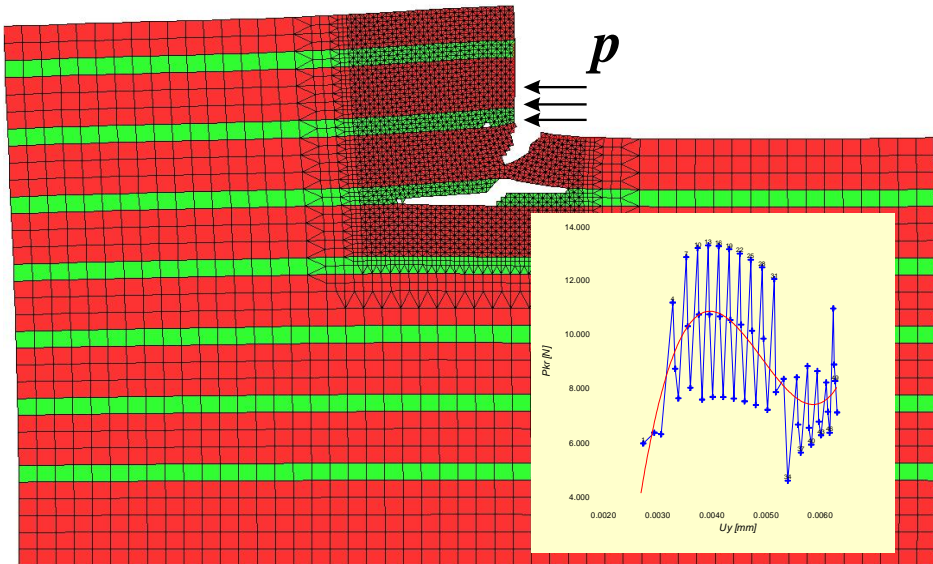


Jerzy Podgórski Józef Jonak

NUMERYCZNE BADANIA PROCESU SKRAWANIA SKAŁ ANIZOTROPOWYCH



Lubelskie Towarzystwo Naukowe

Jerzy Podgórski Józef Jonak

**NUMERYCZNE BADANIA
PROCESU SKRAWANIA
SKAŁ
ANIZOTROPOWYCH**

Lublin 2006

Lubelskie Towarzystwo Naukowe

© Copyright by

Lubelskie Towarzystwo Naukowe

Lublin 2006

Recenzenci:

Prof. dr hab. inż. Andrzej Seweryn

dr hab. inż. Tomasz Sadowski – prof. PL

ISBN – 10: 83-87833-71-1

ISBN – 13: 978-83-87833-71-8

Druk i oprawa

Wydawnictwo-Drukarnia Liber Duo s. c.

Lublin, ul. Długa 5

Spis treści

Wstęp	2
1. Wprowadzenie	3
Literatura:	27
2. Modele teoretyczne ośrodka skalnego anizotropowego	29
2.1 Dobór modelu anizotropowego ośrodka skalnego do celów symulacji numerycznej procesu skrawania.....	42
Literatura:	50
3. Badania wstępne- identyfikacja parametrów modelu numerycznego	53
3.1. Analiza wpływu warunków brzegowych modelu na przebieg propagacji rysy oraz przebieg siły odspajania.....	54
3.2. Wpływ kierunku uwarstwienia materiału na kierunek propagacji rysy oraz przebieg siły odspajania	61
3.3. Wpływ wartości współczynnika asymetrii wytrzymałości kruchego materiału uwarstwionego, na przebieg odspajania elementu wióra	68
Literatura:	83
4. Szczegółowe badania wpływu anizotropii materiału skalnego, na przebieg niszczenia struktury materiału	84
4.1. Założenia przyjęte w symulacji.....	85
4.2. Wyniki symulacji numerycznych szczegółowych badań niszczenia struktury materiału uwarstwionego	87
5. Podsumowanie	109
Dodatek 1. Wyznaczanie parametrów kryterium PJ	112

Wstęp

Celem autorów niniejszej monografii, było przeprowadzenie, na gruncie mechaniki teoretycznej ciała stałego, numerycznych analiz kształtowania się zasięgu odspajania skały o silnej anizotropii właściwości, jakie zachodzi np. w procesie urabiania skały uwarstwionej, ostrzem narzędzia maszyny urabiającej. W praktyce, zagadnienie niszczenia kruchych struktur warstwowych, występuje znacznie częściej, w szeregu dziedzinach dzisiejszej techniki czy w określonych warunkach geotechnicznych.

Główne zadania badawcze, jakie postawiono w trakcie realizacji pracy to:

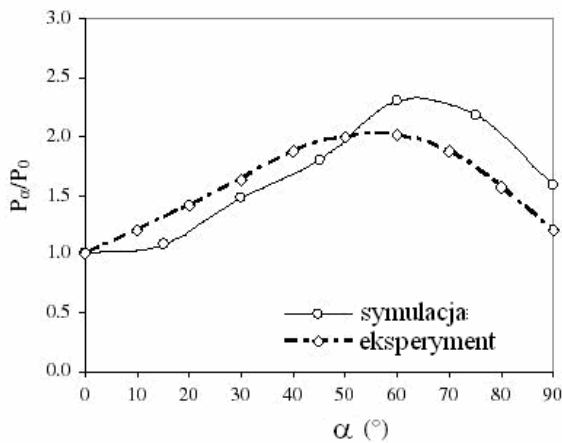
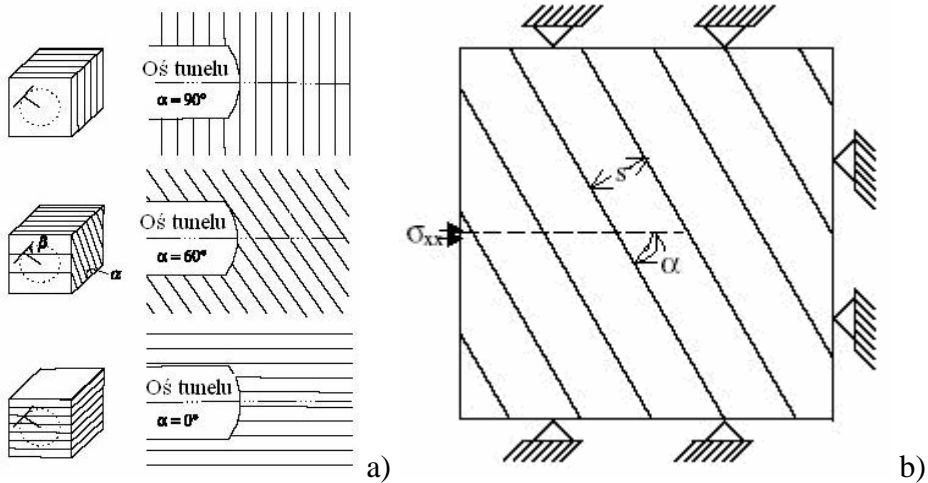
- stworzenie modeli teoretycznych i numerycznych ośrodka skalnego anizotropowego,
- zamodelowanie za pomocą Metody Elementów Skończonych, procesu odspajania głównego elementu wióra w ośrodku skalnym,
- obliczenie i analiza stanu naprężeń generowanego w strefie skrawania,
- wyznaczenie stanów granicznych ośrodka skalnego oraz trajektorii propagacji szczeliny towarzyszącej odspajaniu głównego elementu wióra.

W prezentowanym opracowaniu wykorzystano warunek stanu granicznego „PJ”, opracowany i wykorzystywany przez Podgórskiego [1.5, 1.4]. W analizie odkształceń materiału skalnego wykorzystano klasyczną metodę MES a w analizie rozwoju pęknięć, wykorzystano metodę tzw. „traconych elementów”.

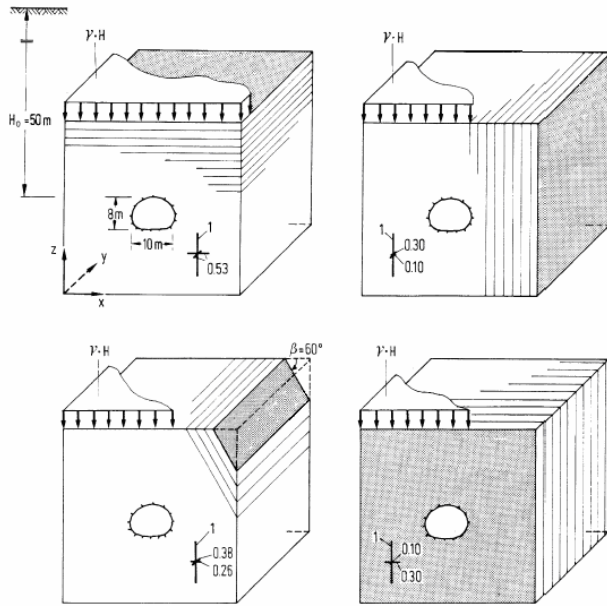
1. Wprowadzenie

Możliwość symulacji pękania kruchych, uwarstwionych materiałów skalnych pod obciążeniem np. narzędzi urabiających (elementów urabiających) maszyn roboczych może być bardzo przydatna np. w procesach optymalizacji parametrów geometrycznych samych narzędzi jak również do doboru optymalnych trajektorii ich ruchu w trakcie realizacji procesu roboczego. Praktyka wykazuje, że np. postęp drążenia pełnoprzekrojowego, wyraźnie zależy od kierunku usytuowania tzw. płaszczyzn uprzywilejowanych lub osłabienia (uwarstwienia, laminacji, foliacji, łupliwości, kłiważu itd.) skał górotworu (rys. 1.1), względem kierunku, w którym jest realizowany proces (np. [1.7]).

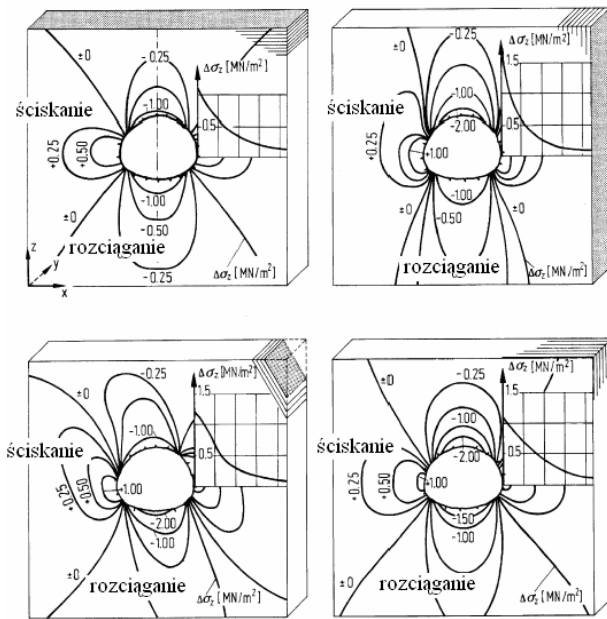
Symulacje numeryczne wykazują, że układ warstw w górotworze ma istotne znaczenie dla kształtowania się naprężeń i przemieszczeń w skałach uwarstwionych (np. rys. 1.2, rys. 1.3), co między innymi, wpływa na kształtowanie się obciążenia narzędzi skrawających, podczas drążenia takiego tunelu oraz na wspomniany już postęp drążenia.



Rys. 1.1. Model górotworu, przyjęty w symulacjach numerycznych wpływu usytuowania płaszczyzn uprzywilejowanych względem kierunku drążenia, na postęp drążenia [1.7]: a) usytuowanie osi tunelu względem zalegających warstw, b) model obliczeniowy w płaszczyźnie przekroju osiowego tunelu, c) kształtowanie się względnego postępu drążenia p_α/p_0 w funkcji kąta orientacji płaszczyzn osłabienia górotworu α ; p_α - postęp uzyskiwany przy określonym kącie nachylenia warstw, p_0 - postęp uzyskiwany przy nachyleniu warstw pod kątem $\alpha = 0^0$



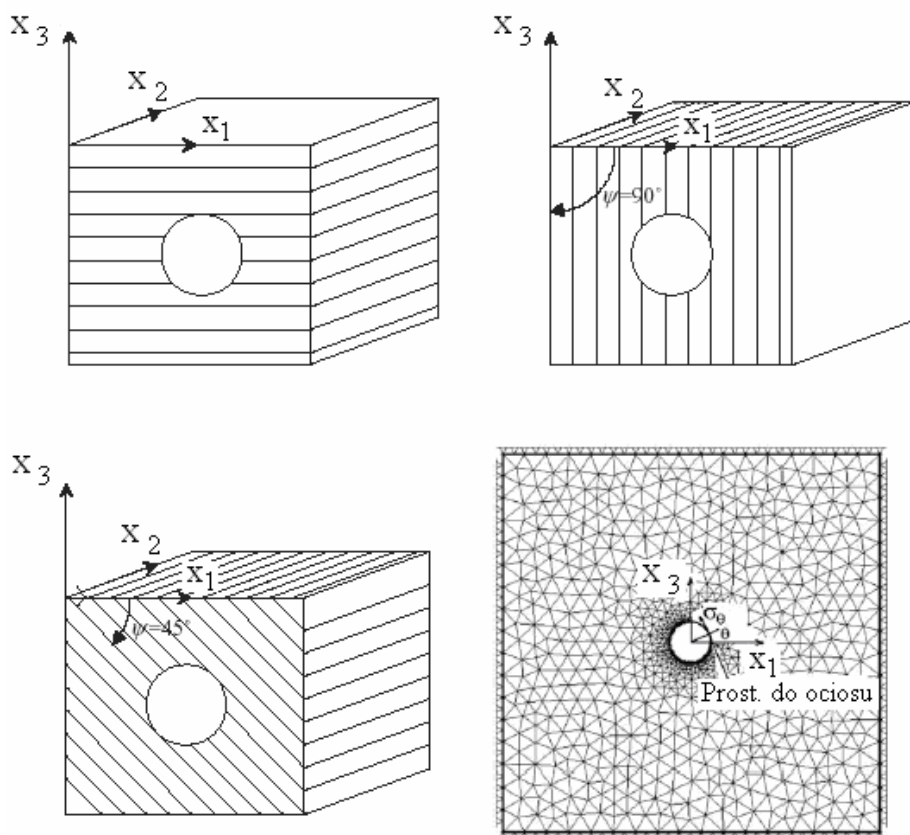
a)



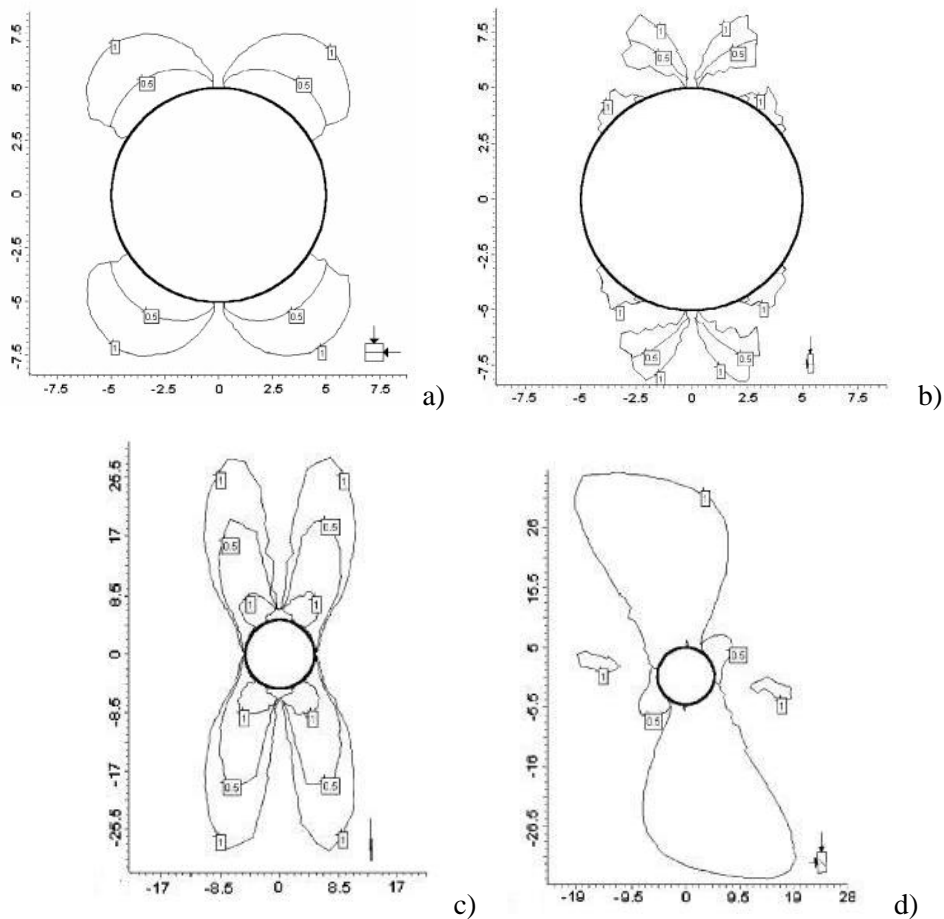
b)

Rys. 1.2. Wpływ uwarstwienia skał górotworu, na kształtowanie się naprężeń wokół wykonywanego wyrobiska [1.14]

Należy podkreślić, że najczęściej, w prowadzonych symulacjach numerycznych, celem uproszczenia, skały anizotropowe traktowane są jako skały transwersalnie izotropowe (warstwowo izotropowe), jak np. w pracy [1.11], co ilustruje rys. 1.3.

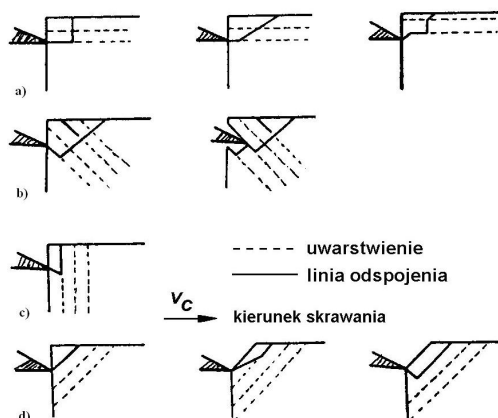


Rys. 1.3. Model zastępczy skał anizotropowych wg [1.11]



Rys. 1.4 Rozkład współczynnika bezpieczeństwa przed poślizgiem w płaszczyźnie uprzywilejowanej dla skały izotropowej a) oraz skały transwersalnie izotropowej, przy kącie orientacji płaszczyzny nieciągłości z rys. 1.3, tj.: b) $\psi = 0^{\circ}$, c) $\psi = 90^{\circ}$, d) $\psi = 45^{\circ}$ [1.11]

Badania doświadczalne wykazują jednoznacznie (rys. 1.5), że efekt oddziaływania narzędzia urabiającego zależy w dużym stopniu od kąta, pod jakim narzędzie przemieszcza się względem usytuowania omawianych warstw osłabienia materiału skalnego, poddawanego urabianiu.

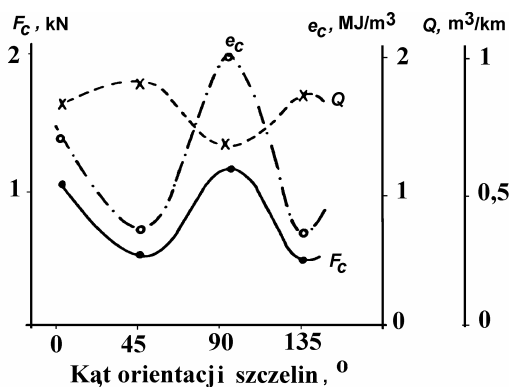


Rys. 1.5. Wpływ kąta nachylenia uprzywilejowanych warstw skalnych względem kierunku skrawania, na kształtowanie się kierunku i zasięgu propagacji szczeliny tworzącej wiór (Pomeroy, [1.6])

Jak wynika z rys. 1.5a, kierunek ułożenia warstw skalnych jak i kierunek orientacji mikroszczelin w górotworze, względem potencjalnego kierunku ruchu narzędzia, ma istotne znaczenie dla propagacji szczeliny towarzyszącej odspajaniu elementów wióra. Doświadczenia wykazują, że gdy kierunki te są równoległe, w początkowej fazie penetracji ostrza, szczelina najczęściej rozwija się wzdłuż strefy styku warstw lub wzdłuż potencjalnej mikroszczeliny. Po osiągnięciu przez element wióra odpowiednich rozmiarów oraz ustaleniu się określonych warunków równowagi, materiał zaczyna pękać, najczęściej prostopadle do uwarstwienia, rzadziej pod określonym kątem do kierunku uwarstwienia (rys. 1.5a). Gdy warstwy ułożone są pod kątem 135° (rys. 1.5b), pęknięcie początkowo penetruje wzdłuż strefy kontaktu warstw, następnie zmienia swą trajektorię i zaczyna penetrować prostopadle do uwarstwienia. W przypadku, gdy uwarstwienie jest prostopadłe do kierunku skrawania, w pierwszym kroku propagacji następuje pęknięcie pierwszej warstwy a następnie szczelina penetruje wzdłuż strefy kontaktu, wydzielając element

wióra o określonych wymiarach (rys. 1.5c). Gdy warstwy ułożone są pod kątem 45° , wtedy najczęściej następuje poślizg materiału wzdłuż strefy kontaktu warstw lub najpierw następuje pęknięcie zlokalizowane w pierwszej warstwie a później poślizg wzdłuż strefy kontaktu, jak na rys. 1.5d. Podobny mechanizm występuje, gdy skała jest spękana, tworząc warstwową budowę materiału.

Występowaniu określonego mechanizmu odpajania elementów wióra, towarzyszy tak określone obciążenie ostrza jak i energochłonność urabiania, co z kolei ilustruje rys. 1.6.

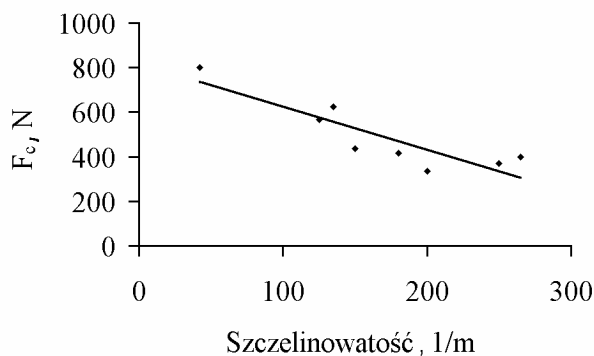


Rys. 1.6. Wpływ kąta nachylenia warstw skalnych względem kierunku skrawania, na kształtowanie się kąta orientacji szczelin względem kierunku skrawania, na kształtowanie się siły skrawania F_c , jednostkowej energii urabiania e_c , oraz ilości urobku Q , wg Roxborough [1.8]

Jak wynika z rys. 1.6, ilość urobku odpajanego w każdym przypadku jest nieco inna. Najwięcej urobku uzyskuje się, gdy uwarstwienie jest nachylone względem kierunku skrawania pod kątem 45° lub 135° . Najmniej urobku jest pozyskiwane, gdy uwarstwienie występuje pod kątem 0° lub 90° . Odwrotna sytuacja występuje dla obciążenia ostrza. Największe obciążenie występuje przy oddziaływaniu na warstwy

usytuowane pod kątem 0° oraz 90° , najmniejsze natomiast dla warstw zorientowanych pod kątem 45° oraz 135° . W efekcie, największa energochłonność urabiania występuje przy skrawaniu materiału uwarstwionego pod kątem 90° , nieco mniejsza dla uwarstwienia zorientowanego pod kątem 0° , najmniejsza natomiast dla kierunku uwarstwienia 45° oraz 135° .

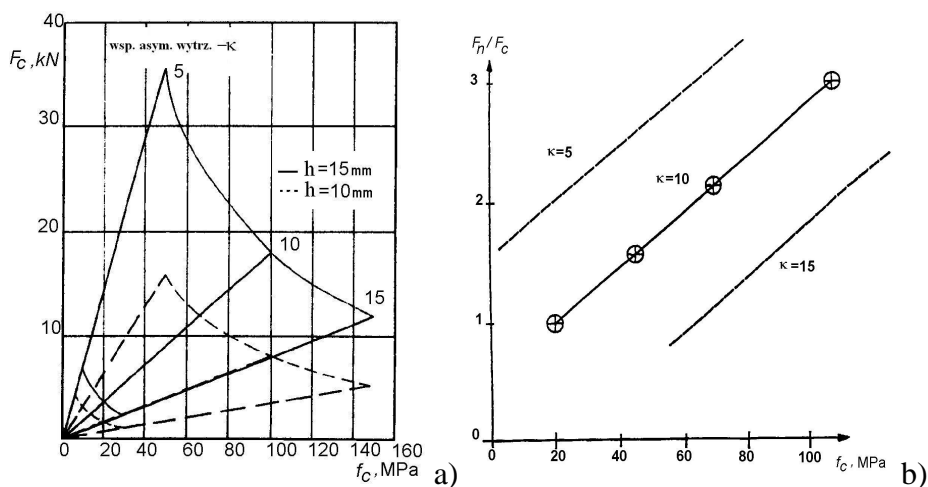
Obciążenie narzędzia zależy może także od proporcji grubości poszczególnych warstw skalnych czy stopnia spękania masywu skalnego, określanego często poprzez tzw. szczelinowatość, czyli ilość szczelin w materiale jaka występuje w jednostkowej grubości warstwy tego materiału, co ilustruje rys. 1.7.



Rys. 1.7. Wpływ szczelinowatości skały na kształtowanie się siły skrawania, wg [1.6]

Oprócz omówionych już wcześniej czynników, mających wpływ na przebieg mechanizmu formowania wióra oraz kształtowanie się obciążenia ostrza, ogromnie istotne znaczenie posiada tzw. współczynnik asymetrii wytrzymałości skał, określane jako proporcja ich wytrzymałości na ściskanie f_c do wytrzymałości na jednoosiowe rozciąganie f_t , oznaczany jako κ ($\kappa = f_c / f_t$). Jak wykazują badania (np.

