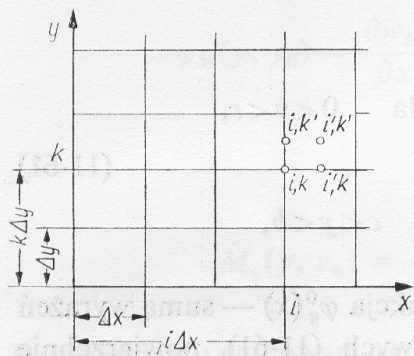


12. Zastosowania równań różnicowych w teorii płyt

12.1. Związki między pochodnymi a ilorazami różnicowymi

Najbardziej uniwersalnym, aczkolwiek i jednym z najprymitywniejszych sposobów rozwiązywania równań różniczkowych przy określonych warunkach brzegowych jest sposób polegający na zastępowaniu pochodnych występujących zarówno w równaniu różniczkowym, jak i w warunkach brzegowych przez odpowiednie ilorazy różnicowe. Dochodzi się w ten sposób do skończonego układu algebraicznych równań liniowych o dość prostej budowie.



Rys. 12-1

$\Delta x \cdot \Delta y$ (rys. 12-1). Rzędne powierzchni ugięcia płyty w punktach leżących na przecięciu się dwóch linii podziału oznaczmy symbolem

$$w_{i,k} = w(i\Delta x, k\Delta y). \quad (12-1)$$

Wprowadzimy ponadto następujące oznaczenia:

$$w_{i',k} = w\left(\frac{2i+1}{2}\Delta x, k\Delta y\right), \quad w_{i,k'} = w\left(i\Delta x, \frac{2k+1}{2}\Delta y\right), \quad (12-2)$$

$$w_{i',k'} = w\left(\frac{2i+1}{2}\Delta x, \frac{2k+1}{2}\Delta y\right).$$

Pierwsze pochodne powierzchni ugięcia w poszczególnych punktach płyty określimy następującymi wzorami:

$$\frac{\partial w}{\partial x}(i\Delta x, k\Delta y) \approx \left[\frac{\Delta w}{\Delta x} \right]_{i,k} = \frac{w_{i+1,k} - w_{i-1,k}}{2\Delta x}, \quad \left[\frac{\Delta w}{\Delta y} \right]_{i,k} = \frac{w_{i,k+1} - w_{i,k-1}}{2\Delta y}, \quad (12-3)$$

$$\left[\frac{\Delta w}{\Delta x} \right]_{i',k} = \frac{w_{i+1,k} - w_{i,k}}{\Delta x}, \quad \left[\frac{\Delta w}{\Delta y} \right]_{i,k'} = \frac{w_{i,k+1} - w_{i,k}}{\Delta y}, \quad (12-4)$$

$$\left[\frac{\Delta w}{\Delta x} \right]_{i',k'} = \frac{w_{i+1,k} - w_{i,k} + w_{i+1,k+1} - w_{i,k+1}}{2\Delta x}, \quad (12-5)$$

$$\left[\frac{\Delta w}{\Delta y} \right]_{i',k'} = \frac{w_{i,k+1} - w_{i,k} + w_{i+1,k+1} - w_{i+1,k}}{2\Delta y}.$$

W tym miejscu wypada zwrócić uwagę na to, że wyrażenie pierwszych pochodnych funkcji w w punkcie i, k wzorami (12-4) spotykane w niektórych pracach¹⁾ jest niesłuszne. Rozumowanie autorów tych prac opiera się na analogii zachodzącej między pierwszym ilorazem różnicowym a definicją pierwszej pochodnej

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (12-6)$$

Jak wiadomo jednak, jeżeli funkcja $f(x)$ ma w rozpatrywanym punkcie pochodną, to iloraz różnicowy (12-6) powinien mieć tę samą granicę zarówno wtedy, gdy przyrost Δx zmierza do zera od strony wartości dodatnich, jak i wówczas, gdy zmierza do zera od strony przeciwnej

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x}. \quad (12-7)$$

A zatem przechodząc z wielkością przyrostu Δx do granicy, możemy napisać, że jest

$$\left[\frac{\partial w}{\partial x} \right]_{i,k} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{w_{i+1,k} - w_{i,k}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{w_{i,k} - w_{i-1,k}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{w_{i+1,k} - w_{i-1,k}}{2\Delta x}. \quad (12-8)$$

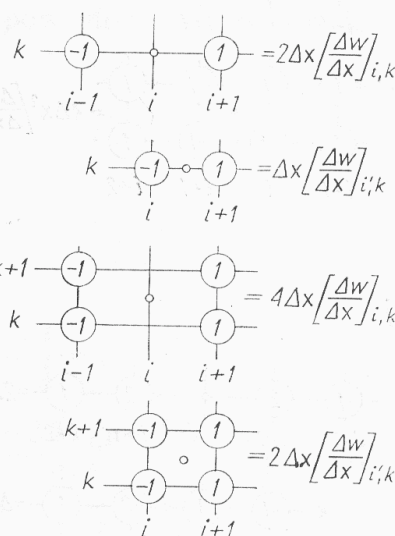
Z równości (12-8) nie wynika jednak wcale, że poszczególne ilorazy różnicowe występujące pod znakiem $\lim$, dla skończonych wartości Δx są sobie równe. Przeciwnie, różnią się one między sobą o wielkości skończone, których zaniedbywanie jest nieuzasadnione.

