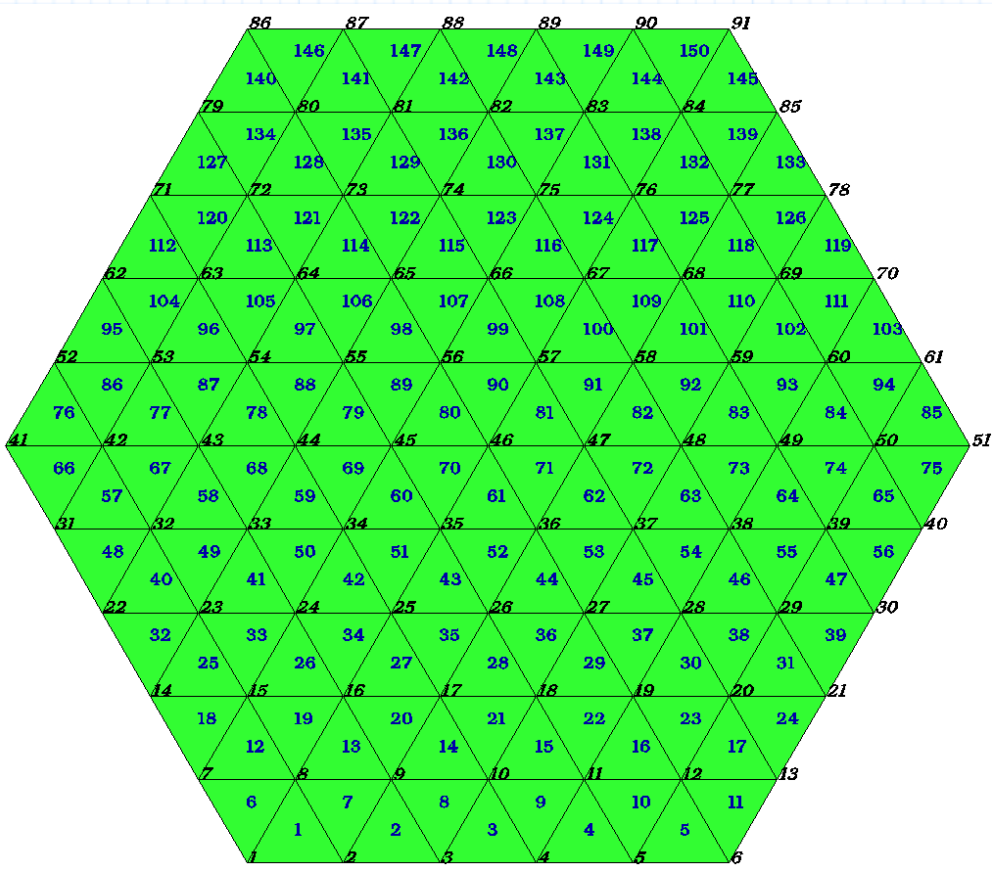
ORIGIN := 1

Macierz alokacji, jej wiersze są wektorami
alokacji obszarów kontrolnych

AL := READTEXT("AL.dat")

1	2	8
2	3	9
3	4	10
4	5	11
5	6	12
7	1	8
8	2	9
9	3	10
10	4	11
11	5	12
12	6	13
7	8	15
8	9	16
9	10	17
10	11	18
11	12	19
12	13	20
14	7	15
15	8	16
16	9	17
17	10	18
18	11	19
19	12	20
20	13	21
14	15	23
15	16	24
16	17	25
17	18	26
18	19	27
19	20	28
20	21	29
22	14	23
23	15	24
24	16	25
25	17	26
⋮		

Numery obszarów i węzłów



Numery węzłów brzegowych

$i := 1..6$ $s_i := i$ $n := \text{rows}(s) + 1$
 $s_n := 7$ $i := 0..3$ $s_{n+i+1} := s_{n+i} + 7 + i$ $n := \text{rows}(s) + 1$
 $s_n := 13$ $i := 0..3$ $s_{n+i+1} := s_{n+i} + 8 + i$ $n := \text{rows}(s) + 1$
 $s_n := 52$ $i := 0..2$ $s_{n+i+1} := s_{n+i} + 10 - i$ $n := \text{rows}(s) + 1$
 $s_n := 61$ $i := 0..2$ $s_{n+i+1} := s_{n+i} + 9 - i$ $n := \text{rows}(s) + 1$
 $i := 0..5$ $s_{n+i} := 86 + i$ $n := \text{rows}(s) + 1$