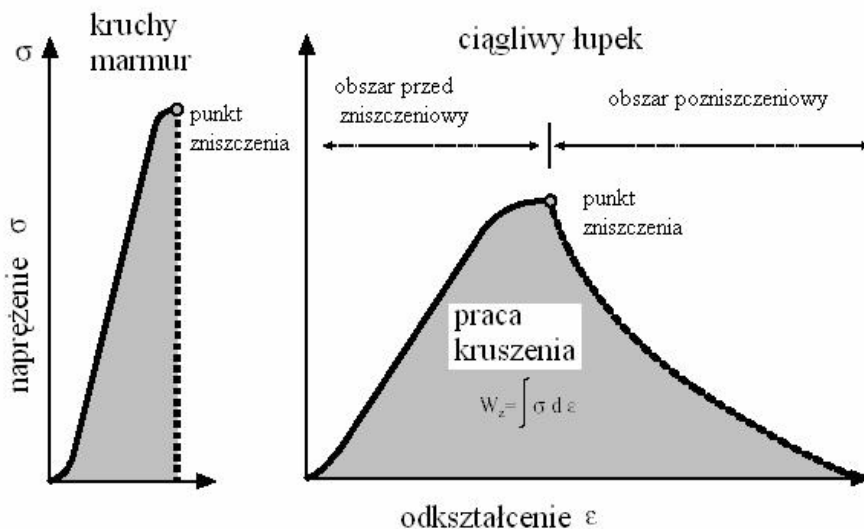
[1.2, 1.3, 1.6]) wartość tego współczynnika wpływa w sposób zasadniczy, na wartość składowych siły na ostrzu noża (rys. 1.8). W świetle dotychczasowych badań, pytaniem bez odpowiedzi, jest wpływ wartości tego współczynnika, na przebieg propagacji szczeliny towarzyszącej formowaniu elementów wióra przy skrawaniu materiałów uwarstwionych, a w konsekwencji, np. na wymiary głównego elementu wióra.



Rys. 1.8. Wpływ współczynnika asymetrii wytrzymałości skały κ oraz wytrzymałości skały na ścisnienie f_c , na wartość składowych siły skrawania (stycznej F_c oraz normalnej F_n): a) [1.3], b) [1.2]

Bardziej złożone zjawiska występują w przypadku wiercenia obrotowo-udarowego otworów w masywie skalnym. Zależnie od orientacji warstw skalnych względem kierunku wiercenia, różna jest charakterystyka wytrzymałościowa skały jak i inny jest mechanizm niszczenia jej struktury, co oczywiście przekłada się tak na postęp wiercenia, energochłonność procesu, obciążenie narzędzia itd. W ogólnym przypadku (np. [1.10]) zwraca się szczególną uwagę na fakt, że dla różnych skał, różna jest wartość pracy kruszenia, co ilustruje rys.

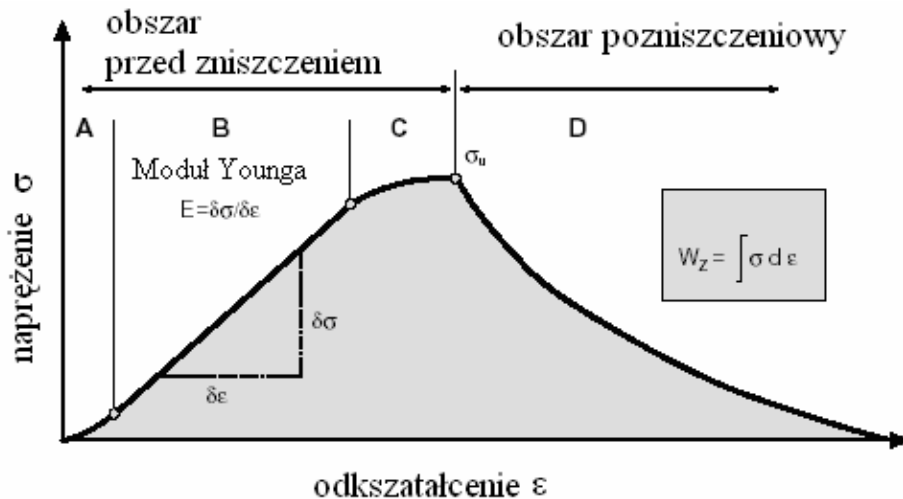
1.9. W próbie ściskania, dla skał kruchych, niewielki wzrost odkształceń powoduje gwałtowny przyrost naprężeń (rys. 1.9).



Rys. 1.9. Przebieg jednostkowej pracy kruszenia W_z dla skał kruchych oraz „ciągliwych” (obszar zaciemniony) wg [1.10]

Osiągnięcie punktu zniszczenia ciągłości struktury skały skutkuje jej zniszczeniem i spadkiem naprężeń do zera. Z kolei dla skał „ciągliwych”, w obszarze po zniszczeniowym spadek naprężeń następuje mniej gwałtownie, w miarę rosnącego odkształcenia.

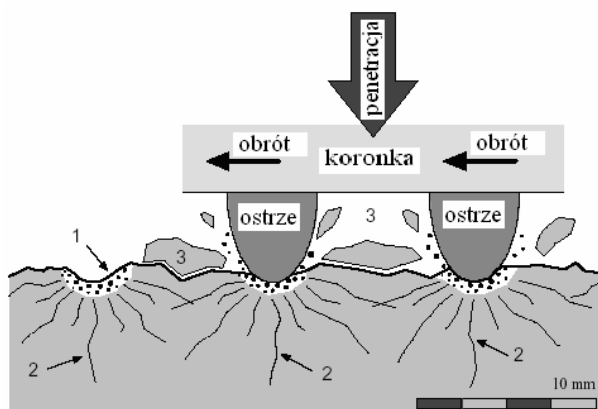
Wartość jednostkowej pracy kruszenia W_z pozwala klasyfikować skały do grupy kruchych bądź „ciągliwych” oraz rzutuje na wskaźniki procesu wiercenia takie jak np. postęp wiercenia. Warto zwrócić uwagę na sposób określania modułu Younga (rys. 1.10), który generalnie jest wyznaczany w odniesieniu do liniowej części krzywej naprężenie – odkształcenie, z zależności $E = \frac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon}$.



Rys. 1.10. Krzywa naprężenie – odkształcenie wraz z częścią pozniszczeniową. Sposób wyznaczania modułu Younga E oraz jednostkowej energii kruszenia W_z dla skał „ciągliwych” [1.10]

W ogólnym przypadku mechanizm niszczenia struktury skały koronką wiertniczą jest następujący [1.10] (rys.1.11):

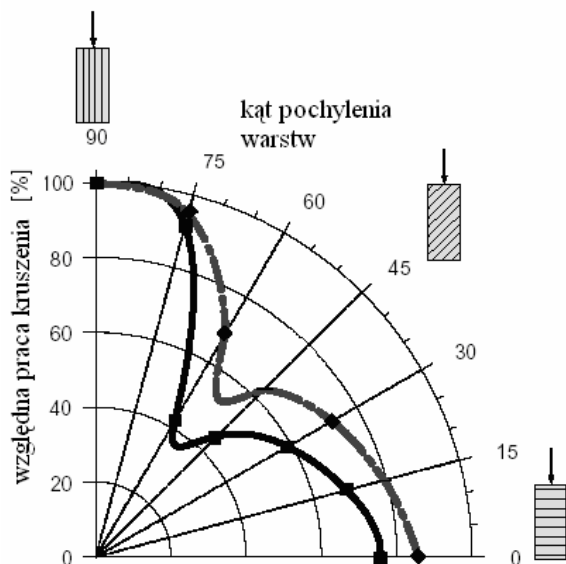
- w wyniku uderu ostrza koronki w skałę, następuje kruszenie skały i powstawanie frakcji pyłowej (strefa sprasowania),
- na granicach strefy sprasowania, w której wytwarzany jest hydrostatyczny stan naprężenia, w wyniku działania naprężeń rozciągających, generowane są szczeliny promieniowe,
- gdy generowane w skale pod ostrzem naprężenia, osiągają odpowiednio duże wartości, lub w skale istnieją pierwotne mikroszczeliny prostopadłe usytuowane do ostrza (osi otworu), następuje odpajanie większych fragmentów skały pomiędzy ostrzami koronki, zachodzące w procesie ścinania skały.



Rys. 1.11. Niszczenie struktury skały koronką wiertniczą, wg [1.10]. 1- strefa zmiążdżenia skały, 2- szczeliny promieniowe, 3- odpajane elementy skały

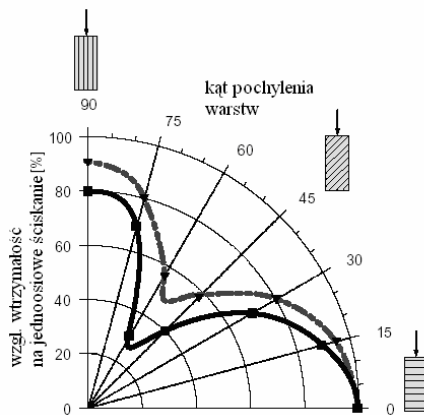
Tak więc w poszczególnych etapach procesu wiercenia obrotowo-udarowego, występują dwa różne procesy, w których dominujące znaczenie mają naprężenia rozciągające (ściskające), tj. w trakcie docisku i udaru narzędzia, oraz naprężenia tnące w trakcie obrotu koronki.

W przypadku skał uwarstwionych (ogólnie z płaszczyznami uprzywilejowanymi) okazuje się, że jednostkowa praca kruszenia W_z zależy od wartości kąta pochylenia warstw uprzywilejowanych, względem działającego obciążenia, co ilustruje rys. 1.12. Znaczące obniżenie jej wartości występuje w przedziale kątów $45 \div 60^\circ$. Maksymalna wartość pracy kruszenia występuje, gdy uwarstwienie jest równoległe do działającego obciążenia, zdecydowanie mniejsza natomiast, gdy obciążenie działa prostopadle do uwarstwienia (foliacji).



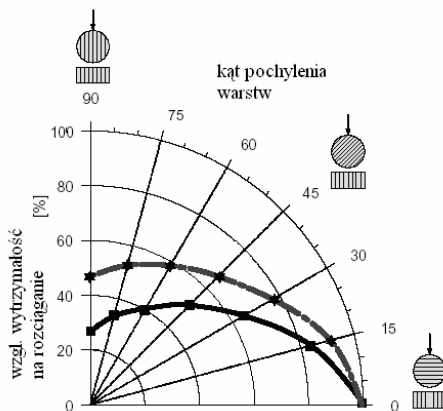
Rys. 1.12. Wpływ kąta pochylenia warstw uprzywilejowanych, na kształtowanie się jednostkowej pracy kruszenia [1.10] (linia ciągła- łupek kwarcytowy regularnie uwarstwiony, linia przerywana- łupek kwarcytowy o zaburzonym uwarstwieniu)

W podobny sposób zmienia się jednoosiowa wytrzymałość na ściskanie (rys. 1.13). Znaczne obniżenie wartości tych parametrów występuje również w przedziale kątów 45° ÷ 60° . Odmienne natomiast niż poprzednio, wartość maksymalna wytrzymałości osiągnięta jest, gdy uwarstwienie jest prostopadłe do obciążenia. Dla obciążenia działającego równoległe do uwarstwienia występuje znaczące obniżenie wytrzymałości, względem wytrzymałości osiągniętej dla obciążenia działającego prostopadłe do uwarstwienia.



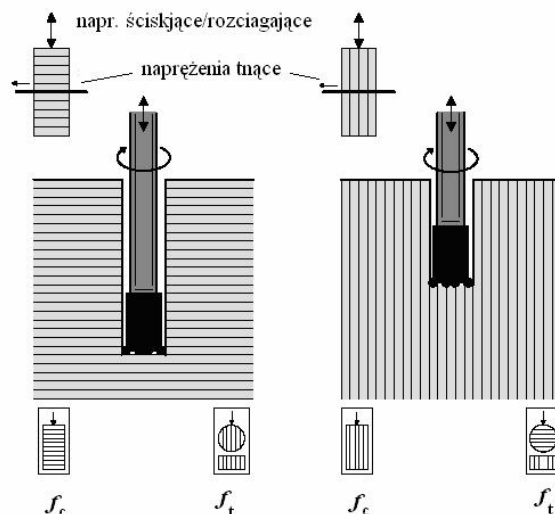
Rys. 1.13. Wpływ kierunku uwarstwienia na jednoosiową wytrzymałość skały[1.10] (oznaczenia jak na rys.1.12)

Z kolei wpływ kierunku uwarstwienia, na wytrzymałość na rozciąganie, ma zupełnie odmienny charakter. Skała uwarstwiona wykazuje największą wytrzymałość na rozciąganie (próba brazylijska) gdy obciążenie działa prostopadłe do kierunku uwarstwienia a najmniejszą gdy działa ono równoległe (rys. 1.14)



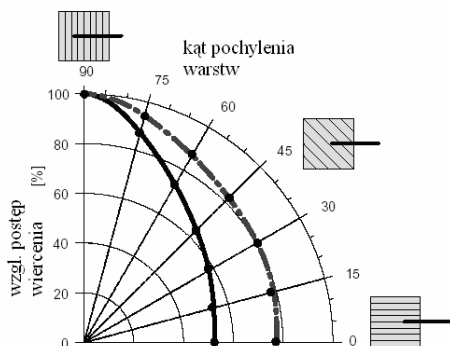
Rys. 1.14. Wpływ wartości kąta uwarstwienia na kształtowanie się wytrzymałości na rozciąganie [1.10]

Przedstawiona zmienność parametrów wytrzymałościowych skały uwarstwionej, zależnie od kąta usytuowania warstw względem działającego obciążenia, ma swe przełożenie na mechanikę procesu wiercenia udarowego w rozpatrywanych skałach. Stąd też wyróżnia się ([1.10]) dwa podstawowe przypadki oddziaływań (rys. 1.15). W świetle powyższych rozważań, gdy wiercenie przebiega prostopadle do uwarstwienia, decydujące znaczenie mają naprężenia ściskające działające prostopadle do uwarstwienia oraz naprężenia tnące działające równoległe do uwarstwienia (rys.1.15a). W drugim przypadku decydujące znaczenie mają naprężenia ściskające działające równoległe do uwarstwienia, współdziałające z naprężeniami tnącymi działającymi prostopadle do uwarstwienia (rys.1.15b).



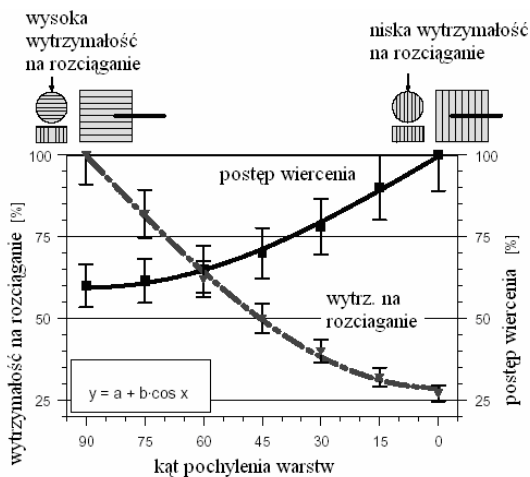
Rys.1.15. Oddziaływanie koronki wiertniczej na skałę uwarstwowaną wg [1.10]

W efekcie, postęp wiercenia jest największy podczas wiercenia prostopadle do warstw a najmniejszy, gdy wiercenie przebiega równoległe do nich, co ilustruje rys. 1.16.



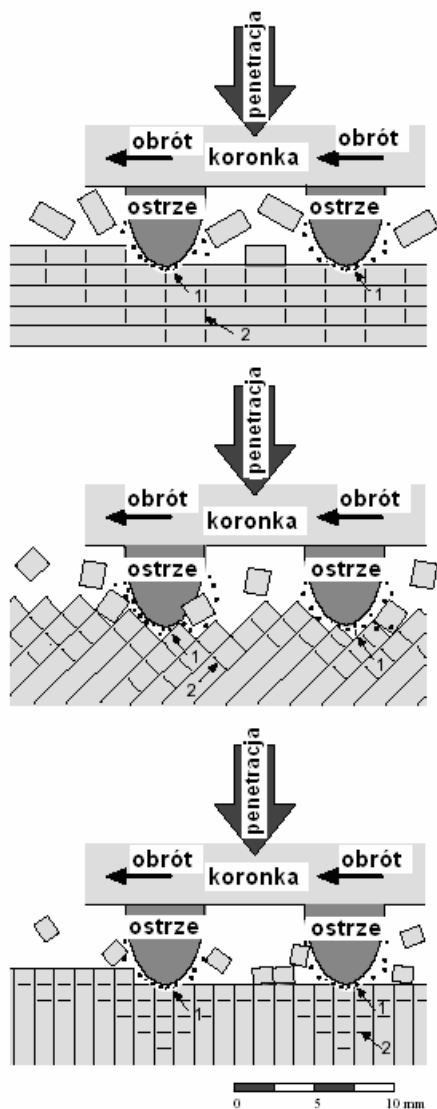
Rys. 1.16. Wpływ kierunku uwarstwienia skały na po postęp wiercenia udarowego wg [1.10]

Kompleksowo, przebieg zmienności poszczególnych wielkości, w funkcji kąta pochylenia uwarstwienia, ilustruje rys.1. 17.



Rys.1.17. Wpływ kąta uwarstwienia skały, na kształtowanie się postępu wiercenia oraz jednoosiowej wytrzymałości na rozciąganie [1.10]

Na podstawie przeprowadzonych badań i obserwacji, Thuro i Spaun [1.10] przedstawili interesującą interpretację fizyczną zjawiska odspajania elementów skały uwarstwionej, ostrzem koronki wiertniczej, którą ilustruje rys. 1.18.



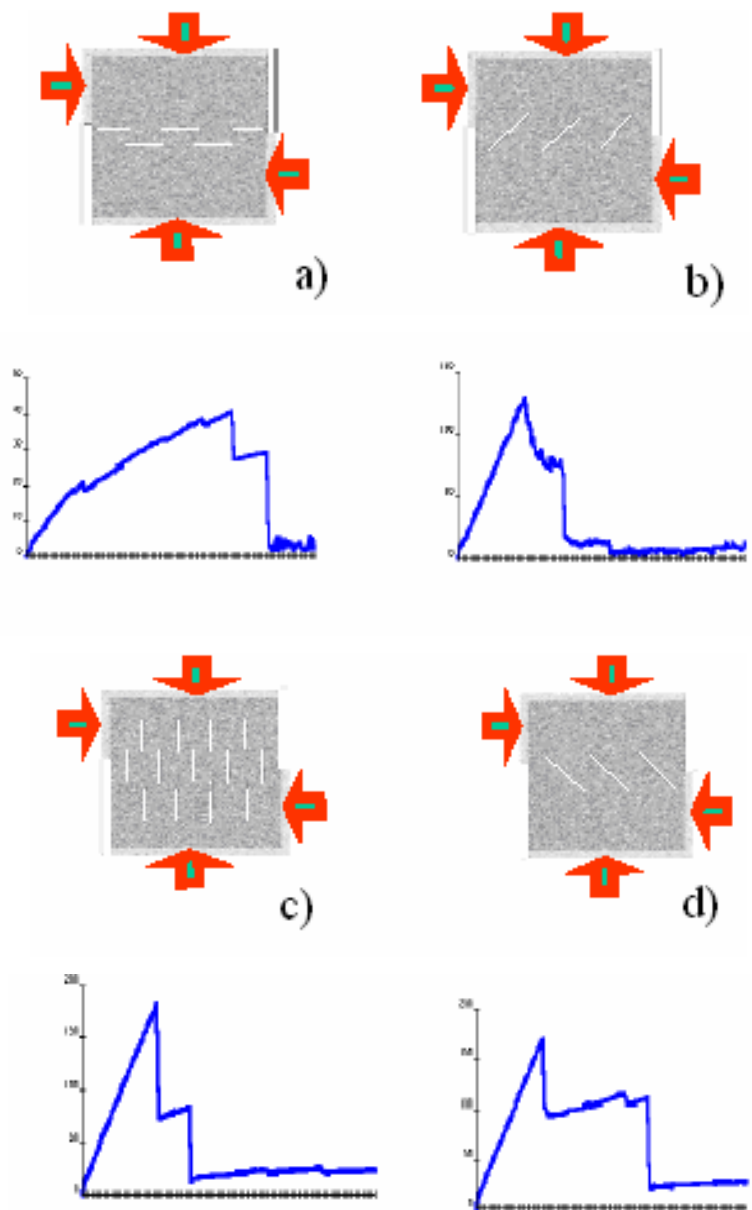
Rys.1.18. Mechanizm wykruszania elementów skały ostrzem koronki wiertniczej, zależnie od kąta pochylenia warstw, wg [1.10] (1- skała zmiądzona, 2-szczeliny prostopadłe do warstw)

Kiedy kierunek wiercenia jest prostopadły do orientacji warstw, materiał jest ściskany prostopadłe oraz ścinany równoległe do warstw. W wyniku powstawania szczelin promieniowych od ściskania (rozciągania) oraz prostopadłych do uwarstwienia, materiał jest łatwo oddzielany od calizny (rys. 1.18a). Wiercenie jest „sterowane” przez naprężenia tnące w uwarstwionym materiale. Minimalnej energii kruszenia towarzyszą duże elementy wióra oraz maksymalny postęp wiercenia.

Jeśli kierunek wiercenia jest równoległy do uwarstwienia, nacisk jest również równoległy, podczas gdy naprężenia tnące są prostopadłe do uwarstwienia (rys.1.18c), co jest przyczyną dużych odkształceń w płaszczyznach prostopadłych do uwarstwienia. Wiercenie jest „sterowane” przez naprężenia rozciągające (tnące) równoległe do uwarstwienia, sprzyjając powstawaniu małych elementów wióra oraz małemu postępowi wiercenia.

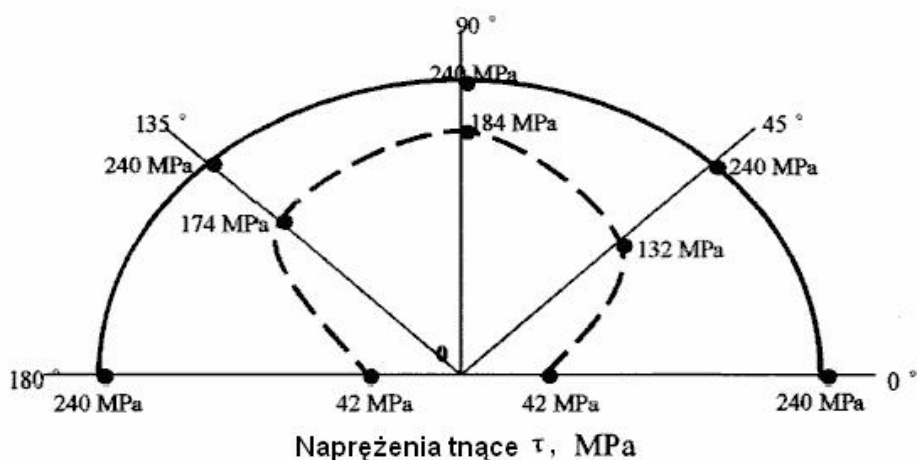
W ogólnym przypadku, wiercenie w uwarstwionych skałach jest „sterowane” przez kąt usytuowania warstw względem kierunku wiercenia (rys.1.18b). W tych przypadkach powstają średniej wielkości elementy wióra. Jak zauważają autorzy badań [1.10], takie efekty urabiania wierceniem, są odmienne do uzyskiwanych podczas drążenia metodami TBM, gdzie postęp drążenia jest maksymalny, gdy uwarstwienie usytuowane jest ukośnie względem kierunku drążenia.

Aktualnie, niektóre grupy zagadnień poruszanych w prezentowanych badaniach, analizować już można z wykorzystaniem systemów MES, w tym np. systemu Abaqus, jak również korzystając z zupełnie nowych metod symulacji, np. metodą DEM (Discrete Element Metod). Przykład takich symulacji ilustruje rys. 1.19 [1.9].



Rys. 1.19. Cztery przypadki usytuowania płaszczyzn uprzywilejowanych skały oraz odpowiadające im przebiegi krzywych obciążenie- przemieszczenie, wg [1.9]: a) $\beta = 0^\circ, 180^\circ$, b) $\beta = 45^\circ$, c) $\beta = 90^\circ$ d) $\beta = 135^\circ$

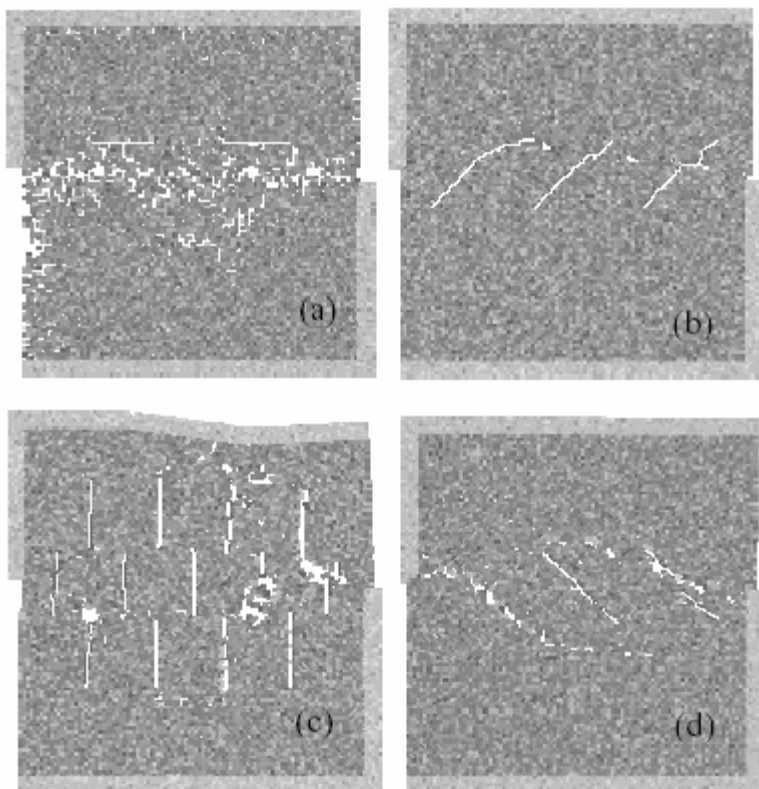
W badaniach numerycznych analizowano wpływ kierunku usytuowania płaszczyzn uprzywilejowanych (wakanse, osłabiona spójność) skały, względem kierunku działania obciążenia niszczonego (poziomo na rys. 1.19) na przebieg niszczenia struktury (kierunek propagacji zniszczenia oraz przebieg krzywej obciążenie-przemieszczenie, jak na rys. 1.19), w klasycznej próbie ścinania.