Dalsze pochodne powierzchni ugięcia zastąpimy ilorazami różnicowymi w następujący sposób:

$$\left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right]_{i,k} = \frac{\left[\frac{\Delta w}{\Delta x} \right]_{i',k} - \left[\frac{\Delta w}{\Delta x} \right]_{i'-1,k}}{\Delta x} = \frac{w_{i+1,k} - 2w_{i,k} + w_{i-1,k}}{\Delta x^2},$$

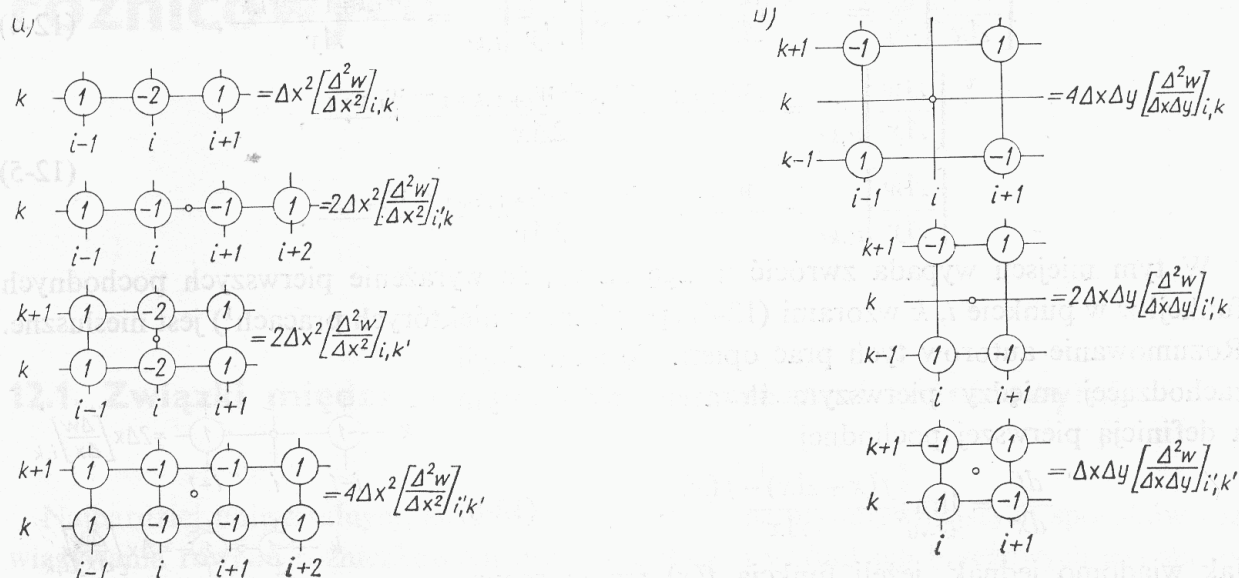
$$\left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right]_{i',k} = \frac{\left[\frac{\Delta w}{\Delta x} \right]_{i+1,k} - \left[\frac{\Delta w}{\Delta x} \right]_{i,k}}{\Delta x} = \frac{w_{i+2,k} - w_{i+1,k} - w_{i,k} + w_{i-1,k}}{2\Delta x^2}, \quad (12-9)$$

$$\left[\frac{\Delta^2 w}{\Delta x^2} \right]_{i',k'} = \frac{w_{i+2,k+1} - w_{i+1,k+1} - w_{i,k+1} + w_{i-1,k+1} + w_{i+2,k} - w_{i+1,k} - w_{i,k} + w_{i-1,k}}{4\Delta x^2}.$$