Numer węzła środkowego -----> $ns := 46$

$s_n := ns$

1
2
3
4
5
6
7
14
22
31
41
13
21
30
40
51
52
62
71
79
61
70
78
85
86
87
⋮

$b := 1 \text{ m}$

$p_0 := 1 \cdot \text{kPa}$

$T := 5 \cdot \frac{\text{kN}}{\text{m}}$

$A1 := \frac{b^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$

$A0 := 2 \cdot A1 = 0.866 \text{ m}^2$

$f := \frac{p_0}{T} \cdot A0 = 0.1732 \text{ m}$

$h := 80 \text{ cm}$

<----- przemieszczenie węzła środkowego

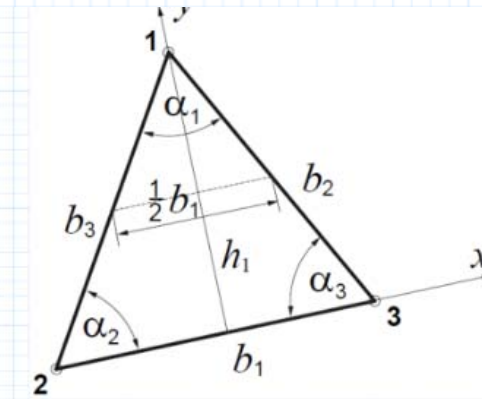
Macierz geometryczna trójkątnego "oczka" siatki.
Ponieważ wszystkie "oczka" są jednakowe to wystarczy utworzyć tylko jedną macierz G_1

$$\alpha = 60^\circ \quad \text{ctg}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$G1 := \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.57735 & 0.28868 & 0.28868 \\ 0.28868 & -0.57735 & 0.28868 \\ 0.28868 & 0.28868 & -0.57735 \end{bmatrix}$$

Macierz geometryczna obszaru trójkątnego

$$Ge = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -[ctg(\alpha_2) + ctg(\alpha_3)] & ctg(\alpha_3) & ctg(\alpha_2) \\ ctg(\alpha_3) & -[ctg(\alpha_1) + ctg(\alpha_3)] & ctg(\alpha_1) \\ ctg(\alpha_2) & ctg(\alpha_1) & -[ctg(\alpha_1) + ctg(\alpha_2)] \end{bmatrix}$$



$$Lo := \text{rows}(AL) = 150$$

Liczba obszarów

$$Lr := \max(AL) = 91$$

Liczba równań- liczba węzłów siatki

$$G_{Lr, Lr} := 0$$

Zerowa globalna macierz geometryczna

Agregacja globalnej macierzy geometrycznej

$$e := 1..Lo \quad j := AL^{\langle 1 \rangle} \quad k := AL^{\langle 2 \rangle} \quad l := AL^{\langle 3 \rangle}$$

$$G_{j_e, j_e}^j := G_{j_e, j_e}^j + G1_{1,1} \quad G_{j_e, k_e}^j := G_{j_e, k_e}^j + G1_{1,2} \quad G_{j_e, l_e}^j := G_{j_e, l_e}^j + G1_{1,3}$$

$$G_{k_e, j_e} := G_{k_e, j_e} + G1_{2,1} \quad G_{k_e, k_e} := G_{k_e, k_e} + G1_{2,2} \quad G_{k_e, l_e} := G_{k_e, l_e} + G1_{2,3}$$

$$G_{l_e, j_e} := G_{l_e, j_e} + G1_{3,1} \quad G_{l_e, k_e} := G_{l_e, k_e} + G1_{3,2} \quad G_{l_e, l_e} := G_{l_e, l_e} + G1_{3,3}$$

Prawa strona układu równań

$$r := 1 \dots Lr \qquad p_r := -f$$

Globalna macierz geometryczna po agregacji

$G =$	-1.155	0.289	0	0	0	0	0.289	0.577	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0.289	-1.732	0.289	0	0	0	0	0.577	0.577	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0.289	-1.732	0.289	0	0	0	0	0.577	0.577	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0.289	-1.732	0.289	0	0	0	0	0.577	0.577	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0.289	-1.732	0.289	0	0	0	0	0.577	0.577	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0.289	-1.155	0	0	0	0	0	0.577	0.289	0	0	0	0	0	0
	0.289	0	0	0	0	0	-1.732	0.577	0	0	0	0	0	0.289	0.577	0	0	0	0
	0.577	0.577	0	0	0	0	0.577	-3.464	0.577	0	0	0	0	0	0.577	0.577	0	0	0
	0	0.577	0.577	0	0	0	0	0.577	-3.464	0.577	0	0	0	0	0	0.577	0.577	0	0
	0	0	0.577	0.577	0	0	0	0	0.577	-3.464	0.577	0	0	0	0	0	0.577	0.577	0
	0	0	0	0.577	0.577	0	0	0	0	0.577	-3.464	0.577	0	0	0	0	0	0.577	0.577
	0	0	0	0	0.577	0.577	0	0	0	0	0.577	-3.464	0.577	0	0	0	0	0	0.577
	0	0	0	0	0	0.289	0	0	0	0	0	0.577	-1.732	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0.289	0	0	0	0	0	0	-1.732	0.577	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.577	0.577	0	0	0	0	0	0.577	-3.464	0.577	0	0	0	

[illegible]