Rys.1.20. Wpływ kierunku usytuowania płaszczyzn uprzywilejowanych materiału skalnego na kształtowanie się wytrzymałości na ścinanie [1.9]

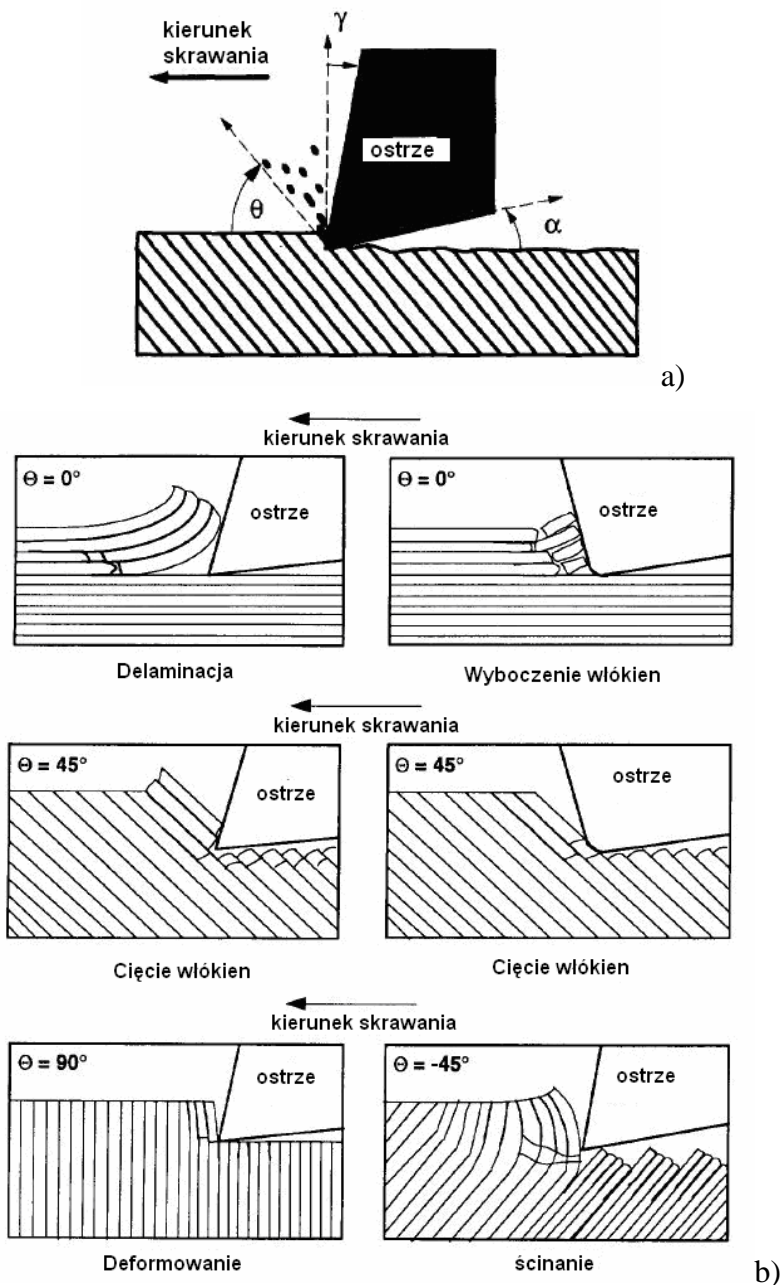
Wyniki symulacji numerycznej, przebiegu niszczenia struktury materiału z analizowanym układem płaszczyzn uprzywilejowanych, ilustruje z kolei rys. 1.21. Choć wyniki symulacji nie są do końca jednoznaczne, można jednak zauważyć zarysowujące się tendencje w niszczeniu struktury skały. Gdy obciążenie działa w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzn uprzywilejowanych, również pęknięcia rozprzestrzeniają się w płaszczyznach uwarstwienia (rys.1.21a). Gdy

uwarstwienie jest pod kątem 45^0 do kierunku działania obciążenia (rys. 1.21b), materiał pęka w nieco zbliżony sposób do poprzedniego, jednak destrukcja materiału jest bardziej zlokalizowana i koncentruje się głównie w okolicach płaszczyzny ścinania (równoległe do kierunku działającego obciążenia, na granicy szczęk prasy). Powierzchnie (strefy) osłabienia materiału są jakby zaciskane wstępnie. Z kolei w przypadku uwarstwienia prostopadle zlokalizowanego względem kierunku obciążenia (rys.1.21c), uszkodzenia lokalizują się w okolicach płaszczyzn uprzywilejowanych (wzdłuż nich) a zatem prostopadle do działającego obciążenia. Gdy warstwy ułożone są pod kątem 135^0 , materiał pęka w kierunkach prawie zgodnych z kierunkiem uwarstwienia materiału. Pierwotne szczeliny tworzące nieciągłości czy też uprzywilejowane powierzchnie, są jakby rozwierane a materiał pęka na przedłużeniu tych szczelin (rys. 1.21d).



Rys. 1.21. Wyniki symulacji niszczenia struktury materiału skalnego pod obciążeniem, zależnie od usytuowania płaszczyzn uprzywilejowanych względem kierunku działającego obciążenia, w próbie ścinania [1.9]

W uzupełnieniu powyższych rozważań należy dodać, że poruszana tematyka wpływu uwarstwienia skrawanego materiału na mechanizm formowania wióra i kształtowanie się obciążenia ostrza a zwłaszcza jakości obrobionej powierzchni, jest o wiele bardziej istotna w dzisiejszej technologii obróbki uwarstwionych materiałów kompozytowych (np. [1.12, 1.13]). Jak wynika z danych literaturowych, zagadnienia te są w wielu aspektach sobie bliskie, zwłaszcza dla niektórych rodzajów kompozytów grafitowo-epoksydowych (np. [1.13]).



Rys. 1.22. Proces formowania wióra w trakcie skrawania uwarstwionego kompozytu grafitowo-epoksydowego, zależnie od kierunku uwarstwienia materiału względem kierunku skrawania [1.13]

Jak wynika z rys. 1.22b, uwarstwienie materiałów kompozytowych ma również istotne znaczenie dla mechaniki odspajania wióra. W przypadku uwarstwienia równoległego do kierunku skrawania, oddziaływanie ostrza na taki materiał powoduje (zależnie od geometrii ostrza) delaminację lub wyłamywanie poszczególnych warstw kompozytu. W przypadku usytuowania warstw pod kątem 45° , następuje sukcesywne ścinanie poszczególnych warstw, w płaszczyźnie niemal prostopadłej do każdej z nich.

Gdy kąt orientacji warstw wynosi 90° , warstwy pękają w płaszczyźnie równoległej do kierunku skrawania. Dla kąta $135^{\circ}(-45^{\circ})$, początkowo szczelina penetruje wzdłuż strefy kontaktu warstw, aż do chwili zmiany warunków równowagi elementu wióra, po czym następuje ścięcie warstw pod kątem prawie prostopadłym do każdej warstwy. Zmienia się sukcesywnie kierunek propagacji szczeliny, wraz ze zmianą warunków równowagi.

Ponieważ możliwości obliczeniowe dzisiejszych komputerów osobistych, są już na tyle duże, że mogą być efektywnie wykorzystywane w analizach zagadnień związanych z mechaniką pęknięcia kruchych materiałów uwarstwionych, stąd powstała propozycja przeprowadzenia odpowiednich symulacji tego procesu, w odniesieniu do zjawiska formowania elementu wióra podczas skrawania skał uwarstwionych. W chwili podejmowania tematyki badawczej, problemem było brak odpowiedniego oprogramowania do symulacji propagacji pęknięcia materiału oraz równań konstytutywnych, pozwalających z odpowiednio dużą dokładnością opisywać zachowanie materiałów skalnych pod obciążeniem zewnętrznym. W prezentowanym opracowaniu wykorzystano warunek stanu granicznego „PJ”, opracowany i

wykorzystywany przez Podgórskiego [1.4, 1.5]. W analizie odkształceń materiału skalnego wykorzystano klasyczną metodę MES a w analizie rozwoju pęknięć, wykorzystano metodę tzw. „traconych elementów”.

Literatura:

- [1.1] Jonak J., J. Podgórski, P. Jaremek: The strength asymmetry effect in laminar rock- like materials on crack propagation. Proceedings of the Thirteen International Symposium on Mine Planning and Equipment Selection, Wrocław, Poland, 1-3 September 2004. Edited by: M. Hardygóra, G. Paszkowska, M. Sikora. A.A. Balkema Publishers.
- [1.2] Lange W., Frenyo P.: Kryteria doboru kombajnów chodnikowych. Materiały konferencyjne, CMG Komag, KBN, Komisja Wspólnot Europejskich, Szczyrk 1993, pp. 1-5.
- [1.3] Manhart U., Gerhardt H., Bellemann A.: Rechnergestützte Optimierung der Arbeitsweise von Schneidköpfen an Teilschnitt- Vortriebsmaschinen. Glückauf- Forschungshefte 51 (1990), nr 6.
- [1.4] Podgórski J. General Failure Criterion for Isotropic Media. Journal of Engineering Mechanics ASCE, 111(1985) 2, 188-201.
- [1.5] Podgórski J.: Influence Exerted by Strength Criterion on the Direction of Crack Propagation in the Elastic- Brittle Material. Journal of Mining Science, 38 (4), pp. 374- 380; Jul 2002.
- [1.6] Pomeroy C.D.: The Breakage of Coal by Wedge Action. Factors influencing breakage by any given shape of tool. Colliery Guardian, November 21, 1963, pp. 642-648.
- [1.7] Qiu-Ming Gong, Jian Zhao, Yu-Yong Jiao: Numerical modeling of the effects of joint orientation on rock fragmentation by TBM cutters. Tunneling and Underground Space Technology 20 (2005) pp. 183- 191.
- [1.8] Roxborough F.F.: Breaking coal and rock. Australasian Coal Mining Practice (chapter 9).
- [1.9] Tham L.G., Yang T.H., C.A. Tang: Progressive failure of jointed rocks. Int. J. Rock Mech. Min. Sci. Vol. 41, No. 3. Paper 1A 30 — SINOROCK'2004 Symposium. CD-ROM, 2004 Elsevier Ltd.
- [1.10] Thuro K., Saun G.: Drillability in hard rock drill and blast tunneling. Felsbau 14 (1996) Nr. 2.
- [1.11] Tonon F., Amadei B.: Stress in anisotropic rock masses: an engineering perspective building on geological knowledge. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 40 (2003), pp. 1099-1120.
- [1.12] Wang D.H., Ramulu M., Arola D.: Orthogonal cutting mechanisms of graphite/epoxy composite. Part I: Unidirectional laminate. International

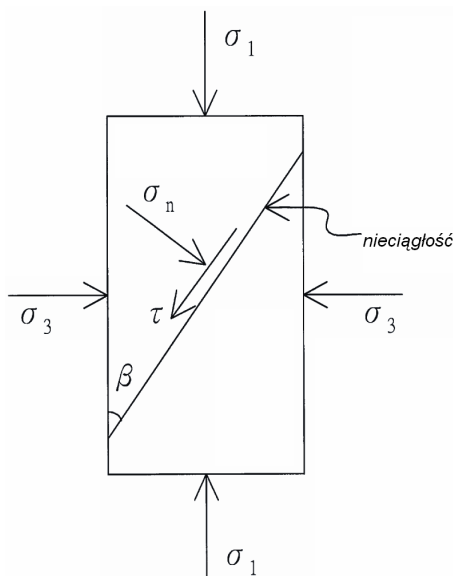
Journal of Machine Tools & Manufacture, Vol. 35, No. 12, pp. 1623-1638, 1995, Pergamon, Elsevier Science Ltd.

[1.13] Wang X.M., Hang L.C.: An experimental investigation into the orthogonal cutting of unidirectional fibre reinforced plastics. International Journal of Machine Tools & Manufacture 43 (2003) pp. 1015-1022.

[1.14] Wittke W.: Rock mechanics. Berlin: Springer, 1990.

2. Modele teoretyczne ośrodka skalnego anizotropowego

Badania doświadczalne wykazują (np. [2.7]), że skały anizotropowe przejawiają największą wytrzymałość na ściskanie w kierunku prostopadłym do uwarstwienia ($\beta = 90^\circ$), zaś najmniejszą w kierunku tworzącym do uwarstwienia kąt $\beta = \sim 30^\circ$ (rys.2.1).

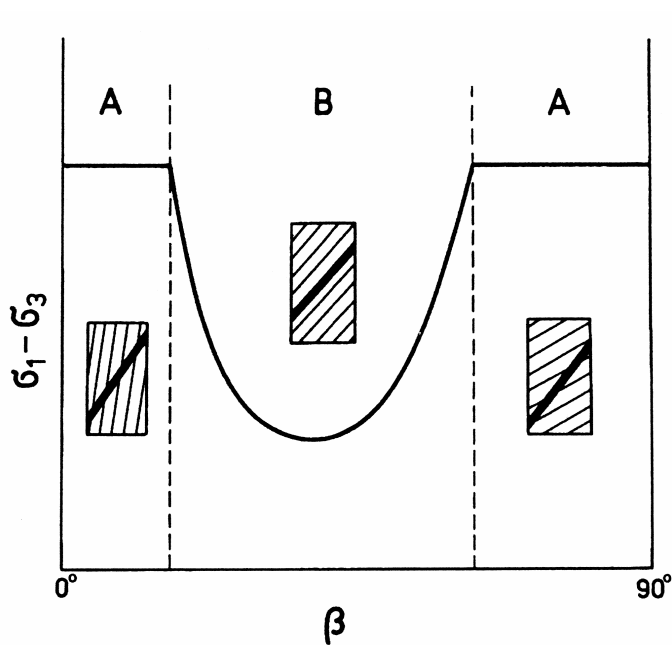


Rys. 2.1 Rozkład naprężeń w skale uwarstwionej

Większość skał osadowych i metamorficznych wykazuje cechy ośrodków transwersalnie izotropowych lub, tak jak np. węgle, ortotropowych [2.7].

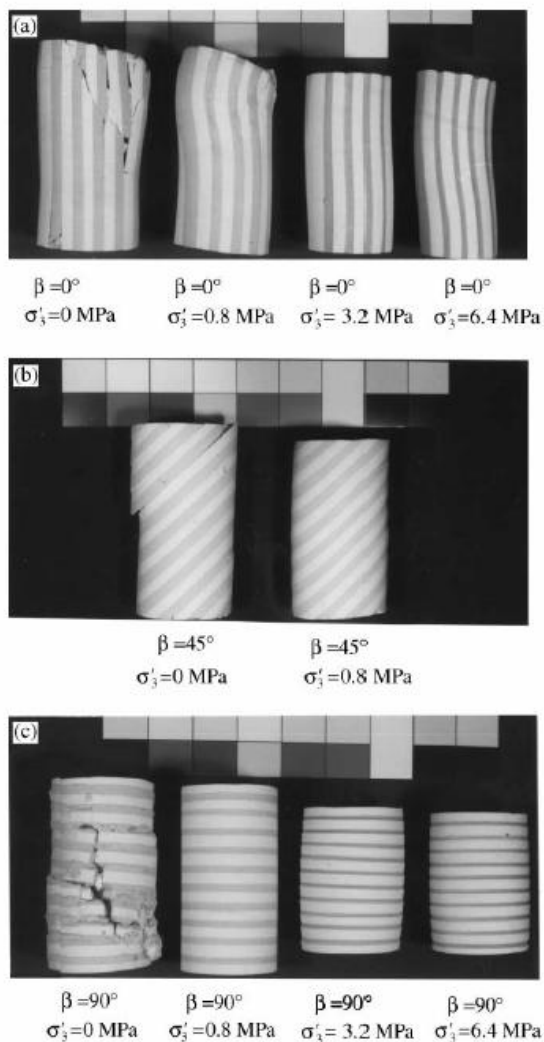
Dla skał transwersalnie izotropowych, najmniejsze wartości wytrzymałości przy ściskaniu odpowiadają najczęściej kątom nachylenia płaszczyzn osłabienia względem kierunku działania największego

naprężenia głównego σ_1 , z przedziału $\beta \in [30^\circ, 45^\circ]$. Zniszczenie skały uwarstwionej przy ściskaniu następuje zwykle przez pęknięcie rozdzielcze w płaszczyznach osłabienia (dla $\beta = 0^\circ \div 15^\circ$), poślizg w płaszczyźnie (-ach) osłabienia (dla $\beta = 15^\circ \div 45^\circ (60^\circ)$) i pęknięcie „ścięciowe” biegnące w poprzek warstwowania i zorientowane względem kierunku największego naprężenia głównego pod kątem $\theta = 20^\circ \div 30^\circ$ (dla $\beta = 60^\circ \div 90^\circ$) [2.7], jak na rys. 2. 2



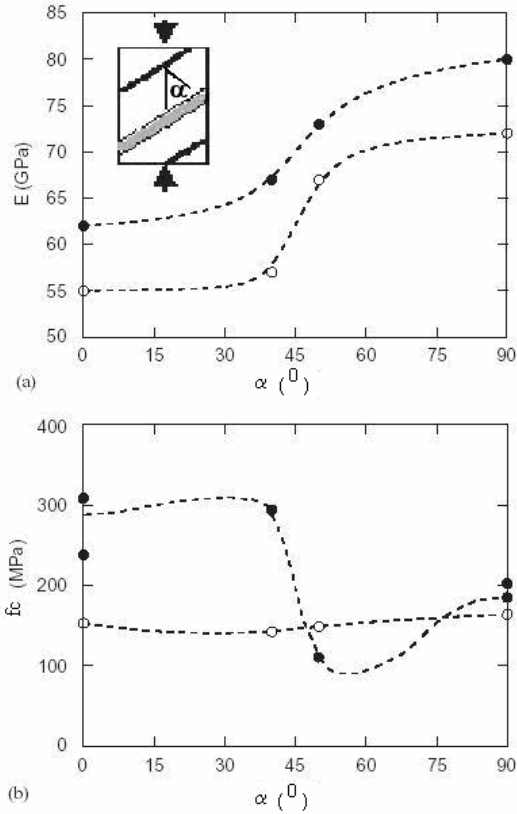
Rys. 2.2. Wpływ kąta uwarstwienia skały β , na jej wytrzymałość [2.7]

Wyniki badań doświadczalnych, dla modelowych skał uwarstwionych, nad kształtowaniem się trajektorii zniszczenia, zależnie od kierunku uwarstwienia, ilustruje rysunek 2.3.



Rys. 2.3. Wpływ kierunku uwarstwienia materiału na proces zniszczenia próbki, przy ścisnaniu [2.25]. Materiał modelowy.

Jak się sugeruje w pracy [2.9], bardziej precyzyjnie można określić położenie minimum wytrzymałości materiału dla kąta określanego z zależności $\beta = 45^\circ - \phi/2$, gdzie ϕ jest kątem tarcia wzdłuż uprzywilejowanej płaszczyzny (zniszczenia lub poślizgu).



Rys. 2.4. Wpływ kierunku uwarstwienia skał anizotropowych α ($\alpha = 90^\circ - \beta$) na kształtowanie się ich parametrów wytrzymałościowych [2.3]

Zmianę wytrzymałości niektórych, kruchych skał anizotropowych, w zależności od kierunku działania obciążenia, dobrze tłumaczy teoria Griffitha w postaci oryginalnej i/lub w zmodyfikowanej przez McClintocka i Walsh. Zgodnie z tą teorią, zniszczenie zasadniczo inicjowane jest przez mikroszczelinki występujące w płaszczyznach uprzywilejowanego uwarstwienia (foliacji, laminacji, łupkowatości), tzw. szczeliny pierwszego rzędu. Proces zniszczenia skał uwarstwionych, może być inicjowany również przez mikroszczelinki Griffithowskie drugiego rzędu, zorientowane przypadkowo, występujące poza systemem

płaszczyzn uprzywilejowanych. Płaszczyzny te mimo wszystko odgrywają bardzo istotną rolę w procesie rozwoju spękań i propagacji zniszczenia stanowiąc ognisko redystrybucji naprężeń w sąsiedztwie propagującej mikroszczelinki i stymulując lub hamując proces pęknięcia [2.7].

Jak wspomniano wcześniej, skały charakteryzują się największą odkształcalnością podłużną i poprzeczną w kierunkach prostopadłych do uwarstwienia, najmniejszą natomiast, w kierunku równoległym do uwarstwienia. Zwykle tym też kierunkom, odpowiadają odpowiednio najmniejsze i największe wartości modułu Younga. Przy czym anizotropia odkształceniowych cech skał jest zwykle silniejsza od anizotropii wytrzymałościowej.

Istnieje szereg modeli skał anizotropowych (np. [2.5, 2.7-2.9, 2.12, 2.25]). Zakłada się w nich np. występowanie płaszczyzn osłabienia, na których może dojść do zniszczenia, czy np. teorii traktujących skałę jako ośrodek ciągły, którego kierunkowy rozkład wytrzymałości opisany jest za pomocą tensorów mikrostruktury różnych rzędów. Istnieje przy tym szereg wywodzących się z tych teorii warunków stanu granicznego, jak i warunków wytrzymałościowych czysto empirycznych. W polskiej literaturze, szczegółowo zagadnienia te były analizowane np. w pracy [2.7].

Do bardziej znanych modeli takich ośrodków, należy model materiału o pojedynczej płaszczyźnie osłabienia, opracowany przez Jaegera [2.5]. Zakładając, że w materiale o naturalnej wytrzymałości na ścinanie τ_0 i współczynniku tarcia wewnętrznego $\mu \equiv \tan \varphi$, występuje płaszczyzna (lub zespół równoległych płaszczyzn) o mniejszej wytrzymałości na ścinanie τ_{0j} i współczynniku tarcia wewnętrznego

$\mu = \operatorname{tg} \varphi_j$ (gdzie φ_j jest kątem tarcia wewnętrznego w płaszczyźnie osłabienia), Jaeger zaproponował warunek w postaci

$$\tau_m \sin(2\beta + \varphi_j) = \tau_{0j} \cos \varphi_j + \sigma_m \sin \varphi_j \quad (2.1)$$

gdzie:

$\tau_m = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ - maksymalne naprężenie ścinające,

$\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ - naprężenie średnie,

β - kąt zorientowania płaszczyzny zmniejszonej spójności względem kierunku największego naprężenia głównego (σ_1).

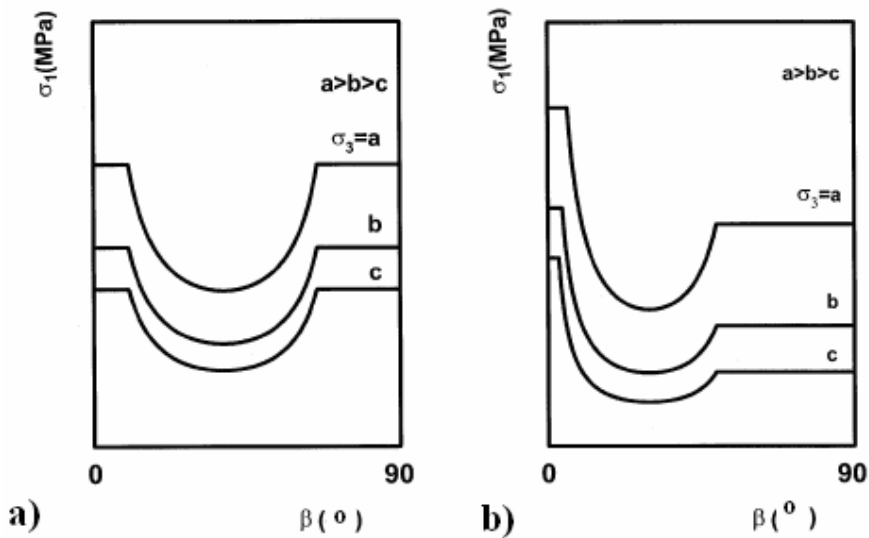
Model ten można stosować jedynie do materiałów o płaszczyznach osłabienia wyraźnie zaznaczonych, usytuowanych w jednym kierunku.