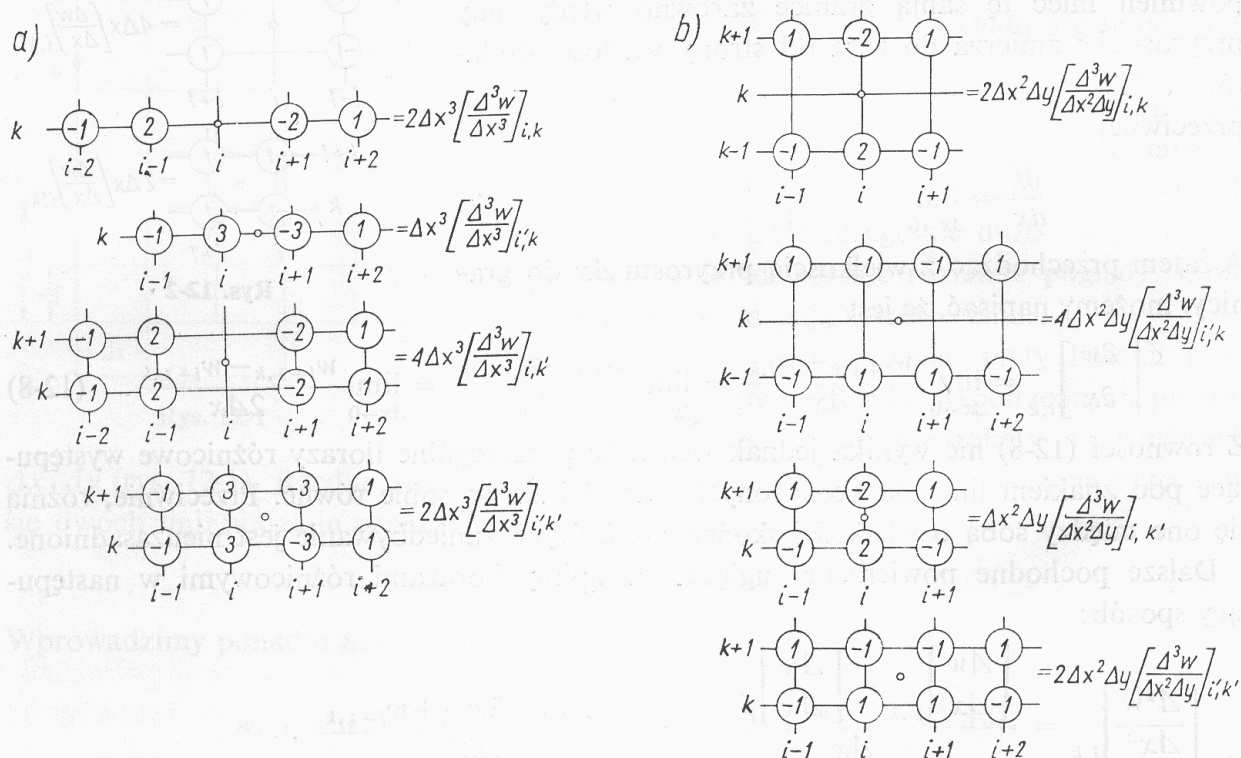


Rys. 12-2

¹⁾ Np. w [18] na str. 323 wyrażono błędnie pierwszą różnicę, ale już na str. 328 te same wielkości zostały zdefiniowane w sposób prawidłowy.



Rys. 12-3



Rys. 12-4

Gwoli zwiększenia przejrzystości pochodne pierwszego rzędu zapisano schematycznie na rys. 12-2, pochodne drugiego rzędu — na rys. 12-3, a trzeciego rzędu — na rys. 12-4.

Co się tyczy samych ugięć punktów pośrednich i', k i i, k' , to stosując interpolację liniową można je wyrazić następująco:

$$w_{i',k} = \frac{w_{i,k} + w_{i+1,k}}{2}, \quad w_{i,k'} = \frac{w_{i,k} + w_{i,k+1}}{2}. \quad (12-10)$$

Podobnie, ugięcie punktu i' , k' wyrazimy wzorem

$$w_{i',k'} = \frac{w_{i,k} + w_{i+1,k} + w_{i,k+1} + w_{i+1,k+1}}{4}. \quad (12-11)$$

12.2. Równania różnicowe powierzchni ugięcia

Podstawiając do równania różniczkowego (2-130) odpowiednie ilorazy różnicowe, otrzymujemy następujące równanie różnicowe:

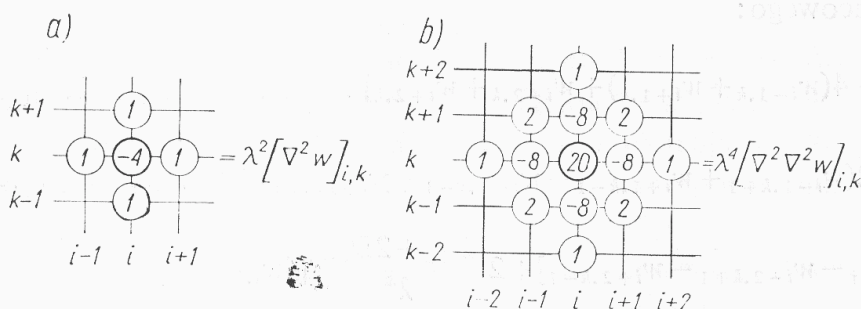
$$\begin{aligned} D \left\{ \frac{w_{i-2,k} - 4w_{i-1,k} + 6w_{i,k} - 4w_{i+1,k} + w_{i+2,k}}{\Delta x^4} + \right. \\ \left. + \frac{2}{\Delta x^2 \Delta y^2} [4w_{i,k} - 2(w_{i-1,k} + w_{i,k-1} + w_{i+1,k} + w_{i,k+1}) + w_{i-1,k-1} + w_{i-1,k+1} + w_{i+1,k-1} + \right. \\ \left. + w_{i+1,k+1}] + \frac{w_{i,k-2} - 4w_{i,k-1} + 6w_{i,k} - 4w_{i,k+1} + w_{i,k+2}}{\Delta y^4} \right\} = \\ = q_{i,k} - (1-\nu) \frac{D\alpha_t}{h} \left(\frac{\Delta T_{i-1,k} - 2\Delta T_{i,k} + \Delta T_{i+1,k}}{\Delta x^2} + \frac{\Delta T_{i,k-1} - 2\Delta T_{i,k} + \Delta T_{i,k+1}}{\Delta y^2} \right). \quad (12-12) \end{aligned}$$