Uzględnienie warunków brzegowych, ponieważ wszystkie węzły podporowe mają numer "0" modyfikujemy tylko równanie nr 0

$i := 1 \dots \text{rows}(s)$

$n := 1 \dots \text{cols}(G)$

$G_{s_i, n} := 0$

$G_{s_i, s_i} := 1$

$p_{s_i} := 0 \text{ } m$

$p_{ns} := h$

Rozwiązanie układu równań $u := \text{lsolve}(G, p)$

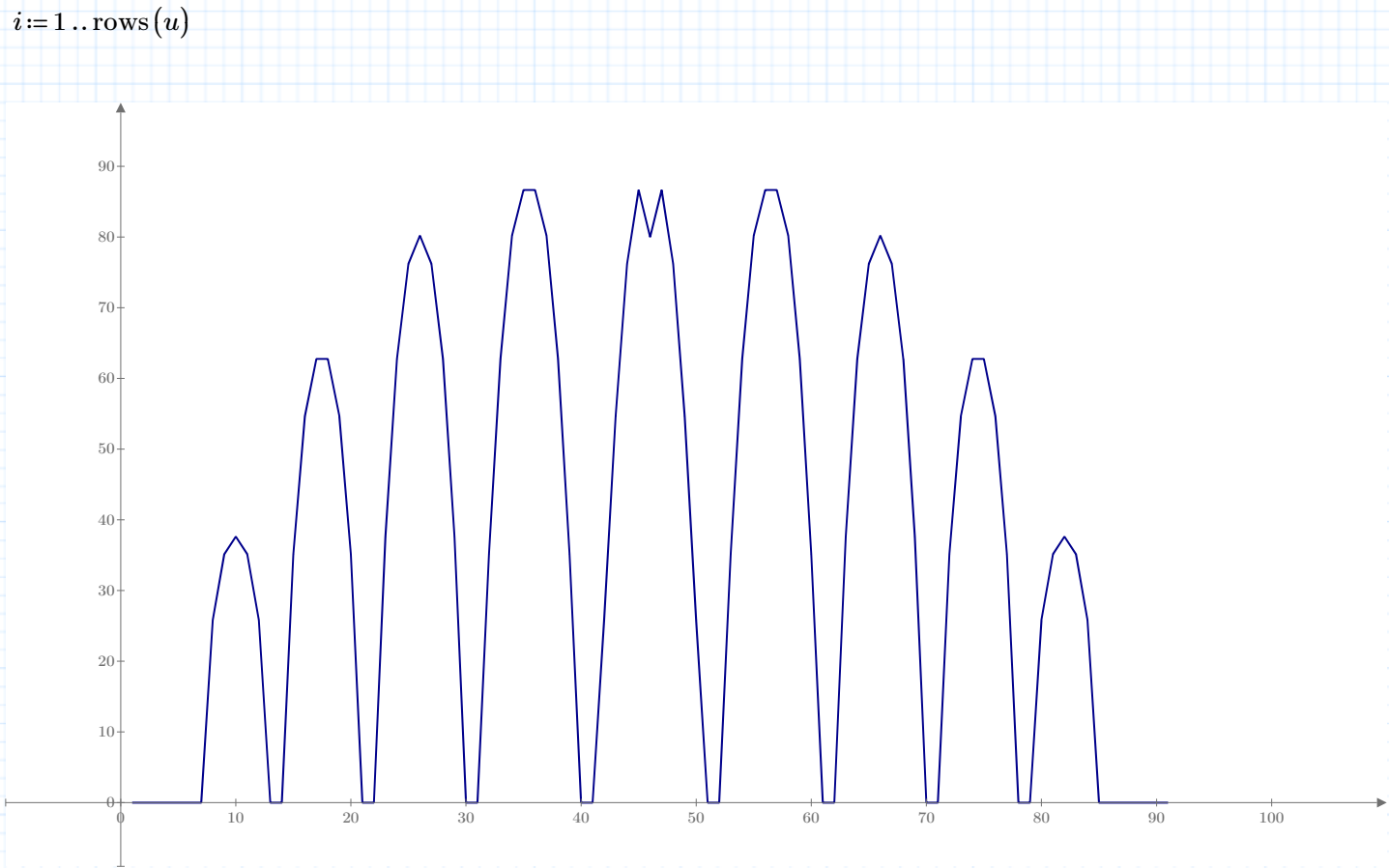
Wykres przemieszczeń węzłów siatki

$u =$

$i := 1 \dots \text{rows}(u)$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 25.823 \\ 35.147 \\ 37.64 \\ 35.147 \\ 25.823 \\ 0 \\ 0 \\ 35.147 \\ 54.646 \\ 62.773 \\ 62.773 \\ 54.646 \\ 35.147 \\ 0 \\ 0 \\ 37.64 \\ 62.773 \\ 76.214 \\ 80.216 \\ \vdots \end{bmatrix}$

cm



$\max(u) = 86.662 \text{ } cm$