Jako bardziej uniwersalny, wprowadzając do modelu materiału, zmienność kohezji τ_0 w sposób ciągły w funkcji kierunku β , w postaci:

$$\tau_0(\beta) = \tau_0' - \tau_0'' \cos 2(\beta_0 - \beta) \quad (2.2)$$

Jaeger wprowadził zmodyfikowany drugi warunek zniszczenia materiałów anizotropowych, w postaci:

$$(\tau_m + \tau_0'' \sin 2\beta) \sin 2\beta_0 + (\mu \tau_m + \tau_0'' \cos 2\beta) \cos 2\beta_0 = \tau_0' + \mu \sigma_m \quad (2.3)$$



Rys. 2.5. Wpływ kąta uwarstwienia β materiału na kształtowanie się jego wytrzymałości, wg pierwotnego a) oraz zmodyfikowanego b), warunku Jaegera, wg [2.25]

Z kolei McLaomore i Gray zaobserwowali, że dla niektórych rodzajów skał, nie tylko kohezja ale i kąt tarcia wewnętrznego zmienia się w funkcji kąta β . Charakter tej zmienności opisali odpowiednimi równaniami [2.8]

$$\tau_0 = A_{1,2} - B_{1,2}[\cos 2(\xi - \beta)]^n \quad (2.4)$$

oraz

$$\text{tg}\varphi = C_{1,2} - D_{1,2}[\cos 2(\xi' - \beta)]^n \quad (2.5)$$

gdzie

A_1 i B_1 – stałe opisujące zmienność τ_0 w przedziale $0^\circ \leq \beta \leq \xi$,

A_2 i B_2 - stałe opisujące zmienność τ_0 w przedziale $\beta \in (\xi, 90^\circ]$,

n - współczynnik anizotropii ($n \geq 1$)

Stałe C i D opisują zmienność $\text{tg}\varphi$ w przedziałach, odpowiednio, $\beta \in [0^0, \zeta']$ i $\beta \in (\zeta', 90^0]$.

Stąd też warunek stanu granicznego zaproponowali w postaci [2.8]:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2(\tau_0 + \sigma_3 \text{tg}\varphi)}{\text{tg}^2\varphi - \sqrt{\text{tg}\varphi + 1}} \quad (2.6)$$

w którym wielkości τ_0 i $\text{tg}\varphi$ są funkcjami kąta β , wyrażonymi równaniami 2.4 i 2.5.

Przykładem warunku empirycznego, może być warunek podany przez Hoek i Brown [2.4]. Wychodząc z założenia, że wyrażające wytrzymałość trójosiową skał warstwowych, parametry m i s muszą przyjmować różne wartości dla różnych kierunków β , zaproponowali warunek wytrzymałościowy w postaci:

$$F_{\sigma_1} = \sigma_3 + \sqrt{m(\beta)\sigma_c\sigma_3 + s(\beta)\sigma_c^2} \quad (2.7)$$

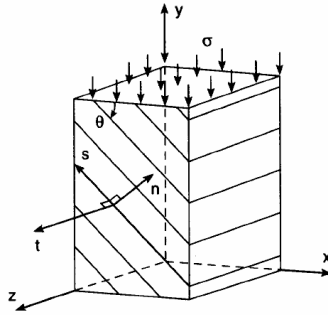
gdzie:

σ_c - granica wytrzymałości skały nienaruszonej, na jednoosiowe ściskanie,

m - stała empiryczna, zależna od skały,

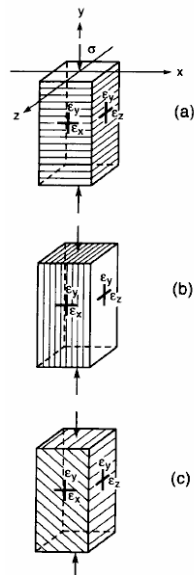
s - stała zależna od stopnia spękania górotworu.

Dla skał transwersalnie izotropowych (rys. 2.6) poddanych jednoosiowemu ścisnaniu, Amadei [2.2] zaproponował teoretyczny warunek wytrzymałościowy takiego ciała. Parametry modelu zostały zidentyfikowane doświadczalnie za pomocą trzech rodzajów prób (rys. 2.7).



Rys. 2.6. Model skały transwersalnie izotropowej zaproponowany przez Amadei [2.2]

W badaniach doświadczalnych, próbie jednoosiowego ściskania, poddano próbki uwarstwione pod kątem $\theta = 0^0$ i 90^0 oraz z przedziału $0-90^0$ (jak na rys. 2.7).



Rys. 2.7. Układ warstw próbek skał osadowych (traktowanych jako transwersalnie izotropowe), poddanych jednoosiowemu ściskaniu przez Amadei [2.2]: a) $\theta = 0^0$ b) $\theta = 90^0$, c) $\theta \neq 0^0$ i 90^0

Pomiędzy odkształceniami a naprężeniami zachodzą związki [2.2]

$$\varepsilon_x = a_{12}\sigma ; \varepsilon_y = a_{22}\sigma ; \varepsilon_z = a_{23}\sigma ; \gamma_{xy} = a_{26}\sigma \quad (2.8)$$

Gdzie

$$a_{12} = -\frac{\nu'}{E'} \sin^4 \theta - \frac{\nu'}{E'} \cos^4 \theta + \frac{\sin^2 2\theta}{4} \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{E'} - \frac{1}{G'} \right)$$

$$a_{22} = \frac{\cos^4 \theta}{E'} + \frac{\sin^4 \theta}{E'} + \frac{\sin^2 2\theta}{4} \left(\frac{1}{G'} - 2 \frac{\nu'}{E'} \right)$$

$$a_{23} = -\frac{\nu'}{E'} \cos^2 \theta - \frac{\nu'}{E'} \sin^2 \theta$$

$$a_{26} = \sin 2\theta \left[\cos^2 \theta \left(\frac{1}{E'} + \frac{\nu'}{E'} \right) - \sin^2 \theta \left(\frac{1}{E} + \frac{\nu'}{E'} \right) \right] - \frac{\sin 2\theta \cos 2\theta}{2G'} \quad (2.9)$$

Przy czym

E , E' - moduł Younga w kierunku transwersalnej izotropii oraz normalnym do tej powierzchni,

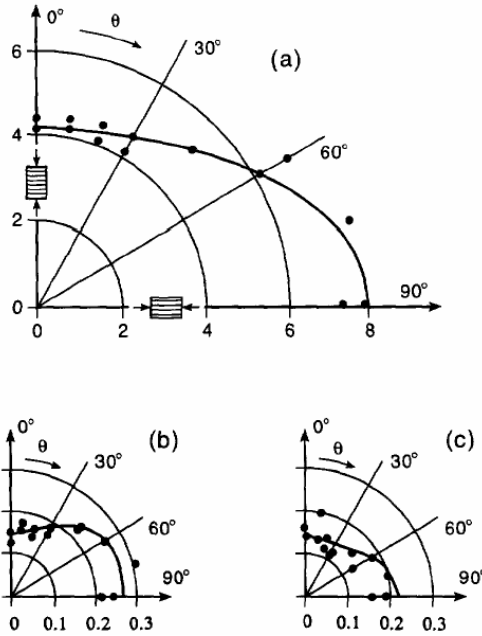
ν , ν' - liczba Poissona charakterystyczna dla powierzchni transwersalnej izotropii oraz w płaszczyźnie prostopadłej do niej,

G' - moduł ścinania w płaszczyźnie normalnej do transwersalnej izotropii.

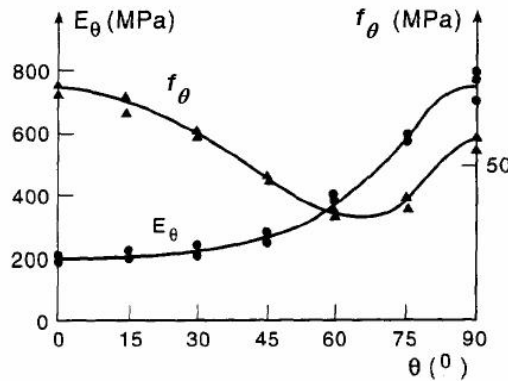
We współrzędnych XYZ, wartości podstawowych parametrów charakteryzujących skałę transwersalnie izotropową wyznaczyć można z zależności [2.2]:

$$E_\gamma = \frac{1}{a_{22}} ; \nu_{yx} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} ; \nu_{yz} = -\frac{a_{23}}{a_{22}} \quad (2.10)$$

Te trzy wielkości zależą od wartości kąta θ , co ilustruje rys. 2.8, rys.2.9 [2.2].



Rys. 2.8. Wpływ kąta θ na kształtowanie się: modułu Younga E_γ (a), liczby Poissona ν_{yx} (b) i ν_{yz} (c), wg [2.2] (w oparciu o [2.13])- linia ciągła ilustruje rozkład wartości prognozowanych



Rys. 2.9. Kształtowanie się modułu Younga $E_\theta = E_y$, oraz wytrzymałości skały f_θ , zależnie od kąta θ -położenia płaszczyzn uwarstwienia, wg [2.2] (w oparciu o [2.1])

Pietruszczak i Mróz [2.10, 2.11] zaproponowali anizotropowy warunek wytrzymałościowy konstruowany na podstawie warunku izotropowego, przy założeniu kierunkowości parametrów materiałowych. Kierunkowość tę można opisać za pomocą skalarnych parametrów anizotropii η i ξ , które określane są za pomocą mieszanych niezmienników tensora naprężenia i tensora mikrostruktury materiału. Warunek ten, w postaci ogólnej można zapisać:

$$F = F(\sigma, a) = F(\text{tr}\sigma, \text{tr}\sigma^2, \text{tr}\sigma^3, \eta, \xi) = 0 \quad (2.11)$$

gdzie:

a -tensor mikrostruktury,

$\text{tr}\sigma$, $\text{tr}\sigma^2$, $\text{tr}\sigma^3$ - odpowiednio, pierwszy, drugi i trzeci niezmiennik tensora naprężenia σ ,

$$\eta = \frac{\text{tr}(a\sigma^2)}{\text{tr}\sigma^2}; \quad \xi = \frac{\text{tr}(a^2\sigma^2)}{\text{tr}\sigma^2} \quad (2.12)$$

Pietruszczak i inni [2.12] przyjęli także, że określający wpływ orientacji obciążenia względem osi materiałowych, parametr anizotropii η , dany może być funkcją:

$$\eta = \bar{\eta} \left[1 + A_{ij} l_i l_j + b_1 (A_{ij} l_i l_j)^2 + b_2 (A_{ij} l_i l_j)^3 + \dots \right] \quad (2.13)$$

gdzie:

A_{ij} - dewiatorowa część tensora mikrostruktury opisującej fluktuacje w rozkładzie $\eta(l)$ względem średniej $\bar{\eta}$.

W konsekwencji zaproponowali warunek wytrzymałościowy w postaci:

$$F = c_1 \left(\frac{J_2^{1/2}}{g(\theta) \sigma_c} \right) + c_2 \left(\frac{J_2^{1/2}}{g(\theta) \sigma_c} \right)^2 - \left(c_3 + \frac{I}{\sigma_c} \right) = 0 \quad (2.14)$$

gdzie:

J_2 - drugi niezmiennik dewiatora tensora naprężenia,

I - pierwszy niezmiennik tensora naprężenia,

θ - kąt Lodego,

$\sigma_c = \sigma_c(\beta)$ wytrzymałość graniczna na jednoosiowe ściskanie, zależna od wzajemnej orientacji tensorów naprężenia i mikrostruktury, równa:

$$\sigma_c = \bar{\sigma}_c \left[1 + A_{ij} l_i l_j + b_1 (A_{ij} l_i l_j)^2 + b_2 (A_{ij} l_i l_j)^3 + \dots \right] \quad (2.15)$$

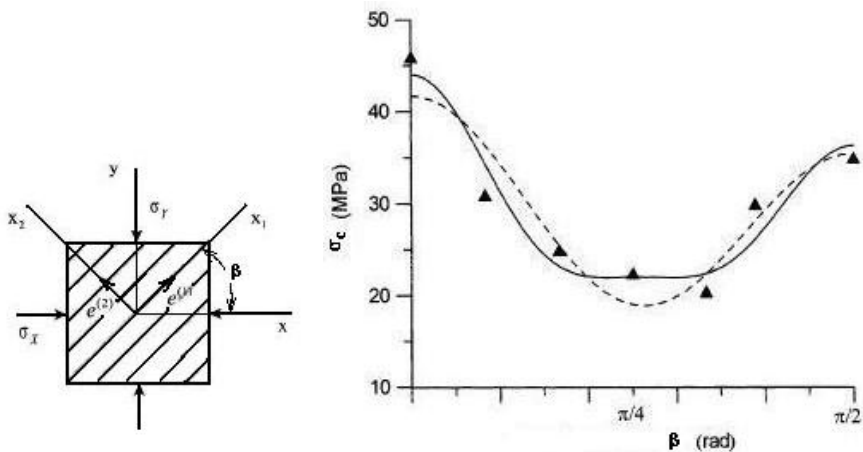
Wyniki badań doświadczalnych, na ściskanie jednoosiowe, udało się przy tym aproksymować równaniem funkcji (2.15), w którym

$$A_{ij} l_i l_j = A_1 (1 - 3l_2^2); \quad l_2^2 = \sin^2 \beta \quad (2.16)$$

Tak, że:

$$\sigma_c = \bar{\sigma}_c \left[1 + A_1 (1 - 3 \sin^2 \beta) + b_1 A_1^2 (1 - 3 \sin^2 \beta)^2 + b_2 A_1^3 (1 - 3 \sin^2 \beta)^3 + b_3 A_1^4 (1 - 3 \sin^2 \beta)^4 \right] \quad (2.17)$$

co ilustruje rys. 2.10 [2.12].



Rys. 2.10. Zmienność wytrzymałości na ściskanie σ_c w funkcji kąta orientacji uwarstwienia materiału β [2.12]

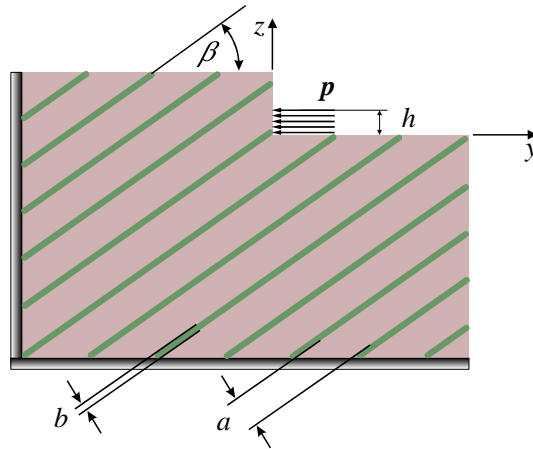
2.1 Dobór modelu anizotropowego ośrodka skalnego do celów symulacji numerycznej procesu skrawania

Z uwagi na dużą rozpiętość budowy jak i właściwości skał anizotropowych, istnieją spore trudności w prowadzeniu symulacji numerycznych zachowania się takich skał pod działaniem określonych obciążeń zewnętrznych. Powoduje to, że często zachodzi potrzeba przyjmowania w symulacjach znaczących uproszczeń co do budowy samych skał jak i przyjmowanych modeli mechanicznych. Mając na uwadze, że większość skał osadowych i metamorficznych wykazuje cechy ośrodków transwersalnie izotropowych, w analizach numerycznych, dość powszechnie zakłada się taki właśnie model struktury.

Do celów symulacji przyjęto podobne założenia jak poczynione w pracy [2.19]. Założenia te, były zbliżone do stosowanych przez innych badaczy (np. [2.19]), gdzie do celów symulacji zachowania się granitu (rys. 1.1), z uwagi na występowanie płaszczyzn uprzywilejowanych przyjęto, że bloki materiału pomiędzy tymi płaszczyznami podlegają prawu Coulomba- Mohra, natomiast właściwości materiału płaszczyzn uprzywilejowanych, mogą być opisane modelem Coulomba (do celów symulacji numerycznych przyjęto tam, dla litego granitu, kohezję równą 66MPa, kąt tarcia wewnętrznego równy 31° oraz wytrzymałość na rozrywanie równą 11,3MPa. Dla materiału warstwy przyjęto z kolei; kohezję równą 1,5MPa, kąt tarcia wewnętrznego równy 25° oraz wytrzymałość na rozrywanie równą 0,04MPa).

Tak więc idąc śladem powyższych rozważań, oraz bazując na wynikach badań [2.19], do celów prowadzonej analizy numerycznej, procesu formowania wióra, podczas skrawania anizotropowego materiału skalnego, przyjęto założenia, że:

- skała jest materiałem o budowie warstwowej (jak dla skał osadowych), zbudowanym z warstw materiału bazowego o większej grubości, przedzielonych warstwami materiału o znacznie mniejszej grubości, tworzących powierzchnie tzw. „uprzywilejowane”. Grubość materiału w poszczególnych warstwach jest stała (rys. 2.11). Właściwości materiałów poszczególnych warstw przyjęto jako izotropowe.
- materiał skalny w poszczególnych warstwach oddzielnie, podlega warunkowi plastyczności JP (J. Podgórskiego [2.14]), różne są jednak parametry mechaniczne skały w poszczególnych warstwach,
- kierunek uwarstwienia skały względem kierunku skrawania β , jest zmieniany w każdym przypadku analizy numerycznej. Rozpatrywane wartości tego kąta, to 0° , 45° , 90° , 135° ,
- przyjęto przypadek skrawania ortogonalnego, prowadzonego z założoną, stałą głębokością skrawania. Standardowo, oddziaływanie ostrza na skałę (którego wartość kąta natarcia γ przyjęto we wszystkich przypadkach analizy równy 0°) symulowano w postaci oddziaływania obciążenia ciągłego p , przyłożonego na połowie wysokości progu skalnego h , odpowiadającego założonej głębokości skrawania, jak na rys. 2.11 (w rzeczywistości, kontakt powierzchni natarcia ze skałą, bezpośrednio przed momentem odspojenia większego elementu wióra, wynosi około $1/3 \div 1/2$ głębokości skrawania).



Rys. 2.11. Zastępczy, mechaniczny model oddziaływania powierzchni natarcia ostrza na uwarstwiony materiał skalny (np. [2.6])

Jak już wspomniano, dla modelowej skały (właściwie jej poszczególnych warstw), jako kryterium stanu granicznego zaproponowano warunek PJ opracowany przez J. Podgórskiego [2.20, 2.14], które w ogólnej formie przybiera postać:

$$A_2 \tau_o^2 + A_1 \tau_o + A_0 = 0, \quad (2.18)$$

gdzie:

A_0 - jest funkcją ciśnienia hydrostatycznego,

A_1, A_2 - są funkcjami zależnymi od niezmienników dewiatora naprężeń (J_2, J_3).

W przypadku np. betonów czy skał, kryterium to przyjmuje postać:

$$C_2 \tau_o^2 + C_1 P(J) \tau_o + \sigma_o - C_o = 0, \quad (2.19)$$

gdzie:

$$P(J) = \cos\left(\frac{1}{3} \arccos \alpha J - \beta\right), \quad (2.20)$$

$$J = \cos 3\varphi = 3\sqrt{3} \frac{J_3}{2J_2^{3/2}},$$

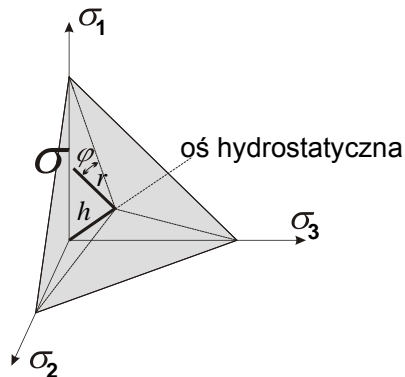
$$\sigma_o = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) / 3 - \text{naprężenie średnie}, \quad (2.21)$$

$$\tau_o = \sqrt{\frac{2J_2}{3}} - \text{oktaedryczne naprężenie styczne},$$

$C_0, C_1, C_2, \alpha, \beta = \text{const.}$,

φ – współrzędna w cylindrycznym układzie współrzędnych (rys. 2.12),

J_2, J_3 – niezmienniki dewiatora naprężenia.



Rys. 2.12. Układ współrzędnych kartezjańskich i walcowych (h, r, φ) w przestrzeni naprężeń głównych [2.14].

Jak wynika z równań (2.19 i 2.20), wybrane kryterium zniszczenia zawiera pięć parametrów : C_0 , C_1 , C_2 , α oraz β , których wartości muszą być wyznaczone na podstawie badań eksperymentalnych.

Dla założonych parametrów wytrzymałościowych skrawanego materiału, tj. wytrzymałości na jednoosiowe rozciąganie f_t , oraz na jednoosiowe ściskanie f_c , dla płaskiego stanu odkształcenia można przyjąć (jak w [2.14]), że

$$f_{0c} = 1,25f_c, f_{cc} = 1,1f_c, f_{vt} = f_t, \quad (2.22)$$

gdzie

f_{cc} – wytrzymałość na dwuosiowe ściskanie, dla $\sigma_1/\sigma_2 = 1:1$,

f_{0c} – wytrzymałość na dwuosiowe ściskanie, dla $\sigma_1/\sigma_2 = 2:1$,

f_{vt} – wytrzymałość na rozciąganie w stanie trójosiowym ($\sigma_1/\sigma_2/\sigma_3 = 1/1/1$).

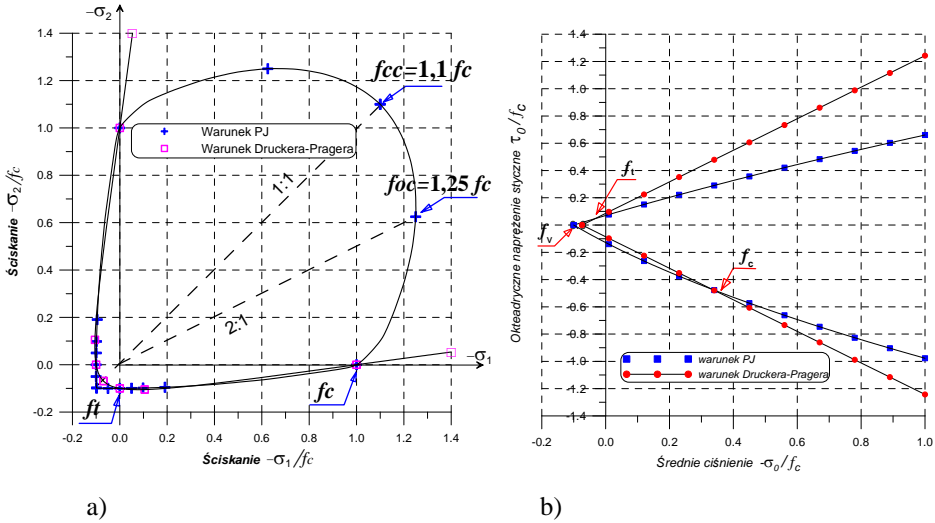
W układzie współrzędnych (σ_1, σ_2), zależności te ilustruje rysunek 2.13.

Wartości współczynników C_0 , C_1 , C_2 , można wyznaczyć z zależności (por. [2.14] oraz Dodatek 1):

$$\begin{aligned} C_0 &= f_t, \\ C_1 &= \frac{\sqrt{2}}{P_0} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{f_t/f_{cc}}{f_{cc}/f_t - 1} \right), \\ C_2 &= \frac{9}{2} \frac{f_t/f_{cc}}{f_{cc} - f_t}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

przy czym

$$P_0 = P(\varphi = 0) = \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\alpha - \beta\right).$$



Rys. 2.13. Obwiednia powierzchni granicznej dla dwuosiowego stanu naprężeń (a), przekrój powierzchni granicznej płaszczyzną zawierającą oś hydrostatyczną (b) oraz położenie charakterystycznych punktów odpowiadających cechom wytrzymałościowym materiału [2.19]

Z kolei wartości współczynników α , β , wyznaczyć można rozwiązując metodą kolejnych przybliżeń, następujący układ równań nieliniowych lub stosując formuły P. Lewińskiego (por. Dodatek 1):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x &= \frac{\lambda \cos \beta - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) - \lambda \sin \beta}, \\ \operatorname{tg} \beta &= \frac{2\lambda \cos x - \sqrt{3}\theta}{\theta - 2\lambda \sin x}, \\ \alpha &= \cos 3x, \end{aligned} \quad (2.24)$$

wyznaczając wcześniej wartości współczynników λ oraz θ , z zależności:

$$\lambda = \frac{f_{cc}}{f_t} \frac{\frac{1}{3} + \frac{f_t}{f_c} - \frac{f_t f_c}{(1 - f_t/f_{cc})f_{cc}^2}}{1 + \frac{2f_{cc}}{3f_t} - \frac{1}{1 - f_t/f_{cc}}}, \quad (2.25)$$

$$\theta = \frac{\sqrt{3}f_{0c}}{2f_t} \frac{\frac{1}{3} + \frac{f_t}{f_c} - \frac{f_t f_c}{(1 - f_t/f_{cc})f_{cc}^2}}{1 + \frac{f_{0c}}{2f_t} - \frac{3f_{0c}^2}{4(1 - f_t/f_{cc})f_{cc}^2}}. \quad (2.26)$$

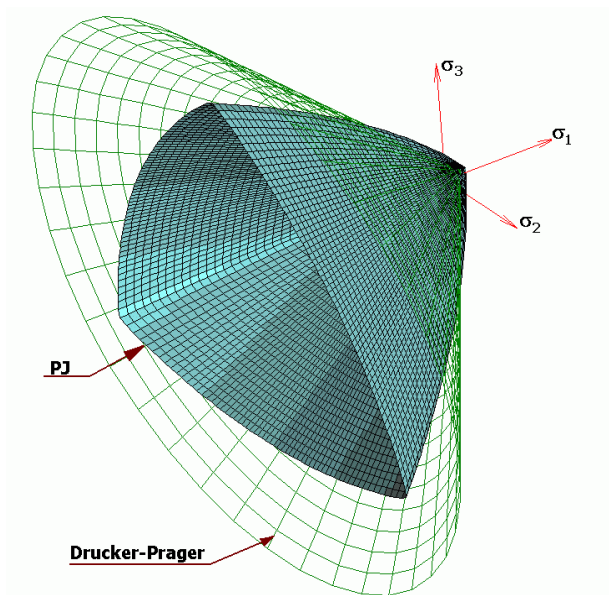
Iteracje opisane równaniami (2.24) rozpoczynamy przyjmując początkową wartość $\beta = 0$. Proces jest szybko zbieżny i po kilku iteracjach otrzymujemy wartości stałych α i β , z błędem $\varepsilon < 10^{-7}$.