Równanie to znacznie się upraszcza, gdy odległości między liniami tworzącymi siatkę są jednakowe w obu kierunkach:

$$\Delta x = \Delta y = \lambda. \quad (12-13)$$

Równanie (12-12) po pomnożeniu przez $\frac{\lambda^4}{D}$ przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} 20w_{i,k} - 8(w_{i-1,k} + w_{i,k-1} + w_{i+1,k} + w_{i,k+1}) + \\ + 2(w_{i-1,k-1} + w_{i-1,k+1} + w_{i+1,k-1} + w_{i+1,k+1}) - (w_{i-2,k} + w_{i,k-2} + w_{i,k+2} + w_{i+2,k}) = \\ = \frac{\lambda^4}{D} q_{i,k} - (1-\nu) \frac{\alpha_t \lambda^2}{h} [-4\Delta T_{i,k} + (\Delta T_{i-1,k} + \Delta T_{i,k-1} + \Delta T_{i,k+1} + \Delta T_{i+1,k})]. \quad (12-14) \end{aligned}$$



Rys. 12-5

Rysunek 12-5 w schematyczny sposób pokazuje budowę operatorów *Laplace'a* w przypadku podziału płyty na elementy kwadratowe o wymiarach danych wzorem (12-13). W dalszym ciągu, aby nie komplikować zapisu, wszystkie zależności wyprowadzimy opierając się na założeniu (12-13).

Gdy płyta spoczywa na dwuparametrowym podłożu sprężystym, wówczas, zgodnie z równaniem różniczkowym (3-8), po lewej stronie równania różnicowego dochodzą następujące wyrażenia

$$-\frac{K_t h^2 \lambda^2}{4D} (-4w_{i,k} + w_{i-1,k} + w_{i,k-1} + w_{i,k+1} + w_{i+1,k}) + \frac{K_z \lambda^4}{D} w_{i,k}. \quad (12-15)$$

Jeżeli współczynniki podłoża K_z i K_t są funkcjami miejsca, czyli w przypadku podłoża niejednorodnego zamiast (12-15) piszemy

$$\begin{aligned} & -\frac{h^2 \lambda^2}{4D} \left[K_{i,k}^t (-4w_{i,k} + w_{i-1,k} + w_{i,k-1} + w_{i,k+1} + w_{i+1,k}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} (K_{i+1,k}^t - K_{i-1,k}^t) (w_{i+1,k} - w_{i-1,k}) + \frac{1}{4} (K_{i,k+1}^t - K_{i,k-1}^t) (w_{i,k+1} - w_{i,k-1}) \right] + \\ & + \frac{\lambda^4}{D} K_{i,k}^z w_{i,k}, \end{aligned} \quad (12-16)$$

gdzie

$$K_{i,k}^t = K_t(i\lambda, k\lambda), \quad K_{i,k}^z = K_z(i\lambda, k\lambda). \quad (12-17)$$

Uwzględnienie dużych sił N_x , N_y i N_{xy} wymaga uzupełnienia lewej strony równania różnicowego (12-14), zgodnie z (3-15), następującymi członami:

$$\begin{aligned} & -\frac{N_{i,k}^x \lambda^2}{D} (w_{i-1,k} - 2w_{i,k} + w_{i+1,k}) - \\ & -\frac{N_{i,k}^{xy} \lambda^2}{2D} (w_{i-1,k-1} + w_{i+1,k+1} - w_{i-1,k+1} - w_{i+1,k-1}) - \\ & -\frac{N_{i,k}^y \lambda^2}{D} (w_{i,k-1} - 2w_{i,k} + w_{i,k+1}) + \frac{p_{i,k}^x \lambda^3}{2D} (w_{i+1,k} - w_{i-1,k}) + \\ & + \frac{p_{i,k}^y \lambda^3}{2D} (w_{i,k+1} - w_{i,k-1}). \end{aligned} \quad (12-18)$$

Równanie różniczkowe płyty anizotropowej (4-14) przyjmuje postać następującego równania różnicowego:

$$\begin{aligned} & \frac{D_{11}}{\lambda^4} [6w_{i,k} - 4(w_{i-1,k} + w_{i+1,k}) + w_{i-2,k} + w_{i+2,k}] + \\ & + \frac{D_{16}}{\lambda^4} [2(w_{i-1,k+1} + w_{i+1,k-1} - w_{i-1,k-1} - w_{i+1,k+1}) + w_{i-2,k-1} + \\ & + w_{i+2,k+1} - w_{i-2,k+1} - w_{i+2,k-1}] + 2 \frac{D_{12} + 2D_{66}}{\lambda^4} [4w_{i,k} - \\ & - 2(w_{i-1,k} + w_{i,k-1} + w_{i,k+1} + w_{i+1,k}) + w_{i-1,k-1} + w_{i-1,k+1} + w_{i+1,k-1} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + w_{i+1,k+1}] + \frac{D_{26}}{\lambda^4} [2(w_{i-1,k+1} + w_{i+1,k-1} - w_{i-1,k-1} - w_{i+1,k+1}) + \\
& + w_{i-1,k-2} + w_{i+1,k+2} - w_{i-1,k+2} - w_{i+1,k-2}] + \\
& + \frac{D_{22}}{\lambda^4} [6w_{i,k} - 4(w_{i,k-1} + w_{i,k+1}) + w_{i,k-2} + w_{i,k+2}] = \\
& = q_{i,k} - (D_{11}\alpha_x + D_{12}\alpha_y + D_{16}\alpha_{xy}) \frac{1}{h\lambda^2} (\Delta T_{i-1,k} - 2\Delta T_{i,k} + \Delta T_{i+1,k}) - \\
& - (D_{61}\alpha_x + D_{62}\alpha_y + D_{66}\alpha_{xy}) \frac{1}{2h\lambda^2} (\Delta T_{i-1,k-1} + \Delta T_{i+1,k+1} - \Delta T_{i-1,k+1} - \\
& - \Delta T_{i+1,k-1}) - (D_{21}\alpha_x + D_{22}\alpha_y + D_{26}\alpha_{xy}) \frac{1}{h\lambda^2} (\Delta T_{i,k-1} - 2\Delta T_{i,k} + \Delta T_{i,k+1}). \quad (12-19)
\end{aligned}$$

Wreszcie w przypadku płyty izotropowej o zmiennej sztywności $D(x, y)$ i stałej wartości ν równanie różniczkowe (5-85) zastępujemy równaniem różnicowym, które, przy pominięciu wpływu temperatury, ma następującą budowę:

$$\begin{aligned}
& [8(1+\nu)D_{i,k} + (3-2\nu)(D_{i-1,k} + D_{i,k-1} + D_{i,k+1} + D_{i+1,k})]w_{i,k} - \\
& - [4D_{i-1,k} + 2(1+\nu)D_{i,k} + (1-\nu)(D_{i,k-1} + D_{i,k+1})]w_{i-1,k} - \\
& - [4D_{i,k-1} + 2(1+\nu)D_{i,k} + (1-\nu)(D_{i-1,k} + D_{i+1,k})]w_{i,k-1} - \\
& - [4D_{i,k+1} + 2(1+\nu)D_{i,k} + (1-\nu)(D_{i-1,k} + D_{i+1,k})]w_{i,k+1} - \\
& - [4D_{i+1,k} + 2(1+\nu)D_{i,k} + (1-\nu)(D_{i,k-1} + D_{i,k+1})]w_{i+1,k} + \\
& + (D_{i-1,k} + D_{i,k-1})w_{i-1,k-1} + (D_{i-1,k} + D_{i,k+1})w_{i-1,k+1} + (D_{i+1,k} + \\
& + D_{i,k-1})w_{i+1,k-1} + (D_{i+1,k} + D_{i,k+1})w_{i+1,k+1} + D_{i-1,k}w_{i-2,k} + \\
& + D_{i,k-1}w_{i,k-2} + D_{i,k+1}w_{i,k+2} + D_{i+1,k}w_{i+2,k} + \\
& + \frac{1-\nu}{8}(D_{i-1,k-1} + D_{i+1,k+1} - D_{i-1,k+1} - D_{i+1,k-1})(w_{i-1,k-1} + w_{i+1,k+1} - \\
& - w_{i-1,k+1} - w_{i+1,k-1}) = q_{ik}\lambda^4. \quad (12-20)
\end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że w przypadku szczególnym, gdy jest $D_{i,k} = D$, równanie (12-20) przyjmuje postać (12-14).

12.3. Warunki brzegowe

Bardzo istotną sprawą w przypadku stosowania metody różnic skończonych jest prawidłowe sformułowanie warunków brzegowych. Dokładność wyników w dużej mierze zależy bowiem od warunków brzegowych. Tymczasem okazuje się, że problem odpowiedniego sformułowania tych warunków nastęrcza czasem sporo trudności, z którymi niejednokrotnie autorzy nie potrafia się uporać ([171, 172]).

Rozróżniać będziemy dwojako sformułowane warunki brzegowe. Postać równań wyrażających te warunki zależeć będzie od tego, czy krawędź płyty leży na linii podziału (rys.

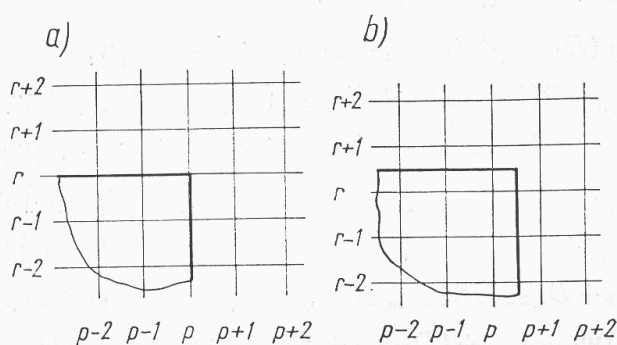
12-6a), czy też pomiędzy tymi liniami (rys. 12-6b). Najpierw zajmiemy się przypadkiem pierwszym.

Na brzegu płyty mogą być dane: ugięcie, kąt nachylenia powierzchni, moment zginający lub zastępcza siła poprzeczna. Np. na krawędzi p w punkcie p, k niech będą dane: $w_{p,k}$, $\varphi_{p,k}$, $M_{p,k}$ lub $V_{p,k}$. Wszystkie te wielkości wyraża się za pomocą ugięć punktów leżących w obszarze płyty oraz poza tym obszarem:

$$\varphi_{p,k} = \frac{1}{2\lambda} (w_{p+1,k} - w_{p-1,k}),$$

$$M_{p,k} = -\frac{D}{\lambda^2} [w_{p-1,k} - 2w_{p,k} + w_{p+1,k} + \nu(w_{p,k-1} - 2w_{p,k} + w_{p,k+1})], \quad (12-21)$$

$$V_{p,k} = -\frac{D}{2\lambda^3} [-w_{p-2,k} + 2w_{p-1,k} - 2w_{p+1,k} + w_{p+2,k} + (2-\nu)(-w_{p-1,k-1} + 2w_{p-1,k} - w_{p-1,k+1} + w_{p+1,k-1} - 2w_{p+1,k} + w_{p+1,k+1})].$$



Rys. 12-6

Ponadto w narożniku p, r może działać siła skupiona, której wielkość na podstawie (2-158) obliczymy ze wzoru:

$$R_{p,r} = \frac{D}{2} \frac{1-\nu}{\lambda^2} (w_{p+1,r+1} + w_{p-1,r-1} - w_{p+1,r-1} - w_{p-1,r+1}). \quad (12-22)$$

W szczególności, na brzegu swobodnie podpartym jest:

$$w_{p,k} = 0, \quad M_{p,k} = 0, \quad \text{czyli} \quad w_{p+1,k} = -w_{p-1,k}, \quad (12-23)$$

a na krawędzi utwardzonej mamy:

$$w_{p,k} = 0, \quad \varphi_{p,k} = 0, \quad \text{czyli} \quad w_{p+1,k} = w_{p-1,k}. \quad (12-24)$$

Bardziej skomplikowane są warunki na brzegu swobodnym. Z przyrównania do zera momentu $M_{p,k}$ i siły $V_{p,k}$ wynikają następujące zależności:

$$w_{p+1,k} = -w_{p-1,k} + 2(1+\nu)w_{p,k} - \nu(w_{p,k-1} + w_{p,k+1}), \quad (12-25)$$

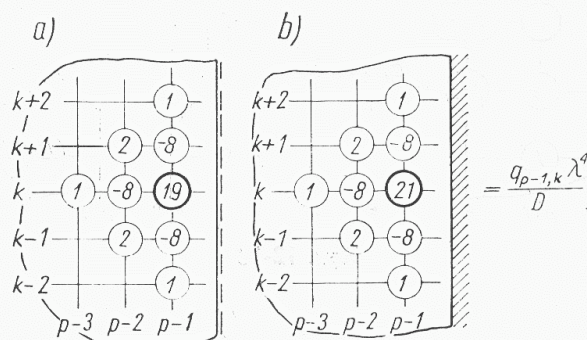
$$w_{p+2,k} = w_{p-2,k} - 4(3-\nu)w_{p-1,k} + 6(2+2\nu-\nu^2)w_{p,k} + 2(2-\nu)(w_{p-1,k-1} + w_{p-1,k+1}) - 4(1+2\nu-\nu^2)(w_{p,k-1} + w_{p,k+1}) + \nu(2-\nu)(w_{p,k-2} + w_{p,k+2}). \quad (12-26)$$

Jeżeli narożnik p, r jest podparty, mamy oczywiście

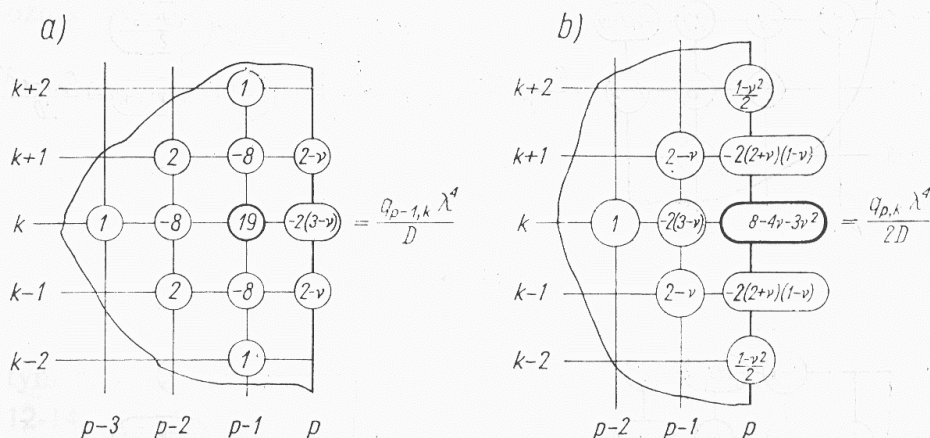
$$w_{p,r} = 0. \quad (12-27)$$

W przypadku zaś narożnika swobodnego, na podstawie (12-22), (12-25) i (12-26), otrzymujemy