Po określeniu stałych materiałowych C_0 , C_1 , C_2 , α , β , można przystąpić do określenia wyężenia materiału [2.14, 2.19]. Wyliczamy w tym celu wartości niezmienników dewiatora naprężenia, J_2 , J_3 , a następnie wartości naprężeń okteadrycznych (2.21) i wartość funkcji przekroju powierzchni granicznej $P(J)$ (2.19). Wartość graniczną naprężenia stycznego obliczmy rozwiązując równanie kwadratowe względem τ_{og} (por. 2.19) :

$$C_2\tau_{og}^2 + C_1P(J)\tau_{og} + \sigma_o - C_o = 0. \quad 2.27$$

Warunek **PJ** (szczegółowo opisany np. w [2.14, 2.19÷2.21,]) został zaproponowany w formie wyrażającej zależność trzech alternatywnych niezmienników (σ_0 , τ_0 , J) tensora naprężenia. W równaniu tym występuje pięć stałych: α , β , C_0 , C_1 , C_2 , które należy wyznaczyć na podstawie

wyników eksperymentów. J. Podgórski proponuje wyznaczyć te stałe na podstawie takich cech materiału jak wytrzymałość na ściskanie w stanie jednoosiowego naprężenia f_c , wytrzymałość na rozciąganie w jednoosiowym stanie naprężenia f_t , wytrzymałość na ściskanie f_{cc} oraz f_{0c} w płaskim stanie naprężenia, przy proporcjach σ_1/σ_2 równych odpowiednio 1/1 oraz 2/1. Piątą wartością niezbędną do wyznaczenia stałych może być wytrzymałość na rozciąganie w stanie trójosiowym przy proporcji $\sigma_1/\sigma_2/\sigma_3 = 1/1/1$, oznaczona jako f_{vt} , którą zgodnie z hipotezą R. M. Haythornthwaite'a (tension cutoff) przyjmujemy jako równą f_t . Materiał o właściwościach zbliżonych do betonu można dosyć dobrze opisać przyjmując zależności: $f_{cc}=1,1 f_c$, $f_{0c}=1,25 f_c$.



Rys. 2.14. Powierzchnie graniczne opisane warunkami Podgórskiego (*PJ*) oraz Druckera- Pragera [2.20]

Powierzchnię graniczną opisaną równaniem (2.16) przedstawia w rzucie izometrycznym rysunek 2.14.

Szczególnymi przypadkami warunku PJ (2.16) są klasyczne kryteria Hubera-Misesa, Tresca'i, Coulomba-Mohra oraz Druckera-Pragera (Hubera-Misesa-Schleichera) [2.14, 2.21].

Literatura:

- [2.1] Alliot D., Bohler J.P.: Evaluation des propriétés mécaniques d'une roche stratifiée sous pression de confinement. Proc. 4th ISRM Congr. Montreaux, pp. 15-22 (1979).
- [2.2] Amadei B.: Importance of Anisotropy When Estimating and Measuring In Situ Stresses in Rock. Int. J. Rock Mech. Sci. & Geomech. Abstr. Vol. 33, No 3, pp. 293-325, 1996, Elsevier Science Ltd.
- [2.3] Chang C., Hamison B.: Non-dilatant deformation and failure in two Long Valley Caldera rocks under true triaxial compression. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 42 (2005) pp. 402-414.
- [2.4] Hoek E. and Brown E.T.: Underground Excavation in Rock, p. 527. The Institution of Mining and Metallurgy, London 1982.
- [2.5] Jaeger J.C.: Shear failure of anisotropic rocks. Geol. Mag. 1960; Vol. 97, pp. 65-72.
- [2.6] Jonak J., J. Podgórski, P. Jaremek: Numeryczna symulacja procesu skrawania skał uwarstwionych. Czasopismo Techniczne, z. 1-M/2005 (rok 102) ISSN 0011-4561, s. 189-193. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej.
- [2.7] Kwaśniewski M.: Zachowanie się skał izo- i anizotropowych w warunkach trójosiowego ściskania. ZN Politechniki Śląskiej, s. Górnictwo, z. 247, Gliwice 2002.
- [2.8] McLamore R., Gray K.E.: The mechanical behavior of anisotropic sedimentary rocks. Trans. Am. Soc. Mech. Eng., Ser. B, Vol. 89, pp. 62-76, 1967.
- [2.9] Nasser M. H.B., Rao K.S., Ramamurthy T.: Anisotropic strength deformational behavior of Himalayan schists. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences 40 (2003) pp. 3-23.
- [2.10] Pietruszczak S. and Mróz Z.: Formulation of anisotropic failure criteria incorporating a microstructure tensor. Computer and Geotechnics, Vol 26, pp. 105-112, 2000.
- [2.11] Pietruszczak S. and Mróz Z.: On failure criteria for anisotropic cohesive-frictional materials. Int. J. Numer. Meth. Geomech., Vol. 25, pp. 509-524, 2001.
- [2.12] Pietruszczak S., Łydźba D., Shao J.F.: Modeling of inherent anisotropy in sedimentary rocks. International Journal of Solids and Structures 39 (2002) pp. 637-648.

- [2.13] Pinto J.L.: Deformability of schistous rocks. Proc. 2nd ISRM Congr., Belgrade, pp. 2-30 (1970).
- [2.14] Podgórski J. General Failure Criterion for Isotropic Media. Journal of Engineering Mechanics ASCE, 111(1985) 2, 188-201.
- [2.14] Podgórski J., J. Jonak, P. Jaremek : Analiza propagacji rysy w uwarstwionym materiale kruchym. Eksploatacja i Niezawodność nr 4/2004, Kwartalnik PAN- Polskie Naukowo-Techniczne Towarzystwo Eksploatacyjne, str. 26-29.
- [2.15] Podgórski J., J. Jonak, P. Jaremek : The strength asymmetry effect in laminar rock-like materials on crack propagation. Mine Planning and Equipment Selection 2004, Proceedings of the Thirteenth International Symposium on Mine Planning and Equipment Selection, Wrocław 1-3 września 2004, str. 129.
- [2.16] Podgórski J., Jonak J. : Influence of strength heterogeneity factor o crack shape in laminar rock- like materials. Symposium on : Multiscale modeling of damage and fracture processes in composite materials-Book of abstracts. IUTAM – International Union of Theoretical and Applied Mechanics. Kazimierz Dolny, Poland, 23-27 May, 2005.
- [2.17] Podgórski J., Jonak J., Jaremek P. : Wpływ warunków brzegowych modelu na kierunek propagacji rysy w uwarstwionym materiale sprężysto-kruchym. III Sympozjum Mechaniki zniszczenia materiałów i konstrukcji. Augustów, 1-4 czerwca 2005.
- [2.18] Podgórski J., Jonak J., Jaremek P., Dey N.C.: The influence of the boundary conditions of a model on the direction of crack propagation in laminar elastic- brittle material. Journal of Mines, Metals& Fuels. Incorporating Indian Mining Journal (II ISSN 0022-275), Vol. 53, Nos. 5&6, May- June 2005, pp. 88-91.
- [2.19] Podgórski J., Jonak J.: Numeryczne badania procesu skrawania skał izotropowych. LTN, Lublin 2004, s. 80.
- [2.20] Podgórski J.: Influence Exerted by Strength Criterion on the Direction of Crack Propagation in the Elastic- Brittle Material. Journal of Mining Science, 38 (4), pp. 374- 380; Jul 2002.
- [2.21] Podgórski J.: Limit state condition and dissipation function for isotropic materials. Archives of Mechanics, 36 (1984), pp. 323-342.
- [2.22] Podgórski J.: The influence of the layer direction in elastic- brittle material on the progress of crack propagation. Minetech, March- April 2005, Volume 26, No 2, pp. 50-54.
- [2.23] Qiu-Ming Gong, Jian Zhao, Yu-Yong Jiao: Numerical modeling of the effects of joint orientation on rock fragmentation by TBM cutters. Tunneling and Underground Space Technology 20 (2005) pp. 183- 191.
- [2.24] Tonon F., Amadei B.: Stress in anisotropic rock masses: an engineering perspective building on geological knowledge. International Journal of Rock Mechanics and Minig Sciences 40 (2003), pp. 1099-1120.

[2.25] Yong Ming Tien, Ming Chan Kuo: A failure criterion for transversely isotropic rocks. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 38 (2001) pp. 399-412.

3. Badania wstępne- identyfikacja parametrów modelu numerycznego

Z uwagi na brak w literaturze polskiej, zadowalających opracowań z tematyki symulacji procesów skrawania kruchych materiałów anizotropowych, w tym zwłaszcza symulacji dotyczących wpływu np. kierunku uwarstwienia materiału, wartości tzw. wskaźnika asymetrii wytrzymałości skały (patrz rys. 1.8) czy warunków prowadzenia symulacji, na przebieg propagacji szczeliny przed ostrzem, towarzyszącej formowaniu elementu wióra, zaistniała potrzeba opracowania odpowiedniej metody obliczeń, począwszy od zagadnień podstawowych tj. określenia np. wpływu sposobu utwierdzenia elementów brzegowych modelu czy doboru stałych materiałowych modelowego materiału, na wyniki symulacji.

Ponieważ przez wielu autorów badań dotyczących zagadnień skrawania materiałów izotropowych (w tym także [3.1]), pozytywnie zweryfikowano przydatność tzw. „metody traconych elementów” do prowadzonych symulacji propagacji szczelin, dlatego też również w prezentowanych badaniach, wykorzystano tę właśnie metodę. Standardowo wykorzystano zatem moduł SSAP0 systemu ALGOR oraz autorskie oprogramowanie J. Podgórskiego. Zadaniem tego oprogramowania było między innymi sprawdzanie wyteżenia, usuwanie „zniszczonych” elementów oraz rejestracja wartości krytycznych siły niszczącej strukturę materiału. Zagadnienia analizowano w płaskim stanie odkształcenia.

W całej analizie, tak jak w pracy Podgórskiego [3.2], przyjęto procedurę analizy procesu pęknięcia, którą można przedstawić w postaci pseudokodu:

repeat

- Zwiększ wartość **Step_No**
- Oblicz naprężenia wywołane jednostkowym obciążeniem p . Jeżeli obliczenia są niewykonalne to **Model_destroyed**
- ***if not Model_destroyed then***
 - Wybierz element modelu, w którym naprężenia zredukowane wyznaczone wg kryterium JP są największe
 - Oblicz siłę wypadkową, która wywołuje krytyczny stan naprężenia w wybranym elemencie
 - Usuń wybrany element

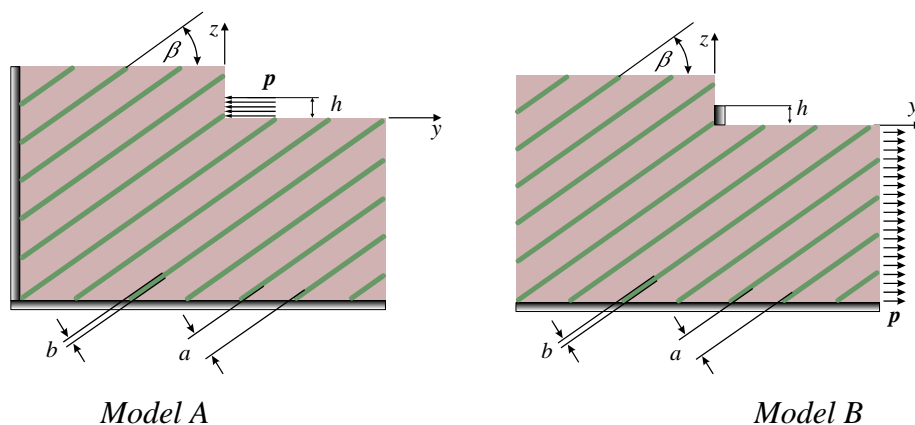
until Model_destroyed or (Step_No>Step_Max)

Analizę przerywano po przebiegu zadanej liczby kroków (**Step_No>Step_Max**), lub w przypadku zniszczenia modelu (**Model_destroyed**). Zarejestrowane wartości obciążenia krytycznego wraz z przemieszczeniem wybranego punktu modelu zapisywano do wykorzystania w dalszej analizie.

3.1. Analiza wpływu warunków brzegowych modelu na przebieg propagacji rysy oraz przebieg siły odspajania

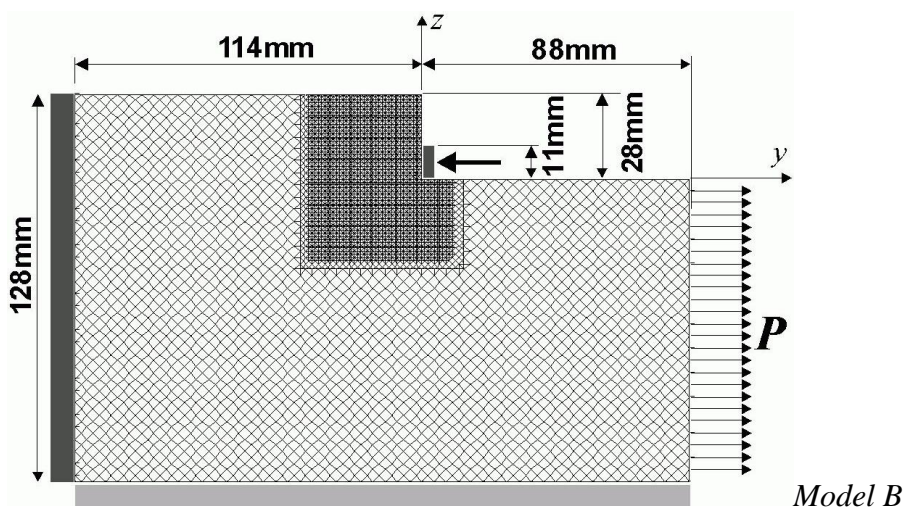
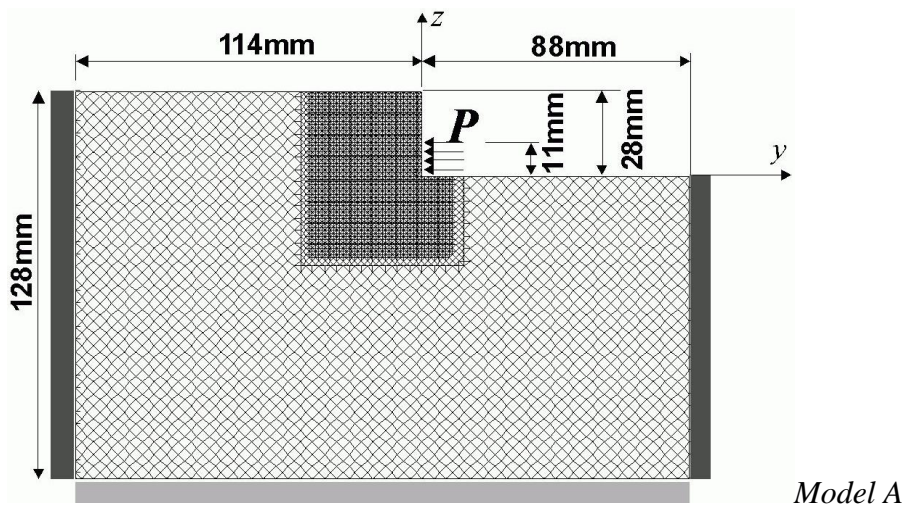
Skuteczne wykorzystanie MES w zagadnieniach symulacji mechaniki pęknięcia materiałów kruchych wymaga znajomości szeregu warunków, które należy spełnić, chcąc uzyskać sensowne wyniki. Tak np.

kształt oraz gęstość siatki elementów skończonych wpływa na jakość rozwiązania jak i otrzymywane z obliczeń, wartości naprężeń krytycznych. Jak wykazuje praktyka, podobnie istotny wpływ na jakość obliczeń, ma sposób przyjęcia warunków brzegowych modelu. Celem wstępnych badań symulacyjnych, było właśnie wykazanie, jak duże rozbieżności mogą wynikać z prowadzonych obliczeń, jeśli zostaną zmienione warunki brzegowe modelu. Zagadnienie to zrealizowano na przykładzie analizy wpływu obciążenia przyłożonego w okolicy progu skalnego (symulującego oddziaływanie ostrza na skałę podczas skrawania), jak na rys. 3.1. Według wcześniejszych założeń, materiał jest niejednorodny, wykazuje budowę warstwową. Układ warstw zamodelowano pod kątem $\beta = 135^{\circ}$ względem kierunku działającego obciążenia. Grubość warstwy materiału bazowego (a , rys.3.1) przyjęto równą 12mm. Grubość warstwy „uprzywilejowanej” b przyjęto równą 4mm.



Rys. 3.1. Model mechaniczny obciążonego progu skalnego: A) praca przy ściskaniu, B) praca przy rozciąganiu [3.3]

Rozpatrzono dwa, różne przypadki warunków brzegowych, różniące się sposobem podparcia brzegu i zwrotem obciążenia zewnętrznego (rys. 3.1, rys.3.2).



Rys. 3.2. Siatka elementów skończonych modeli A i B [3.3]

Przyjęto następujące warunki brzegowe (Tab. 3.1)

<i>Współrzędne brzegu</i>	<i>Model - A</i>	<i>Model - B</i>
$z = -100\text{mm}$	$u_z = 0, \tau_{zy} = 0$	$u_z = 0, \tau_{zy} = 0$
$y = -114\text{mm}$	$u_y = 0, u_z = 0$	$u_y = 0, u_z = 0$
$y = 0\text{mm}, z \in (0, 11\text{mm})$	$\sigma_y = -p, \tau_{yz} = 0$	$u_y = 0, \tau_{yz} = 0$
$y = 88\text{mm}$	$u_y = 0, u_z = 0$	$\sigma_y = p, \tau_{yz} = 0$

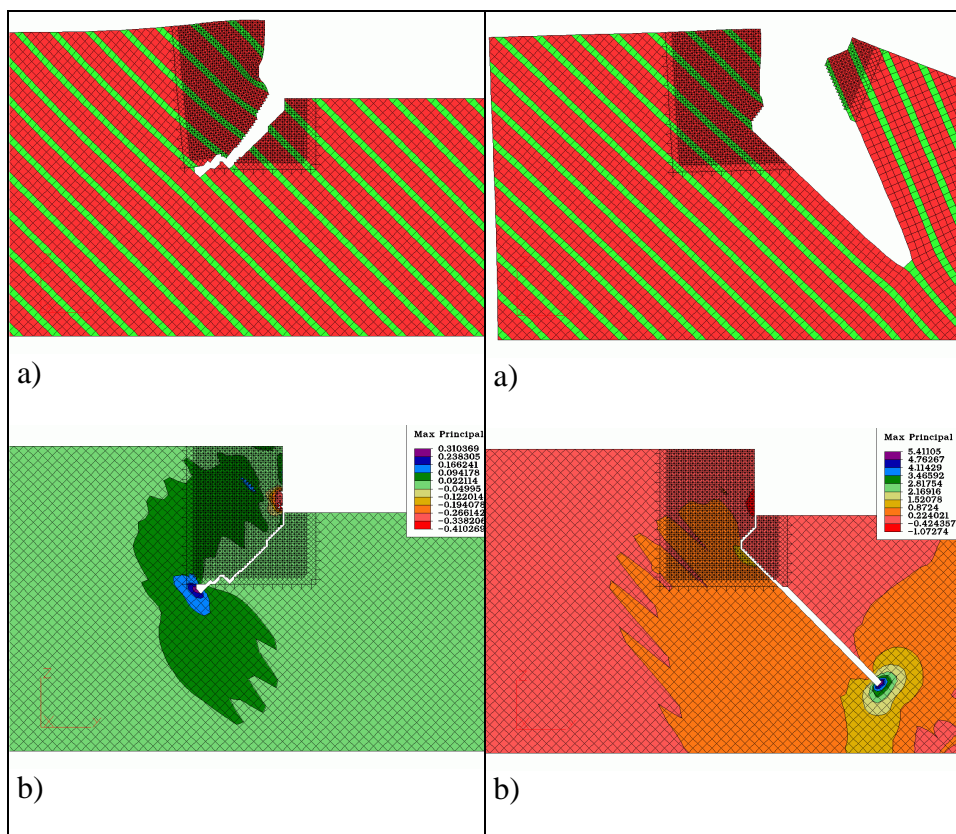
Przy czym p , oznacza stałe naprężenia rozciągające (ściskające).
Pozostałe brzegi są wolne od naprężeń.

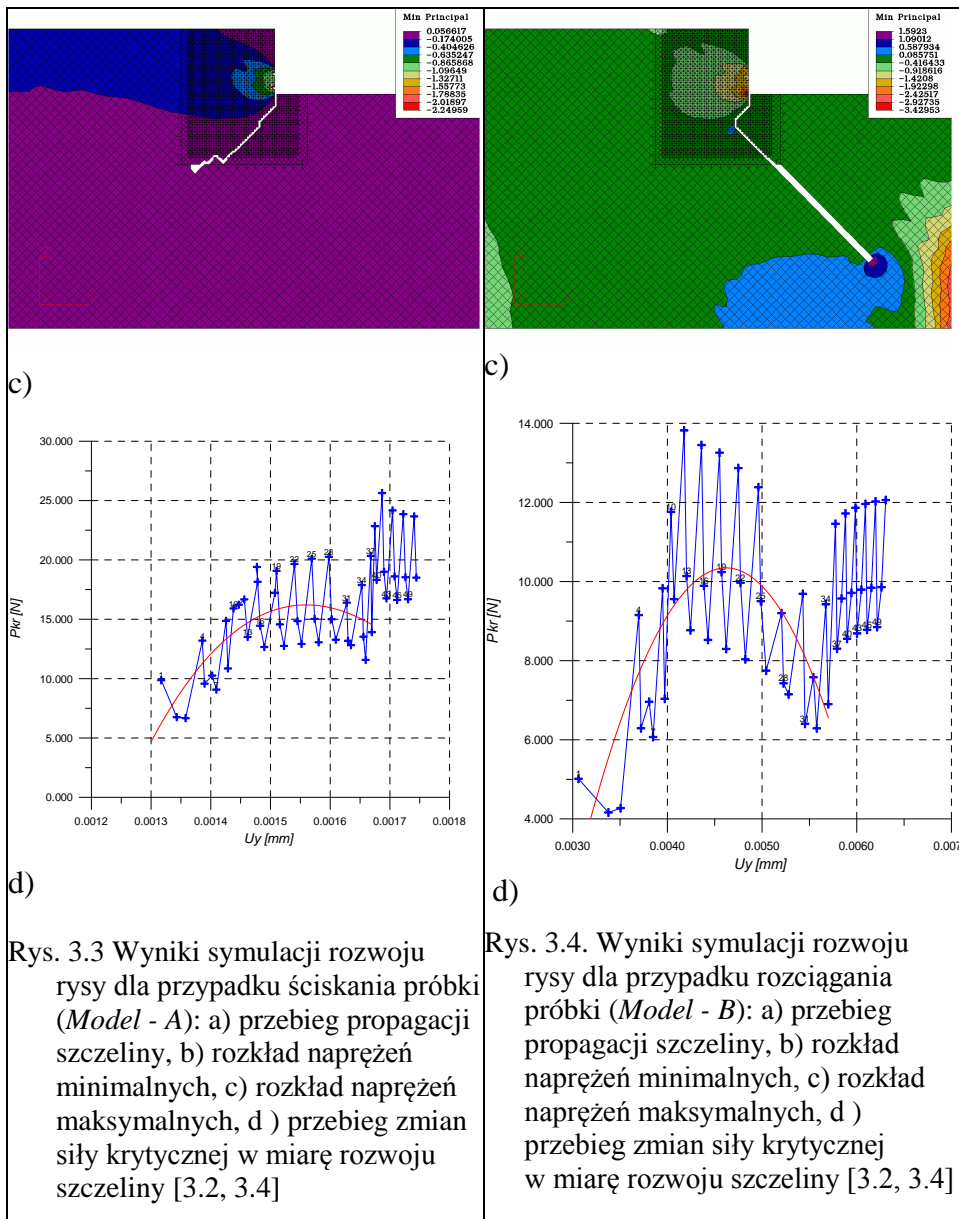
Charakterystyki materiałowe przyjęto następująco:

- dla materiału podstawowego (warstwy o większej grubości, tj. a , rys. 3.1)- wytrzymałość na ściskanie w stanie jednoosiowym $f_c = 20\text{MPa}$, a w stanie dwuosiowym $f_{cc} = 22\text{MPa}$, $f_{0c} = 25\text{MPa}$ oraz wytrzymałość na rozciąganie $f_t = 2\text{MPa}$. Moduł Younga $E = 2 \times 10^4 \text{MPa}$, współczynnik Poissona $\nu = 0,2$.
- dla materiału warstwy „słabszej” (warstwa b , rys.3.1), tworzącej np. wtrącenie (przerost, itp.)- $f_c = 10\text{MPa}$, $f_{cc} = 11\text{MPa}$, $f_{0c} = 12,5\text{MPa}$ oraz wytrzymałość na rozciąganie $f_t = 1\text{MPa}$. Moduł Younga $E = 1 \times 10^4 \text{MPa}$, współczynnik Poissona $\nu = 0,22$.