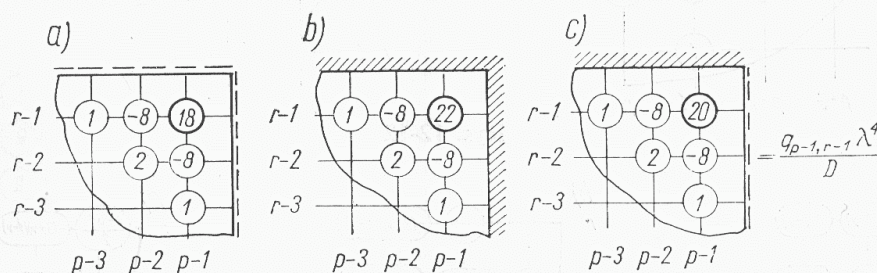
$$\begin{aligned} w_{p+1,r+1} &= w_{p+1,r-1} + w_{p-1,r+1} - w_{p-1,r-1} = \\ &= -3w_{p-1,r-1} + 2(1+\nu)(w_{p-1,r} + w_{p,r-1}) - \nu(w_{p-2,r} + 2w_{p,r} + w_{p,r-2}). \end{aligned} \quad (12-28)$$



Rys. 12-7



Rys. 12-8

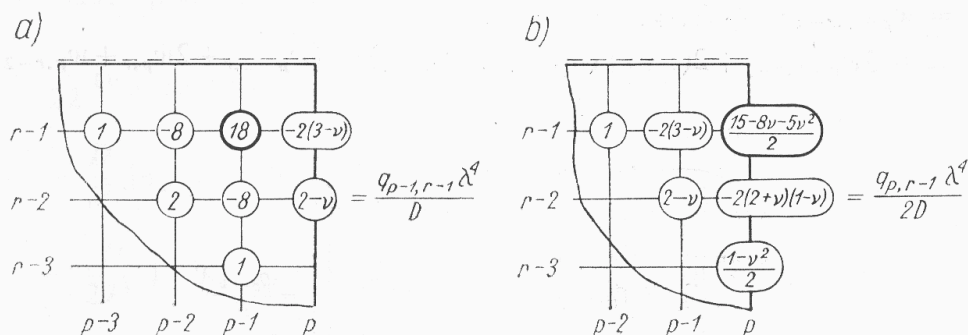


Rys. 12-9

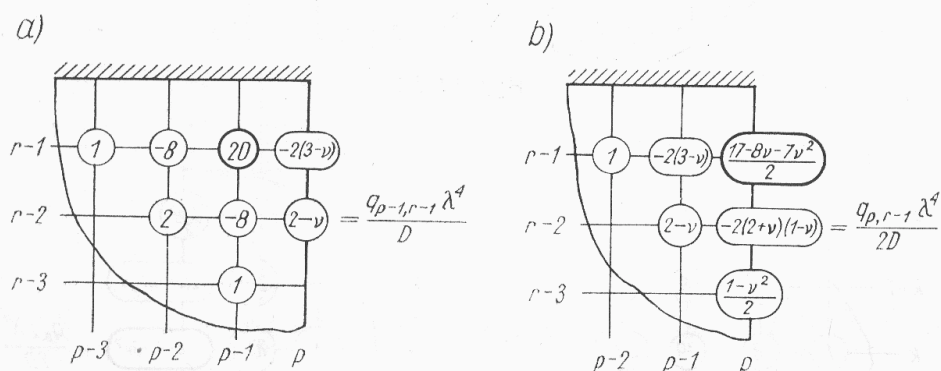
Po uwzględnieniu warunków brzegowych (12-23) lub (12-24) równania różnicowe ułożone dla punktów $(p-1, k)$ przyjmują postać zapisaną schematycznie na rys. 12-7a dla płyty swobodnie podpartej oraz na rys. 12-7b — dla płyty utwierdzonej wzdłuż krawędzi $x = p\lambda$. W przypadku płyty o brzegu swobodnym uwzględnienie warunków (12-25)

i (12-26) prowadzi do równań, które w sąsiedztwie brzegu i na samej krawędzi przyjmują postać podaną na rys. 12-8.

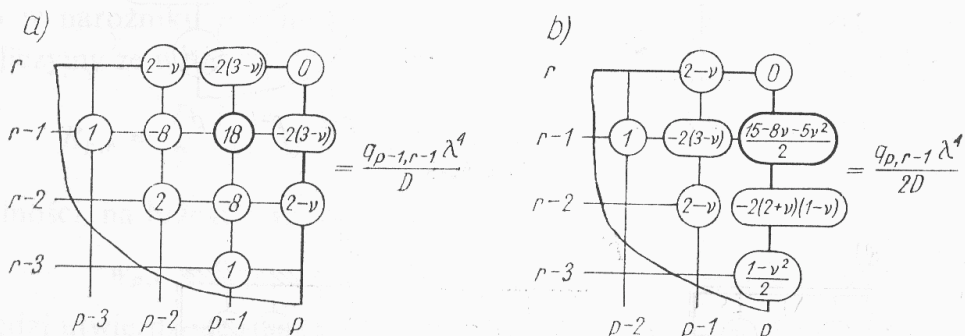
Rysunki 12-9 przedstawiają schematycznie równania różnicowe w sąsiedztwie naroży płyty swobodnie podpartej lub utwierdzonej na krawędziach. Na rysunkach 12-10 i 12-11 podano współczynniki występujące w równaniach różnicowych dla punktów sąsiadujących