Przeprowadzone symulacje MES, jednoznacznie potwierdziły wpływ warunków brzegowych modelu, na uzyskiwane wyniki. Okazało się, że zmiana warunków utwierdzenia węzłów brzegowych modelu, powoduje generalną zmianę warunków propagacji rysy w materiale uwarstwionym (rys. 3.3, rys. 3.4). Przyłożenie do progu skalnego, obciążenia ściskającego powoduje, że w początkowej fazie rysa penetruje począwszy

od podstawy progu, w głąb materiału, prostopadle do kierunku przyłożonego obciążenia. W kolejnym etapie, rysa penetruje niemal prostopadle do uwarstwienia materiału (rys. 3a). Po pewnym czasie daje się zauważyć inicjację kolejnych rys, powstających na granicach obszaru, gdzie zostało przyłożone obciążenie. Ilustrują to silne koncentracje naprężeń, widoczne w okolicach boku progu skalnego (rys. 3.3b, c).





Rys. 3.3 Wyniki symulacji rozwoju rysy dla przypadku ściskania próbki (*Model - A*): a) przebieg propagacji szczeliny, b) rozkład naprężeń minimalnych, c) rozkład naprężeń maksymalnych, d) przebieg zmian siły krytycznej w miarę rozwoju szczeliny [3.2, 3.4]

Rys. 3.4. Wyniki symulacji rozwoju rysy dla przypadku rozciągania próbki (*Model - B*): a) przebieg propagacji szczeliny, b) rozkład naprężeń minimalnych, c) rozkład naprężeń maksymalnych, d) przebieg zmian siły krytycznej w miarę rozwoju szczeliny [3.2, 3.4]

Zmianę siły krytycznej, w kolejnych krokach rozwoju rysy, ilustruje rys. 3.3d oraz rys. 3.4d.

Nieco odmienny mechanizm rozwoju szczeliny zaobserwowano w przypadku poddania próbki rozciąganiu (próg skalny utwierdzony, obciążenie przyłożone do brzegu próbki, jak na rys. 3.2b). Jak wykazała analiza (rys. 3.4a), w takim przypadku, w początkowej fazie materiał pęka identycznie jak poprzednio (u podstawy progu, prostopadle do kierunku działającego obciążenia). W fazie drugiej, wystąpiło krótkotrwałe rozwarcie szczeliny prostopadle do jednej warstwy materiału o większej wytrzymałości, do momentu osiągnięcia warstwy „słabszej”. Jednak w dalszych krokach, rysa penetruje już jedynie wzdłuż warstwy słabszej (rys. 3.4c). Równocześnie, w miarę rozwoju szczeliny, gwałtownie maleje wartość siły krytycznej, co ilustruje rys. 3.4d.

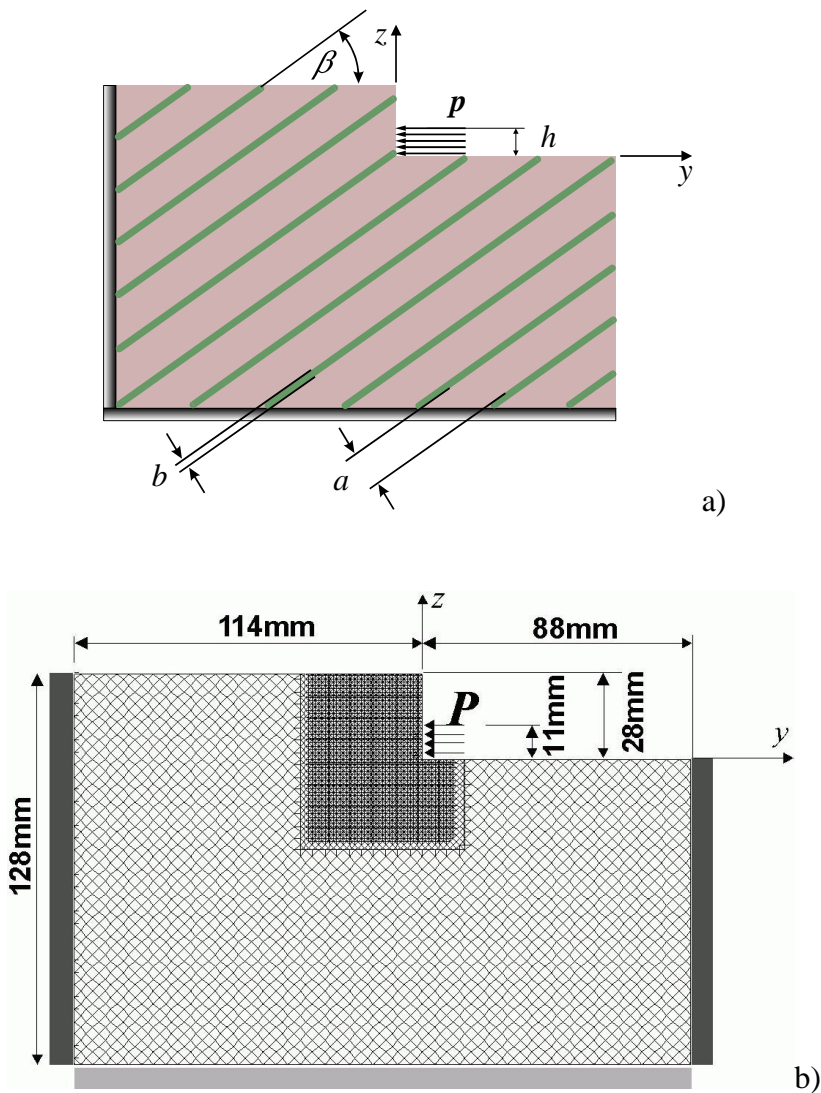
Przeprowadzona symulacja MES wykazała, że dla kruchych materiałów uwarstwionych, dla podobnych cech geometrycznych modelu, występuje silny wpływ sposobu wywierania obciążenia oraz przyjętych warunków utwierdzenia węzłów brzegowych modelu.

W przypadku symulacji z wykorzystaniem MES, zachowania się rzeczywistych obiektów inżynierskich, niezbędne jest właściwe, odpowiadające rzeczywistości, przyjęcie warunków brzegowych. W innym przypadku, uzyskiwane wyniki (pomimo bardzo dobrej metody obliczeniowej), mogą być obarczone bardzo dużym błędem.

Prezentowane wyniki symulacji, mogą być przydatne w szeregu zagadnieniach inżynierskich, gdzie mamy do czynienia z wykorzystaniem sprężysto-kruchych materiałów uwarstwionych, np. przy symulacji mechaniki procesów geotechnicznych i innych.

3.2. Wpływ kierunku uwarstwienia materiału na kierunek propagacji rysy oraz przebieg siły odspajania

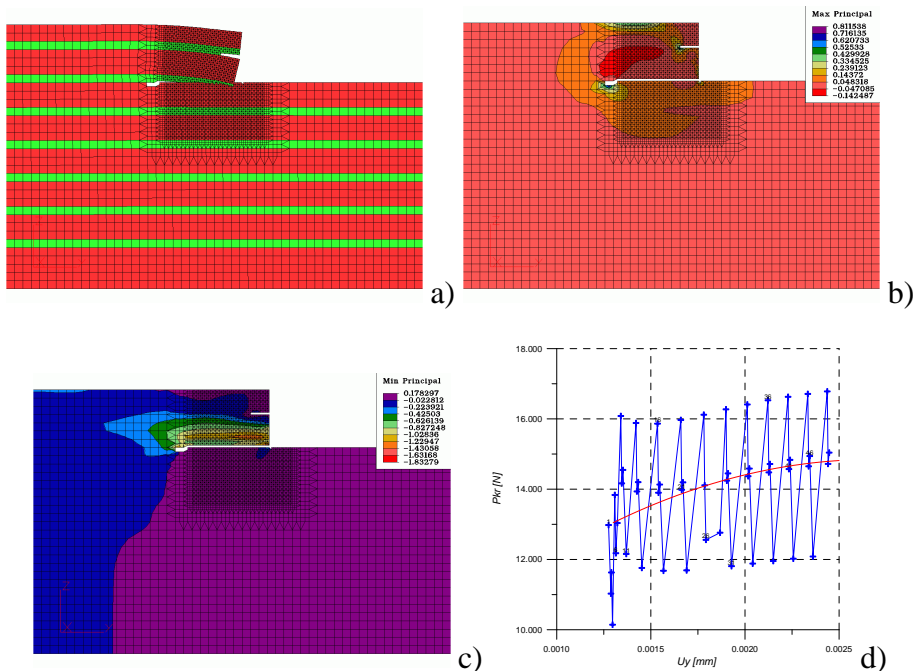
Jak już wspomniano w rozdziale 2, badania doświadczalne wykazują, że zagadnienie rozwoju szczelin w materiałach anizotropowych jest bardzo złożone. Rozwój uszkodzenia zależy od szeregu czynników, w tym od właściwości poszczególnych warstw, ich wzajemnego usytuowania oraz wymiarów liniowych. W niektórych sytuacjach trudno jest wręcz prognozować, w jakim kierunku potencjalnie może się rozwijać pęknięcie, stąd trudno podejmować określone środki zaradcze. Mając te aspekty na uwadze, przeprowadzono numeryczne symulacje wpływu kierunku uwarstwienia materiału skalnego, na propagację szczeliny, przy oddziaływaniu na nią ostrza noża urabiającego, wykorzystując model mechaniczny, jak na rys. 3.5. Kąt orientacji warstw osłabionej wytrzymałości materiału β , względem kierunku działania obciążenia, przyjęto do celów analizy równy $\beta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ (rys. 3.5). Do celów symulacji założono, że obciążenie p działa na część „progu” materiału uwarstwionego o wysokości $h = 11\text{mm}$ (jak na rys. 3.5b). Odległość warstw osłabionej spistości materiału $a = 12\text{mm}$. Grubość tych warstw (wymiar b , rys. 3.5a), przyjęto równą 4mm . Zagadnienie analizowano w płaskim stanie odkształcenia.



Rys. 3.5. Schemat mechaniczny modelu obciążenia materiału uwarstwionego a) oraz sposób jego dyskretyzacji, b) [3.4]

Przeprowadzona analiza numeryczna potwierdziła, że propagacja rysy powstającej w wyniku niszczenia struktury materiału uwarstwionego, zależy między innymi od orientacji warstw tego materiału, względem kierunku przyłożonego obciążenia.

W przypadku warstw o mniejszej wytrzymałości, usytuowanych równoległe do kierunku działania obciążenia, w pierwszym etapie następuje propagacja szczeliny wzdłuż warstwy u podstawy rozpatrywanego progu (rys. 3.6).

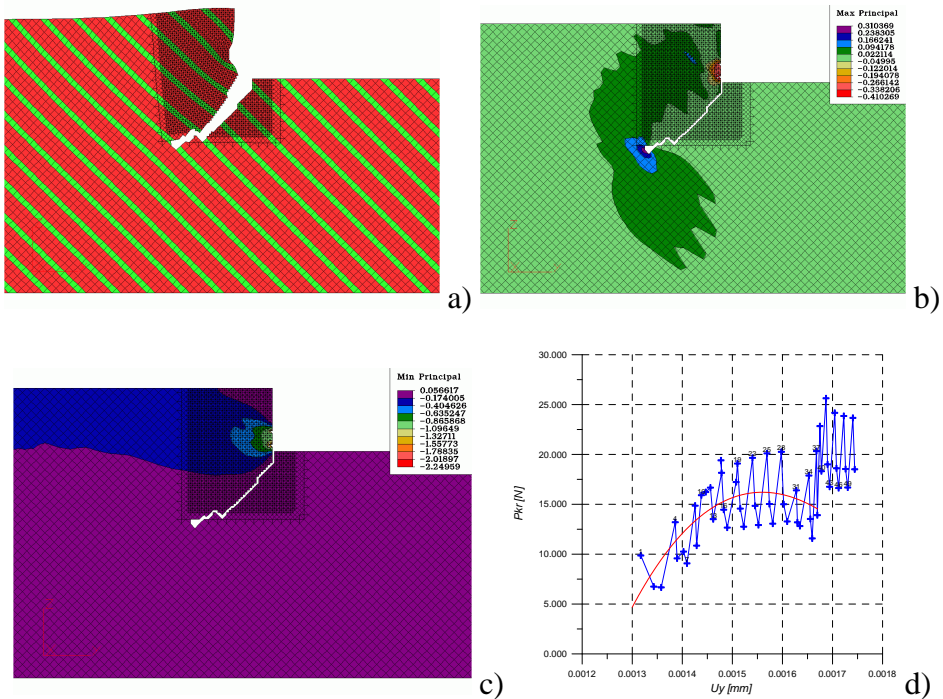


Rys. 3.6. Wyniki analizy dla materiału o uwarstwieniu równoległym do kierunku działania obciążenia: a) propagacja rys, b) rozkład naprężeń maksymalnych w strefie wierzchołka szczelin, c) naprężenia minimalne w strefie wierzchołków szczelin, d) przebieg obciążenia niszczonego w kolejnych krokach propagacji rysy (np. [3.4])

Materiał ulegając wyboczeniu, podlega silnej deformacji i przemieszczaniu w kierunku powstającej szczeliny, powodując jej zaciskanie. Dalszy wzrost obciążenia oraz rozwój szczeliny pierwotnej

wywołuje powstanie kolejnej szczeliny w „słabszej” warstwie usytuowanej powyżej poprzedniej.

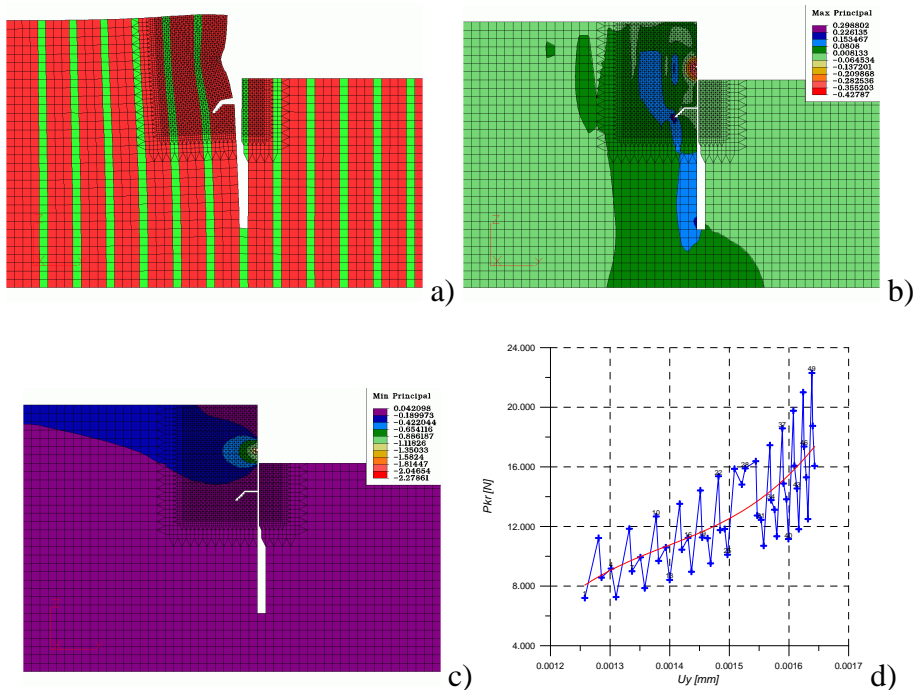
W przypadku usytuowania warstw pod kątem 135° względem kierunku obciążenia próbki, zaobserwowany mechanizm niszczenia materiału był odmienny. Jak wynika z rys. 3.7a, w pierwszych krokach propagacji szczeliny, szczególnie podczas niszczenia warstw o mniejszej wytrzymałości, pękanie następowało głównie w kierunku prostopadłym do kierunku działania obciążenia.



Rys. 3.7. Wyniki analizy dla materiału o uwarstwieniu pod kątem 135° względem kierunku działania obciążenia: a) propagacja rys, b) rozkład naprężeń maksymalnych w strefie wierzchołka szczelin, c) naprężenia minimalne w strefie wierzchołka szczelin, d) przebieg obciążenia niszczącego w kolejnych krokach propagacji rysy pierwotnej [3.4]

W dalszych krokach zarysowuje się tendencja do sukcesywnego pęknięcia materiału niemal prostopadle do uwarstwienia. Dalszy rozwój szczeliny jest w tym momencie trudny do określenia (zbyt małe zagęszczenie siatki). Na granicy działania obciążenia zaczynają się pojawiać dwie kolejne szczeliny, prostopadle do powierzchni progu. Ich istnienie objawia się silną koncentracją naprężeń w wierzchołkach szczelin (wzdłuż wysokości progu, rys. 3.7c).

Kolejnym krokiem analizy, było określenie propagacji szczeliny w przypadku, gdy uwarstwienie jest prostopadle do kierunku działania obciążenia (rys. 3.8a). Jak można było przypuszczać, mechanizm propagacji szczeliny w tym przypadku, będzie również odmienny niż dotychczas. Dla przyjętego modelu materiału, sposobu jego obciążania oraz przyjętych warunków brzegowych, w wyniku silnego zginania, materiał pęka w okolicy podstawy progu, prostopadle do kierunku działania obciążenia, wzdłuż warstwy o mniejszej wytrzymałości. Jak wynika z rys. 3.8a, pęknięcie to przebiega do pewnego momentu, kiedy pojawia się druga rysa, nieco poniżej miejsca przyłożenia obciążenia. Rysa ta zaczyna penetrować w sąsiedniej, „mocniejszej” warstwie, początkowo równoległe do kierunku obciążenia, później jednak zaczyna zmieniać kierunek propagacji, zmierzając w głąb warstwy materiału, powodując w krótkich czasie wyłamanie materiału tej warstwy.

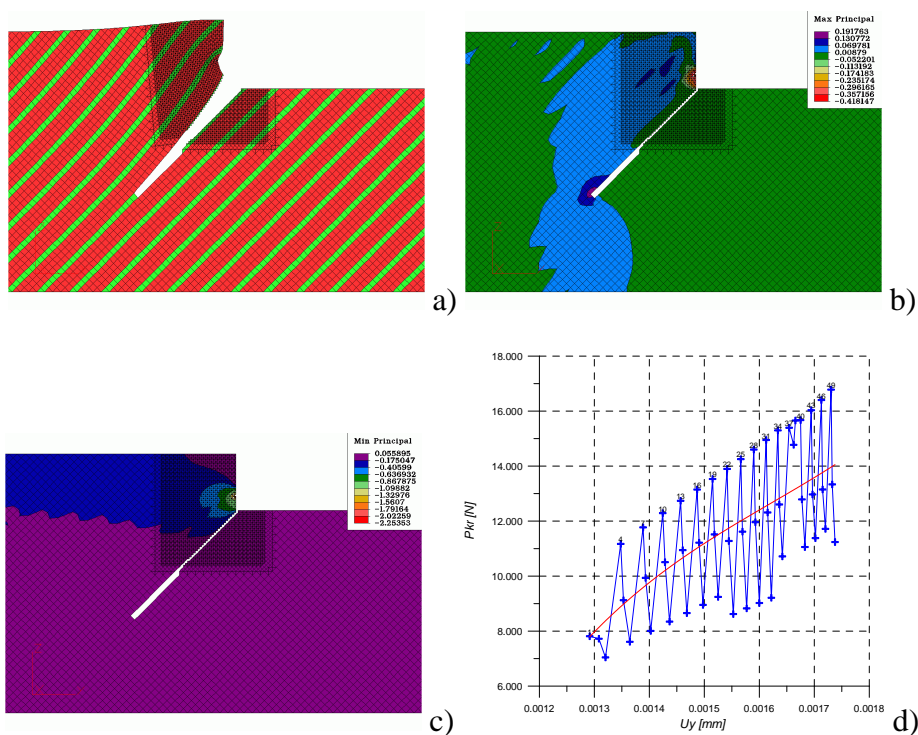


Rys. 3.8. Wyniki analizy dla materiału o uwarstwieniu pod kątem 90° względem kierunku działania obciążenia: a) sukcesywna propagacja trzech rys, b) rozkład naprężeń maksymalnych w strefie wierzchołków szczelin, c) naprężenia minimalne w strefie wierzchołków powstających szczelin, d) przebieg obciążenia niszczonego w kolejnych krokach propagacji rys [3.4]

Na granicy występowania obciążenia zaczyna się pojawiać kolejna rysa (rys. 3.8b, c), której początkowy kierunek penetracji jest równoległy do kierunku działania obciążenia (prostopadle do progu). Dalszy wzrost obciążenia, powoduje pojawienie się kolejnej szczeliny, na granicy przyłożonego obciążenia (prostopadle do progu). Jej istnienie objawia się tak jak poprzednio, silną koncentracją naprężeń w okolicy jej wierzchołka (rys. 3.8b).

W kolejnym etapie analizy, badano rozwój szczeliny, w przypadku, gdy uwarstwienie zorientowane jest pod kątem 45° , względem

działającego obciążenia (rys. 3.9). Jak wykazały badania, w pierwszych etapach obciążania materiału, zniszczenie występuje od podstawy progu, wzdłuż warstwy o mniejszej wytrzymałości. Podobnie jak poprzednio, dla pewnej wartości obciążenia, na granicy obciążonego obszaru, prostopadłe do progu, zaczyna penetrować kolejna szczelina, skąd silna koncentracja naprężeń właśnie w tej okolicy (rys. 3.9c).



Rys.3.9. Wyniki analizy dla materiału o uwarstwieniu pod kątem 45° względem kierunku działania obciążenia: a) sukcesywna propagacja rys, b) rozkład naprężeń maksymalnych w strefie wierzchołków szczelin, c) naprężenia minimalne w strefie wierzchołków powstających szczelin, d) przebieg obciążenia niszczonego w kolejnych krokach propagacji rys [3.4]

3.3. Wpływ wartości współczynnika asymetrii wytrzymałości kruchego materiału uwarstwionego, na przebieg odspajania elementu wióra

Ponieważ w praktyce badawczej (np. rys. 1.8) obserwuje się bardzo istotny wpływ tzw. współczynnika asymetrii wytrzymałości materiałów kruchych, na kształtowanie się obciążenia ostrza, stąd też jeden z etapów badań, poświęcono próbie wyjaśnienia wpływu wartości tego współczynnika na przebieg trajektorii odspajania głównego elementu wióra. Bazując na dotychczasowych doświadczeniach, do analizy przyjęto następujące warianty materiałowe:

- wariant I (W_I):

- materiał bazowy- wytrzymałość na ściskanie w stanie jednoosiowym – $f_{c2} = 20\text{MPa}$, w stanie dwuosiowym $f_{cc2} = 22\text{MPa}$, $f_{0c2} = 25\text{MPa}$ oraz wytrzymałość na rozciąganie $f_{t2} = 2\text{MPa}$. Moduł Younga $E_2 = 2 \times 10^4\text{MPa}$, współczynnik Poissona $\nu_2 = 0,2$,
- materiał warstwy „uprzywilejowanej”: $f_{c1} = 10\text{MPa}$, $f_{cc1} = 11\text{MPa}$, $f_{0c1} = 12,5\text{MPa}$, oraz wytrzymałość na rozciąganie $f_{t1} = 1\text{MPa}$. Moduł Younga $E_1 = 1 \times 10^4\text{MPa}$, współczynnik Poissona $\nu_1 = 0,22$.

Dla tego wariantu materiałowego, współczynnik asymetrii wytrzymałości materiału pomiędzy poszczególnymi warstwami $\kappa_{mw} = f_{c2}/f_{c1} = f_{t2}/f_{t1} = 2$. Współczynnik asymetrii wytrzymałości materiału poszczególnych warstw $\kappa_{ww} = f_{c2}/f_{t2} = f_{c1}/f_{t1} = 10$.

- wariant II (W_{II}):

- materiał bazowy- wytrzymałość na ściskanie w stanie jednoosiowym – $f_{c2} = 20\text{MPa}$, w stanie dwuosiowym

$f_{cc2} = 22\text{MPa}$, $f_{0c2} = 25\text{MPa}$ oraz wytrzymałość na rozciąganie $f_{t2} = 2\text{MPa}$. Moduł Younga $E_2 = 2 \times 10^4\text{MPa}$, współczynnik Poissona $\nu_2 = 0,2$,

- materiał warstwy „uprzywilejowanej”: $f_{c1} = 5\text{MPa}$, $f_{cc1} = 5,5\text{MPa}$, $f_{0c1} = 6,25\text{MPa}$, oraz wytrzymałość na rozciąganie $f_{t1} = 0,5\text{MPa}$. Moduł Younga $E_1 = 1 \times 10^4\text{MPa}$, współczynnik Poissona $\nu_1 = 0,22$.

Dla tego wariantu materiałowego, współczynnik asymetrii wytrzymałości materiału pomiędzy poszczególnymi warstwami $\kappa_{mw} = f_{c2}/f_{c1} = f_{t2}/f_{t1} = 4$. Współczynnik asymetrii wytrzymałości materiału poszczególnych warstw $\kappa_{ww} = f_{c2}/f_{t2} = f_{c1}/f_{t1} = 10$.

- wariant III (W_{III}):

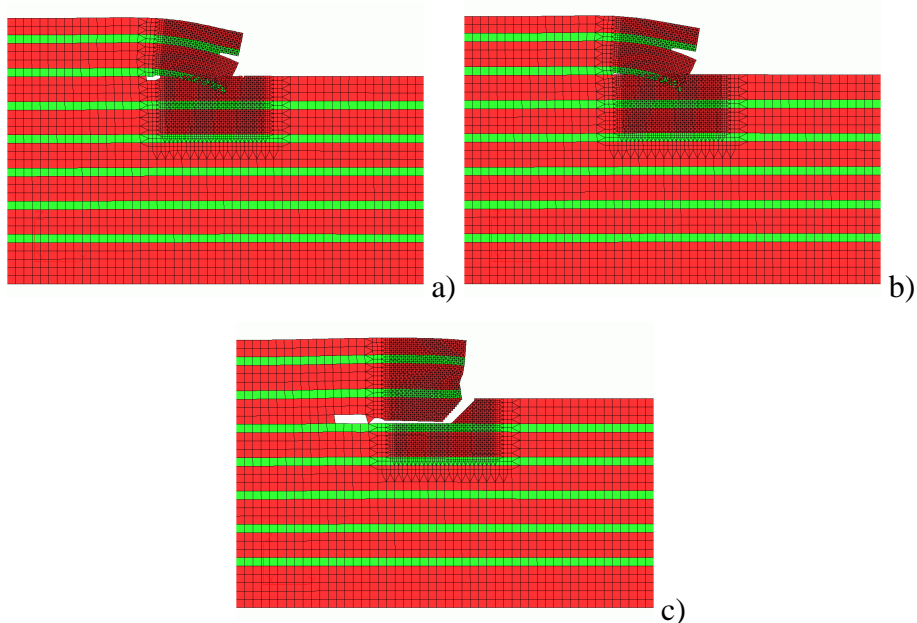
- materiał bazowy- wytrzymałość na ściskanie w stanie jednoosiowym – $f_{c2} = 5\text{MPa}$, w stanie dwuosiowym $f_{cc2} = 5,5\text{MPa}$, $f_{0c2} = 6,25\text{MPa}$ oraz wytrzymałość na rozciąganie $f_{t2} = 0,5\text{MPa}$. Moduł Younga $E_2 = 1 \times 10^4\text{MPa}$, współczynnik Poissona $\nu_2 = 0,22$;
- materiał warstwy „uprzywilejowanej”: $f_{c1} = 20\text{MPa}$, $f_{cc1} = 22\text{MPa}$, $f_{0c1} = 25\text{MPa}$, oraz wytrzymałość na rozciąganie $f_{t1} = 2\text{MPa}$. Moduł Younga $E_1 = 2 \times 10^4\text{MPa}$, współczynnik Poissona $\nu_1 = 0,2$.

Dla tego wariantu materiałowego, współczynnik asymetrii wytrzymałości materiału pomiędzy poszczególnymi warstwami $\kappa_{mw} = f_{c2}/f_{c1} = f_{t2}/f_{t1} = 0,25$. Współczynnik asymetrii wytrzymałości materiału poszczególnych warstw $\kappa_{ww} = f_{c2}/f_{t2} = f_{c1}/f_{t1} = 10$.

Model obciążenia A

Dla modelu obciążenia A (rys. 3.2, tab. 3.1) oraz dla poszczególnych wariantów kierunku uwarstwienia materiału,

kształtowanie się trajektorii odspojenia oraz deformacji materiału w okolicach strefy oddziaływania obciążenia (ostrza), ilustrują rysunki 3.10-3.13. Jak wynika z rys. 3.10a, w przypadku uwarstwienia równoległego do kierunku działania obciążenia, dla wariantu materiałowego W_I oraz W_{II} (materiał bazowy o większej wytrzymałości niż materiał warstwy uprzywilejowanej, pęknięcie rozpoczyna się i rozprzestrzenia w warstwie uprzywilejowanej położonej u podstawy progu skalnego (z intensywnością większą dla mniejszej wartości współczynnika asymetrii wytrzymałości warstw).

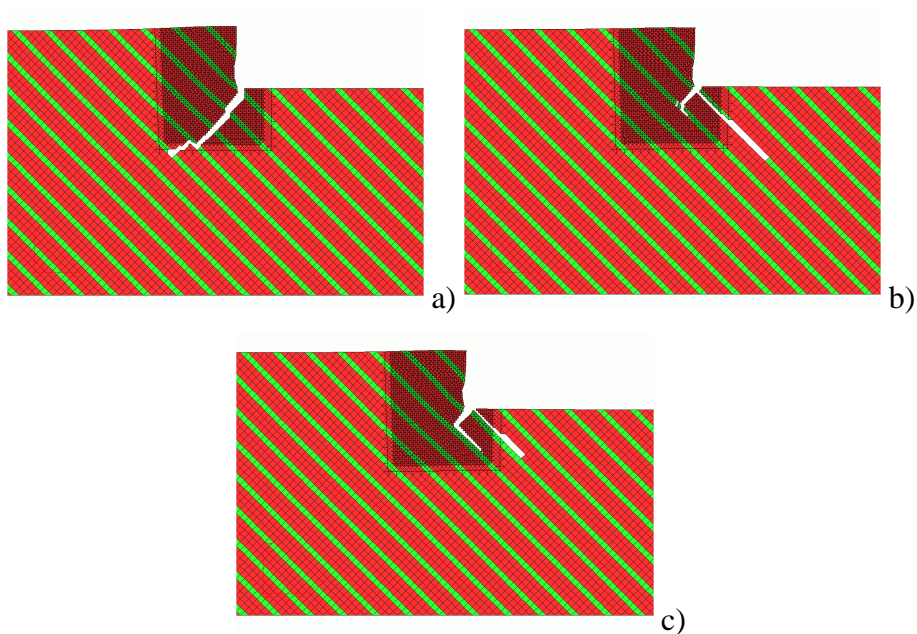


Rys. 3.10. Wpływ współczynnika asymetrii wytrzymałości warstw skalnych dla modelu materiałowego: a) W_I , $\kappa_{mw} = 2$, b) W_{II} , $\kappa_{mw} = 4$, c) W_{III} , $\kappa_{mw} = 0,25$. Kąt uwarstwienia $\beta = 0^\circ$

Gdy materiał bazowy posiada mniejszą wytrzymałość od warstwy uprzywilejowanej, następuje odwrócenie sytuacji (zamiana roli

poszczególnych warstw), jak na rys. 3.10c. Dla takiej kombinacji parametrów, materiał bazowy pęka tuż u podstawy progu skalnego. Szczelina początkowo penetruje w głąb materiału, pod kątem zbliżonym do 135° , aż do momentu osiągnięcia granicy warstwy. Dalsza propagacja następuje już wzdłuż granicy warstw, jednak w słabszym teraz materiale bazowym. Dla tych samych warunków symulacji, zasięg szczeliny jest jednak nieco większy niż w poprzednich przypadkach.

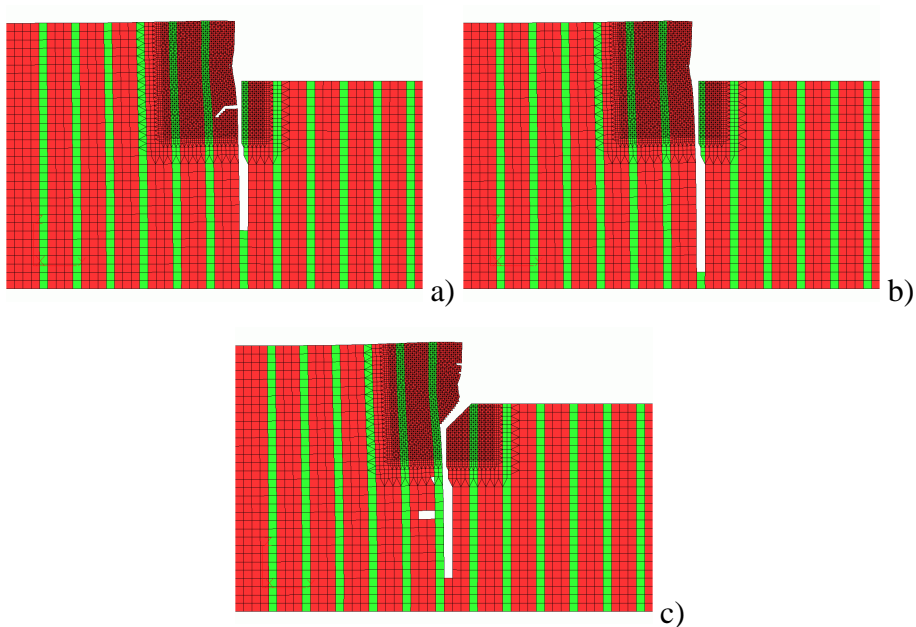
Dla warstw nachylonych pod kątem 135° (rys. 3.11), niezbyt duża różnica w wytrzymałości materiałów poszczególnych warstw powoduje, że szczelina penetruje skokowo, niemal prostopadle do poszczególnych warstw mocniejszych, początkowo w głąb materiału, później zaczyna zawracać zmniejszając głębokość penetracji.



Rys. 3.11. Wpływ współczynnika asymetrii wytrzymałości warstw skalnych dla modelu materiałowego: a) $W_I, \kappa_{mw} = 2$, b) $W_{II}, \kappa_{mw} = 4$, c) $W_{III}, \kappa_{mw} = 0,25$. Kąt uwarstwienia $\beta = 135^{\circ}$

Zmiany kierunku penetracji zachodzą głównie w materiale słabszej warstwy (rys. 3.11a). Wzrost jak i zmniejszanie się wartości współczynnika asymetrii wytrzymałości materiałów warstw powoduje zmianę mechaniki pękania (rys. 3.11b i 3.11c). Gdy materiał bazowy jest znacznie bardziej wytrzymały niż materiał „przekładki”, rosnący wzrost obciążenia progu skalnego powoduje, że materiał pęka początkowo wzdłuż warstwy położonej bezpośrednio u podstawy progu, w stronę przeciwną do kierunku działania obciążenia zewnętrznego. Po osiągnięciu krytycznej długości rozwarstwienia materiału, materiał bazowy, w warstwie leżącej poniżej warstwy, w której dotychczas penetrowała szczelina, pęka. Szczelina od tego momentu rozwija się głównie w kolejnej, niżej położonej warstwie słabszego materiału.

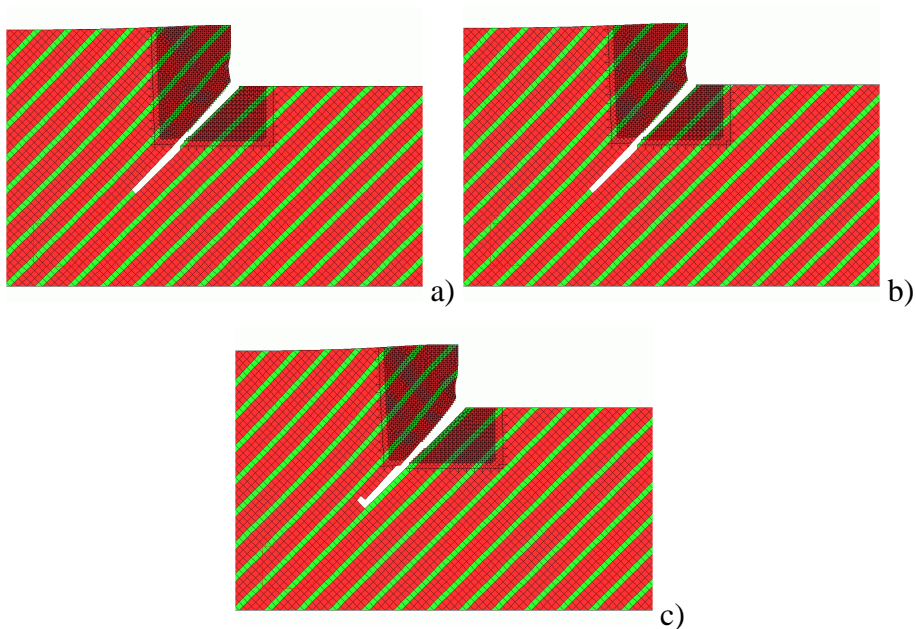
Gdy ułożenie warstw jest prostopadłe do kierunku działającego obciążenia (rys. 3. 12), szczelina penetruje głównie w głąb materiału, niemal prostopadłe do kierunku działania obciążenia. Chociaż i tutaj mechanizm pękania jest nieco zróżnicowany. Dla niezbyt dużej różnicy w wytrzymałości poszczególnych warstw (rys. 3.12a), szczelina początkowo penetruje w głąb materiału skalnego, wzdłuż granicy warstw, wewnątrz słabszej warstwy. Po osiągnięciu krytycznej długości tej szczeliny, materiał zaczyna pękać w sąsiedniej, mocniejszej warstwie materiału bazowego, początkowo prostopadłe do uwarstwienia, dalej natomiast zaczyna penetrować w głąb materiału, pod kątem zbliżonym do 135° . Prawdopodobnie po osiągnięciu kolejnej, słabszej warstwy, szczelina zacznie penetrować w głąb materiału (jak poprzednio).



Rys. 3.12. Wpływ współczynnika asymetrii wytrzymałości warstw skalnych dla modelu materiałowego: a) W_I , $\kappa_{mw} = 2$, b) W_{II} , $\kappa_{mw} = 4$, c) W_{III} , $\kappa_{mw} = 0,25$. Kąt uwarstwienia $\beta = 90^\circ$

Wzrost wytrzymałości warstwy bazowej (rys. 3.12b), sprzyja głębszej penetracji szczeliny, zanim pojawią się efekty poprzecznego pęknięcia kolejnej warstwy. W przypadku, gdy materiał bazowy jest zdecydowanie słabszy od warstwy uprzywilejowanej (rys. 3.12c), materiał warstwy bazowej pęka u podstawy progu a szczelina początkowo penetruje w głąb tej warstwy, pod pewnym kątem, do momentu granicy warstwy a następnie wzdłużnej granicy warstw, w głąb materiału.

W przypadku uwarstwienia materiału pod kątem 45° względem kierunku działania obciążenia, wpływ asymetrii wytrzymałości materiałów poszczególnych warstw, jest dość słaby (jak na rys. 3.13). Nie wpływa w sposób zdecydowany na trajektorię penetracji szczeliny.

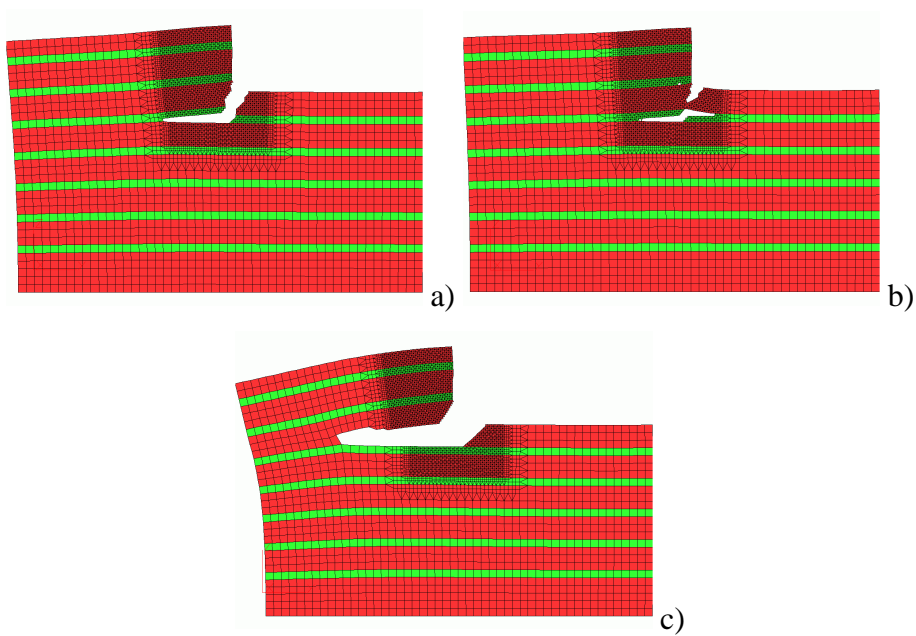


Rys. 3.13. Wpływ współczynnika asymetrii wytrzymałości warstw skalnych dla modelu materiałowego: a) W_I , $\kappa_{mw} = 2$, b) W_{II} , $\kappa_{mw} = 4$, c) W_{III} , $\kappa_{mw} = 0,25$. Kąt uwarstwienia $\beta = 45^\circ$

Model obciążenia B

Analiza numeryczna wykazała, jak znaczący jest wpływ sposobu obciążania modelu. Dla przypadku obciążania, według schematu B (jak na rys. 3.2b, tab. 3.1), rozkład deformacji materiału oraz trajektorię pęknięcia, ilustrują rys. 3.14-3.17.

W przypadku uwarstwienia równoległego do kierunku działania obciążenia, odmiennie niż dla poprzedniego schematu obciążenia, materiał pęka głównie u podstawy progu skalnego, w głąb materiału. Dla przypadku niezbyt dużej różnicy wartości współczynnika asymetrii wytrzymałości (rys. 3.14a), materiał pęka niemal w poprzek warstwy materiału bazowego, pęknięcie przechodzi przez słabszą warstwę aż do jej granicy. Dalej penetruje w słabszej warstwie, wzdłuż granicy warstw.

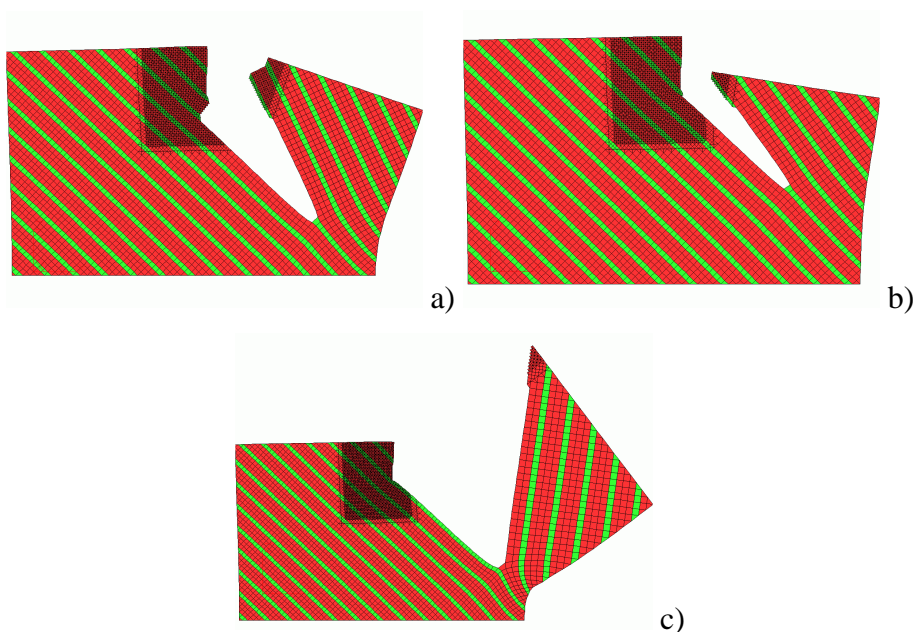


Rys. 3.14. Wpływ współczynnika asymetrii wytrzymałości warstw skalnych dla modelu materiałowego: a) W_I , $\kappa_{mw} = 2$, b) W_{II} , $\kappa_{mw} = 4$, c) W_{III} , $\kappa_{mw} = 0,25$. Kąt uwarstwienia $\beta = 0^\circ$

Wzrost wytrzymałości materiału bazowego powoduje (rys. 3.14b), że materiał równocześnie pęka w mocniejszej warstwie położonej bezpośrednio pod podstawą progu jak również rozwarstwia się w pierwszej, słabszej warstwie położonej pod progiem. Gdy wytrzymałość materiału bazowego jest zdecydowanie mniejsza niż warstwy uprzywilejowanej, materiał pęka tuż pod podstawą progu, w warstwie materiału bazowego, tym razem mniej więcej pod kątem 135° w kierunku działania obciążenia (rys. 3.14c).

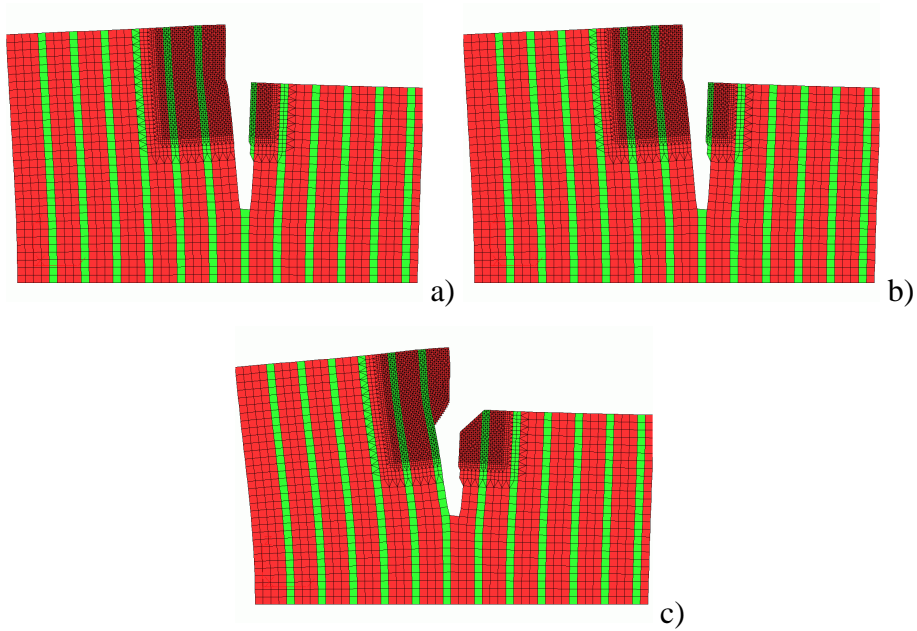
Uwarstwienie materiału pod kątem 135° , dla tego modelu obciążenia, wywołuje skutek pęknięcia nieco podobny do odzierania części materiału od całości (rys. 3.15). Materiał pęka u podstawy progu a

następnie jest oddzierany wzdłuż słabszej warstwy lub też bezpośrednio jest oddzierany w warstwie słabszej, leżącej bezpośrednio pod progiem.



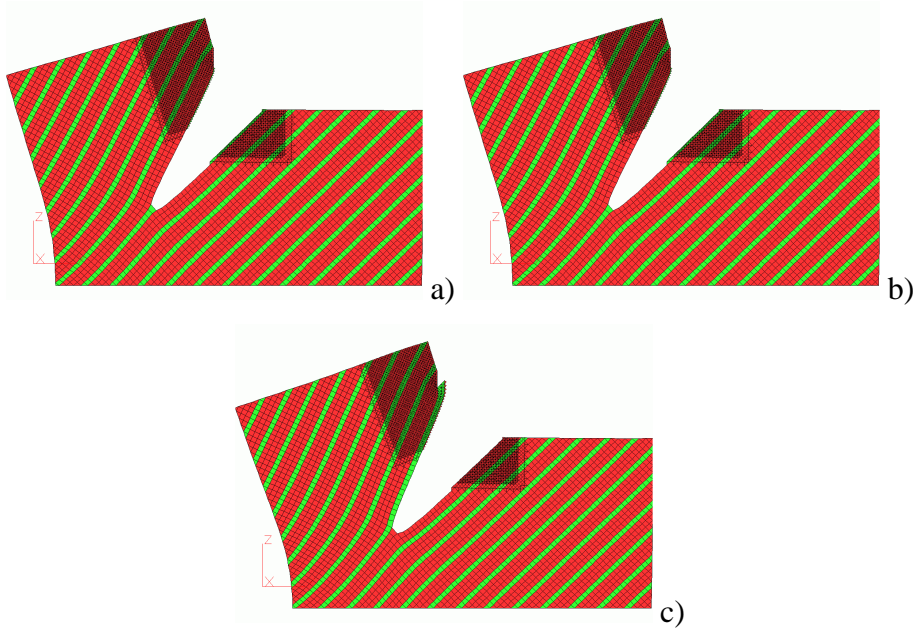
Rys. 3.15. Wpływ współczynnika asymetrii wytrzymałości warstw skalnych dla modelu materiałowego: a) W_I , $\kappa_{mw} = 2$, b) W_{II} , $\kappa_{mw} = 4$, c) W_{III} , $\kappa_{mw} = 0,25$. Kąt uwarstwienia $\beta = 135^\circ$

W przypadku uwarstwienia materiału prostopadłego do kierunku działania obciążenia (rys. 3.16), nie zaobserwowano istotnej różnicy w pękaniu materiału obciążonego według schematu *A* czy też *B*. Nie wystąpiło tutaj np. pęknięcie materiału bazowego, tuż pod podstawą progu skalanego, tak jak to ma miejsce na rys. 3. 12a.



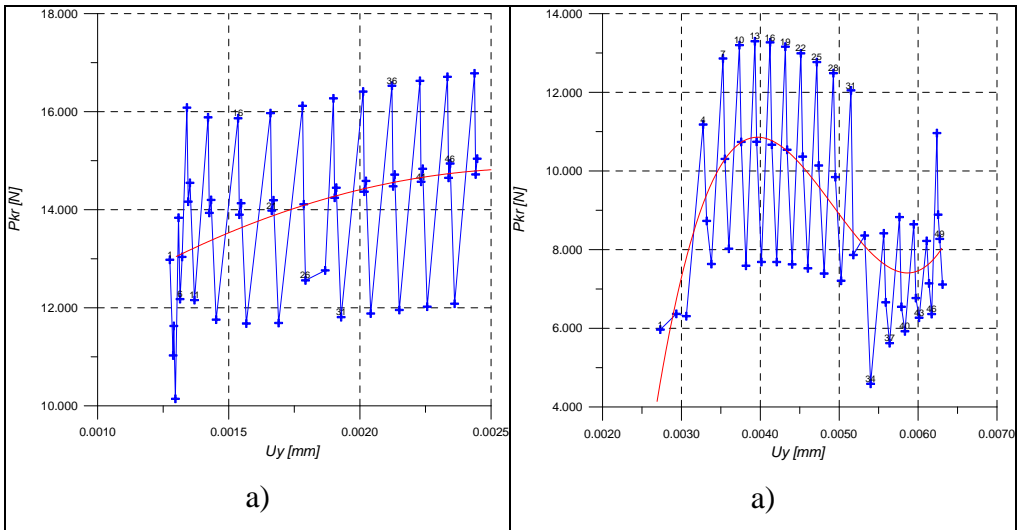
Rys. 3.16. Wpływ współczynnika asymetrii wytrzymałości warstw skalnych dla modelu materiałowego: a) W_I , $\kappa_{mw} = 2$, b) W_{II} , $\kappa_{mw} = 4$, c) W_{III} , $\kappa_{mw} = 0,25$. Kąt uwarstwienia $\beta = 90^\circ$

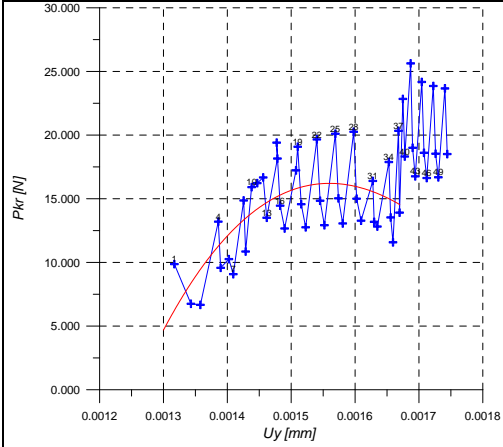
W przypadku uwarstwienia pod kątem 45° , przebieg pęknięcia był zbliżony do zaobserwowanego w wariancie A obciążenia, przedstawionego już na rys. 3.13. Istotniejsza różnica w propagacji szczeliny wystąpiła dla słabej warstwy bazowej (rys. 3.17c). W porównaniu do sytuacji przedstawionej na rys. 3.13c, zmianie uległo umiejscowienie szczeliny. Tym razem szczelina penetruje nie nad warstwą, ale pod uprzywilejowaną warstwą.