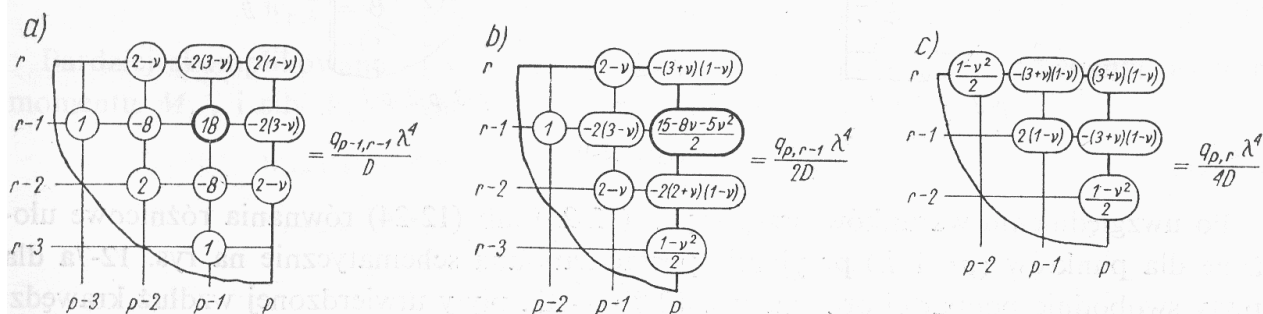
Rys. 12-10



Rys. 12-11



Rys. 12-12



Rys. 12-13

cych z narożem o jednej krawędzi swobodnej ($x = p\lambda$), a drugiej ($y = r\lambda$) swobodnie podpartej lub utwierdzonej. W przypadku płyty podpartej na narożniku (p, r) odpowiednie równania przedstawiono schematycznie na rys. 12-12. Wreszcie równania różnicowe dla punktów leżących w sąsiedztwie narożnika swobodnego zapisać można opierając się na schematach uwidoczniionych na rys. 12-13.

W przypadku płyty, której krawędź p' leży pomiędzy liniami podziału p i $p+1$, wielkości brzegowe obliczamy z następujących zależności:

$$w_{p',k} = \frac{1}{2}(w_{p,k} + w_{p+1,k}), \quad \varphi_{p',k} = \frac{1}{\lambda}(w_{p+1,k} - w_{p,k}),$$

$$M_{p',k} = -\frac{D}{2\lambda^2} [w_{p-1,k} - w_{p,k} - w_{p+1,k} + w_{p+2,k} + \nu(w_{p,k-1} - 2w_{p,k} + w_{p,k+1} + w_{p+1,k-1} - 2w_{p+1,k} + w_{p+1,k+1})], \quad (12-29)$$

$$V_{p',k} = -\frac{D}{\lambda^3} [-w_{p-1,k} + 3w_{p,k} - 3w_{p+1,k} + w_{p+2,k} + (2-\nu)(-w_{p,k-1} + 2w_{p,k} - w_{p,k+1} + w_{p+1,k-1} - 2w_{p+1,k} + w_{p+1,k+1})].$$

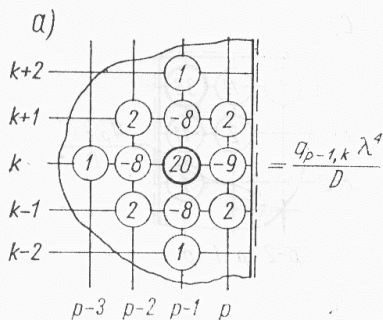
Reakcję narożnikową w narożniku (p', r') obliczymy ze wzoru

$$R_{p',r'} = 2D \frac{1-\nu}{\lambda^2} (w_{p,r} - w_{p,r+1} - w_{p+1,r} + w_{p+1,r+1}). \quad (12-30)$$

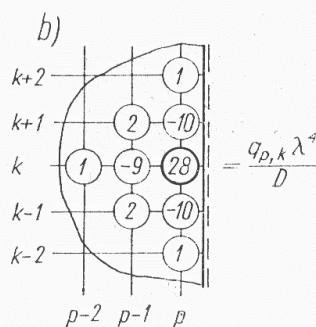
W przypadku brzegu $x = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda$ swobodnie podpartego, z warunku antysymetrii znajdujemy:

$$w_{p+1,k} = -w_{p,k}, \quad w_{p+2,k} = -w_{p-1,k}. \quad (12-31)$$

W związku z tym równania różnicowe w sąsiedztwie brzegu przyjmują postać przedstawioną na rys. 12-14.



Rys. 12-14



Rys. 12-15

Równie prosto przedstawia się sprawa w przypadku brzegu utwierdzonego. Korzystając z wyrażenia na ugięcie $w_{p',k}$ (12-10) otrzymujemy od razu:

$$w_{p,k} = w_{p+1,k} = 0. \quad (12-32)$$