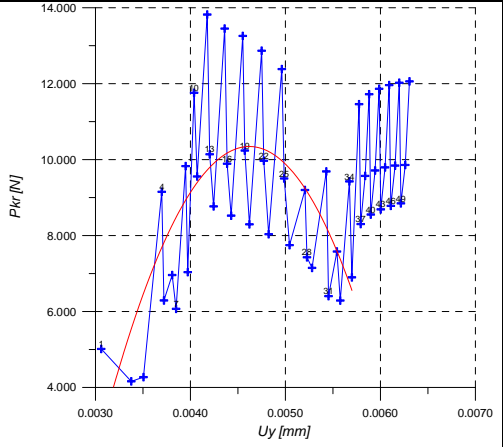
Rys. 3.17. Wpływ współczynnika asymetrii wytrzymałości warstw skalnych dla modelu materiałowego: a) W_I , $\kappa_{mw} = 2$, b) W_{II} , $\kappa_{mw} = 4$, c) W_{III} , $\kappa_{mw} = 0,25$. Kąt uwarstwienia $\beta = 45^\circ$

Przebieg siły krytycznej, w miarę rozwoju szczeliny, dla wybranych przypadków symulacji, ilustrują z kolei rys. 3.18 oraz 3.19.

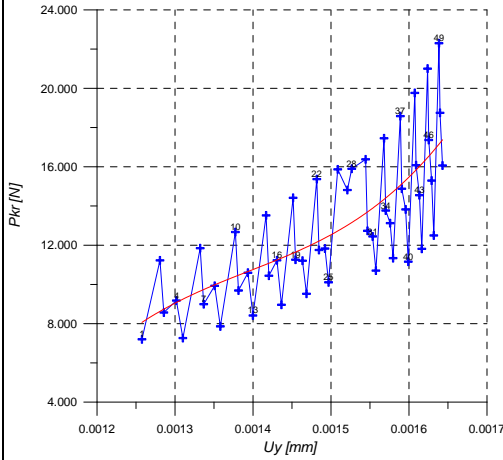




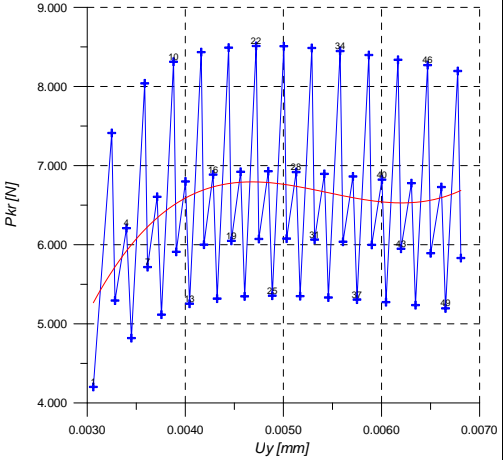
b)



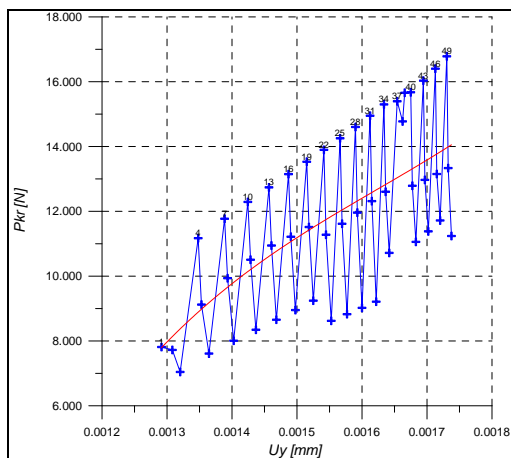
b)



c)

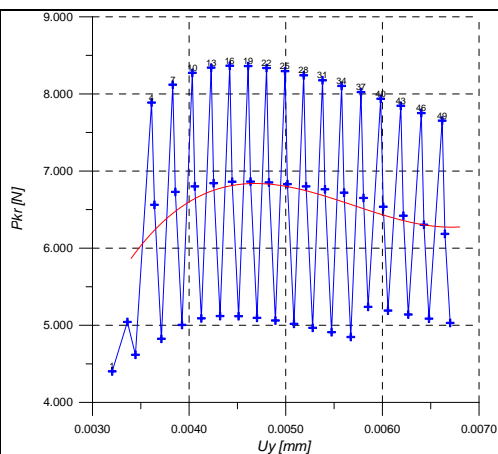


c)



d)

Rys. 3.18. Model obciążenia A. Przebieg siły krytycznej w trakcie rozwoju szczeliny: a) $\beta=0^{\circ}$, b) $\beta=135^{\circ}$, c) $\beta=90^{\circ}$, d) $\beta=45^{\circ}$



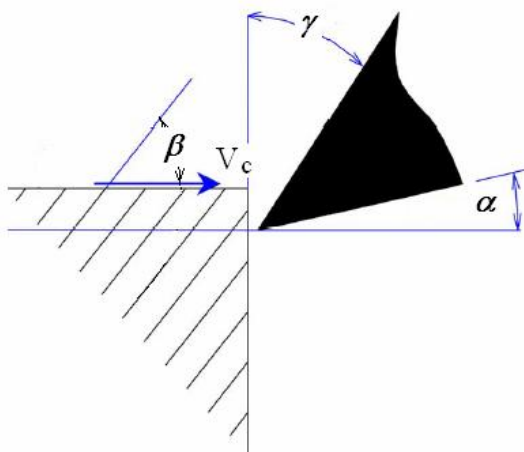
d)

Rys. 3.19. Model obciążenia B. Przebieg siły krytycznej w trakcie rozwoju szczeliny: a) $\beta=0^{\circ}$, b) $\beta=135^{\circ}$, c) $\beta=90^{\circ}$, d) $\beta=45^{\circ}$

Zmiany siły krytycznej, w miarę rozwoju szczeliny, w bardzo dobry sposób oddają wpływ określonego przebiegu mechanizmu pęknięcia materiału, „błądzenia” omawianej szczeliny w materiale skalnym, w miarę jej propagacji oraz zmieniających się warunków równowagi. Jak wynika z rys. 3.18 oraz 3.19, każdy przypadek penetracji szczeliny jest inny, pomimo, że w niektórych sytuacjach przebieg trajektorii szczeliny może być pozornie podobny. Skoki na wykresach siła- przemieszczenie notowane w kolejnych krokach symulacji wynikają z usytuowania trójkątnych elementów skończonych zastosowanych przy tworzeniu modelu MES.

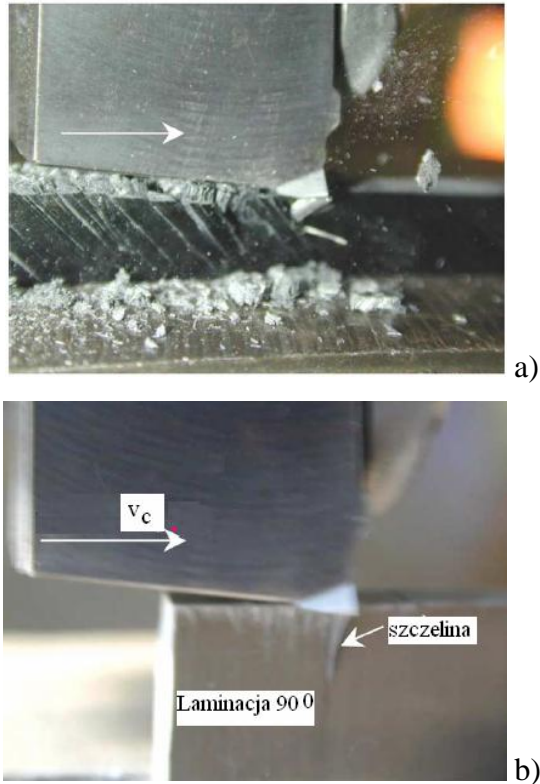
Wynikający z analizy numerycznej, mechanizm niszczenia uwarstwionego materiału sprężysto- kruchego wykazuje dużą zbieżność z obserwowanym w praktyce, mechanizmem niszczenia struktury skał, opisanym w rozdziale 1 oraz 2. Biorąc pod uwagę wyniki badań np. [3.5]

(rys. 3.20-3.22) można stwierdzić, że prezentowane w niniejszej monografii wyniki symulacji, mają również przełożenie, na wyniki skrawania warstwowych materiałów kompozytowych (laminatów). Dla przyjętej metodyki badań i modelu skrawania takiego materiału (rys. 3.20, 3.21) stwierdzono wyraźny wpływ kierunku uwarstwienia na kierunek i przebieg propagacji szczelin jakie są generowane w trakcie skrawania.



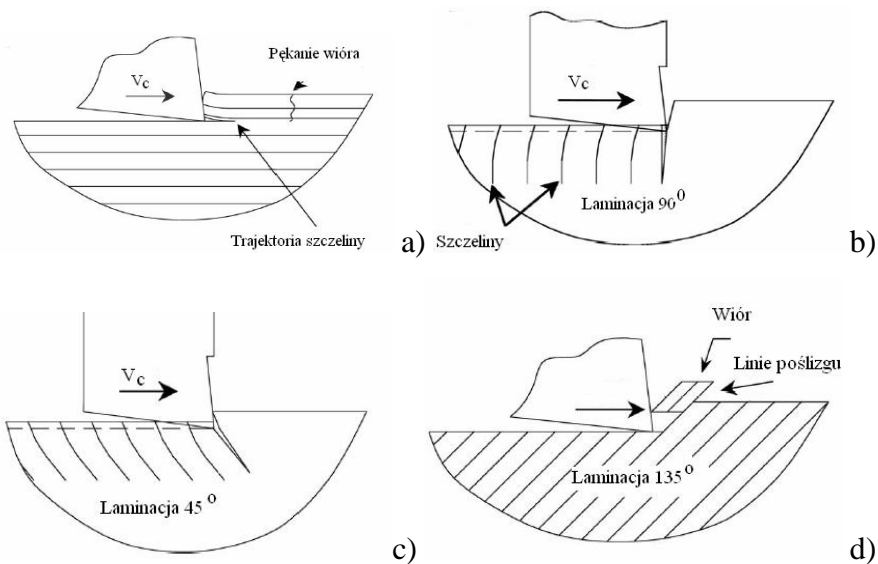
Rys.3.20. Model skrawania laminatu wg [3.5]

Początkowe etapy trajektorii generowanych szczelin w strefie działania ostrza, w poszczególnych przypadkach laminacji materiału kompozytowego, odpowiadają odpowiednim trajektoriom, uzyskanym w symulacjach numerycznych przeprowadzonych dla określonego usytuowania warstw względem kierunku skrawania, opisanych w niniejszej monografii.



Rys. 3.21. Wpływ kierunku laminacji kompozytu na generowanie i penetrację szczelin towarzyszących formowaniu wióra [3.5]

Dla pełnego opisu zachodzących zjawisk w trakcie skrawania materiałów uwarstwionych, niezbędna jest jednak szersza analiza prezentowanej tematyki (w oparciu o większą liczbę elementów modelu), celem pełniejszego określenia trajektorii szczelin o większym zasięgu. Jest to niezbędne np. w prognozowaniu rozmiarów elementów wióra powstającego w trakcie urabiania skał z wykorzystaniem noży urabiających, zachowania się ośrodka skalnego w okolicach podziemnych budowli inżynierskich, czy problematyki zniszczenia konstrukcji wykonywanych z materiałów kompozytowych.



Rys.3.22. Model formowania wióra oraz generowania szczelin w kompozytowym materiale warstwowym, wg [3.5]

Literatura:

- [3.1] Podgórski J., Jonak J.: Numeryczne badania procesu skrawania skał izotropowych. LTN, Lublin 2004, s. 80.
- [3.2] Podgórski J.: Influence Exerted by Strength Criterion on the Direction of Crack Propagation in the Elastic- Brittle Material. Journal of Mining Science, 38 (4), pp. 374- 380; Jul 2002.
- [3.3] Podgórski J., Jonak J., Jaremek P. : Wpływ warunków brzegowych modelu na kierunek propagacji rysy w uwarstwionym materiale sprężysto-kruchym. III Sympozjum Mechaniki zniszczenia materiałów i konstrukcji. Augustów, 1-4 czerwca 2005.
- [3.4] Podgórski J., Jonak J., Jaremek P., Dey N.C.: The influence of the boundary conditions of a model on the direction of crack propagation in laminar elastic- brittle material. Journal of Mines, Metals& Fuels. Incorporating Indian Mining Journal (II ISSN 0022-275), Vol. 53, Nos. 5&6, May- June 2005, pp. 88-91.
- [3.5] Zitoun R., Collombet F., Lachaud F., Piquet R., Pasquet P. :Experiment-calculation comparison of the cutting conditions representative of the long fiber composite drilling phase. Composites Science and Technology 65 (2005) 455–466

4. Szczegółowe badania wpływu anizotropii materiału skalnego, na przebieg niszczenia struktury materiału

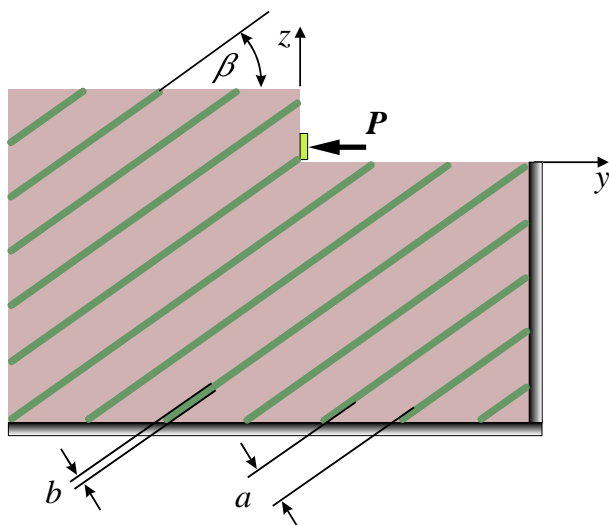
Celem badań wstępnych przedstawionych w rozdziale 3 było głównie testowanie procedur numerycznych, analizowanie wpływu warunków brzegowych, określenie przedziałów wartości zmiennych oraz ogólne rozpoznanie możliwości symulacji procesu pęknięcia materiałów kruchych poddanych działaniu określonemu rodzajowi obciążenia zewnętrznego. Badania te, chociaż ograniczone swym zakresem wykazały, że wpływ kierunku uwarstwienia materiału kruchego jak i kombinacja parametrów wytrzymałościowych poszczególnych warstw, ma bardzo złożony wpływ na mechanikę pęknięcia opisywanych materiałów. Przy czym należy zauważyć, że dane literaturowe są tutaj nieco rozbieżne. Obserwuje się zwłaszcza duże rozpiętości tak wartości parametrów charakteryzujących skałę w momencie niszczenia struktury, jak i zróżnicowane wartości np. kąta pochylenia warstw, na przebieg mechaniki zniszczenia, co zostało omówione w rozdziale pierwszym oraz drugim monografii.

W kolejnym etapie badań, uwagę skupiono na szczegółowym zbadaniu wpływu kierunku działania obciążenia, względem uwarstwienia materiału skalnego, na przebieg zniszczenia, w tym zwłaszcza na mechanizm propagacji szczeliny powstającej w efekcie niszczenia struktury materiału. Celem zwiększenia dokładności symulacji, zwiększono stopień zagęszczenia siatki MES modelu w strefie działania obciążenia, zwiększono ilość rozpatrywanych przypadków usytuowania warstw względem kierunku działania obciążenia zewnętrznego oraz

zwiększono ilość warstw elementów MES, w symulowanych warstwach uprzywilejowanych.

4.1. Założenia przyjęte w symulacji

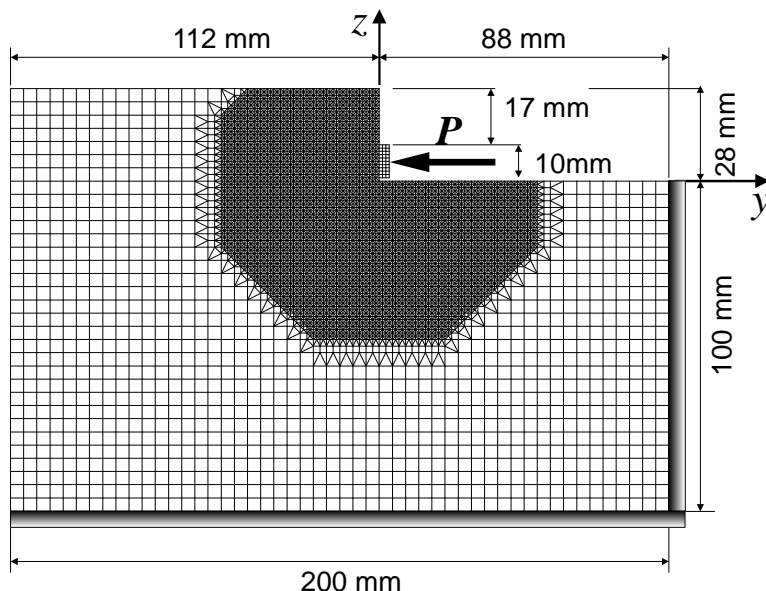
Dla poczynionych powyżej założeń, przyjęto model mechaniczny strefy skrawania, który ilustruje rys. 4.1. Kąt β określający usytuowanie warstw uprzywilejowanych względem kierunku działania obciążenia progu skalnego siłą P , zwiększano o 5° w każdym kroku analizy, począwszy od 0° aż do 180° . Oddziaływanie powierzchni natarcia ostrza na skałę symulowane jest w tym przypadku oddziaływaniem sztywnej płyty obciążonej siłą P , na występ skalny (jak na rys., 4.1, 4.2). Przyjęto zatem do symulacji, kąt natarcia ostrza równy 0° .



Rys. 4.1. Model mechaniczny strefy skrawania, *Model C*

Podstawowe wymiary modelu oraz sposób jego dyskretyzacji siatką elementów skończonych ilustruje rys. 4.1 i 4.2. Przyjęto grubość warstwy

materiału podstawowego $a=12\text{mm}$, grubość warstw materiału „słabszego” $b=4\text{mm}$.



Rys. 4.2. Wymiary modelu C oraz sposób jego dyskretyzacji i utwierdzenia węzłów brzegowych

Siatkę elementów zagęszczono w obszarze propagacji szczeliny. Zastosowano w tym obszarze dwa rodzaje elementów: elementy trójkątne o liniowej funkcji kształtu, a w drugim wariantcie, elementy czworokątne o dwuliniowej funkcji kształtu. Pozostałe procedury nie uległy zmianie w stosunku do opisanych już wcześniej.

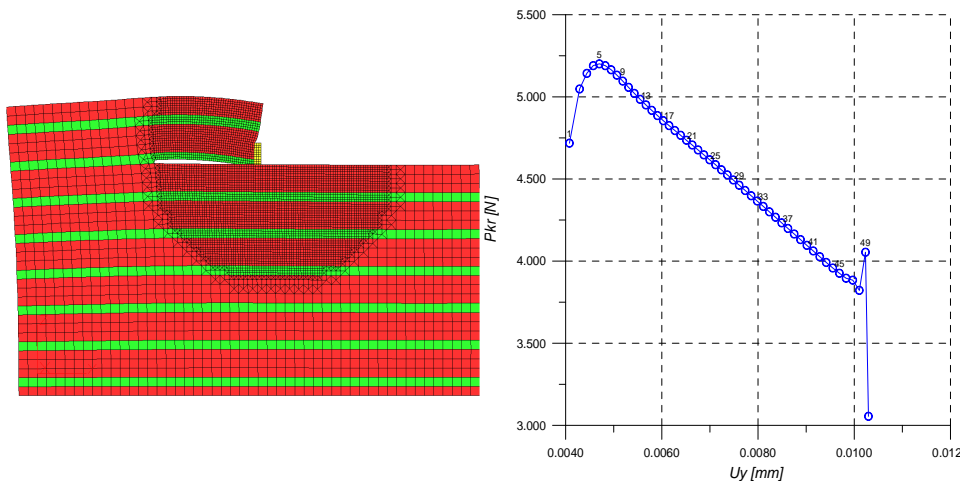
W prezentowanym etapie badań przyjęto następujące charakterystyki materiałowe:

- dla materiału podstawowego: -wytrzymałość na ściskanie w stanie jednoosiowym $f_c = 20\text{MPa}$, a w stanie dwuosiowym $f_{cc} = 22\text{MPa}$, $f_{0c} = 25\text{MPa}$ oraz wytrzymałość na rozciąganie $f_t = 2\text{MPa}$. Moduł Younga $E = 2 \cdot 10^4\text{MPa}$, współczynnik Poissona $\nu = 0,2$.

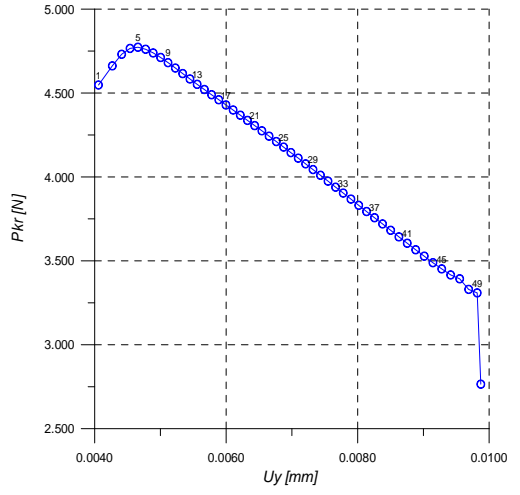
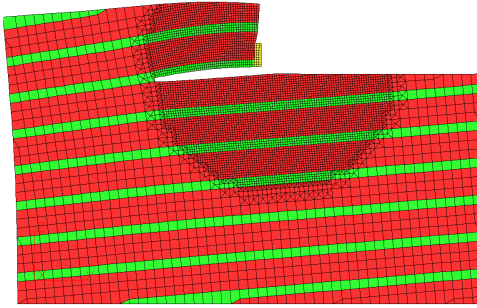
- dla materiału warstwy „słabszej”- $f_c = 5\text{MPa}$, $f_{cc} = 5.5\text{MPa}$, $f_{0c} = 6,25\text{MPa}$ oraz wytrzymałość na rozciąganie $f_t = 0,5\text{MPa}$.
Moduł Younga $E = 1 \cdot 10^4\text{MPa}$, współczynnik Poissona $\nu = 0,22$.

4.2. Wyniki symulacji numerycznych szczegółowych badań niszczenia struktury materiału uwarstwionego

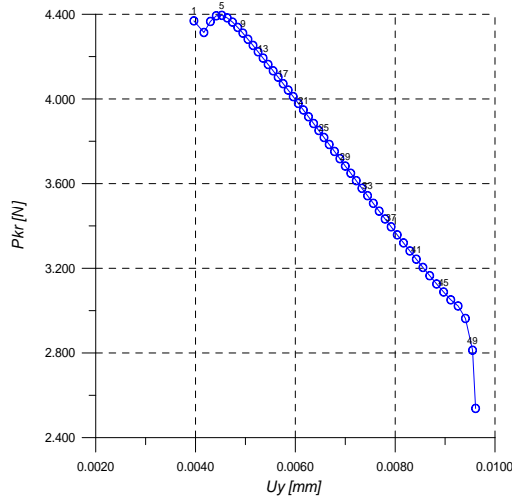
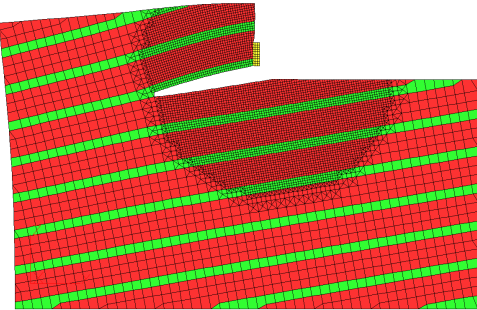
Wyniki uzyskane w trakcie tej symulacji, przedstawione zostały na rysunku 4.3. Pokazane zostały tutaj zdeformowane (skala 1000:1) siatki elementów *Modelu C*, w wariancie z elementami czworokątnymi oraz wykresy siła-przemieszczenie poziome punktu przyłożenia obciążenia.



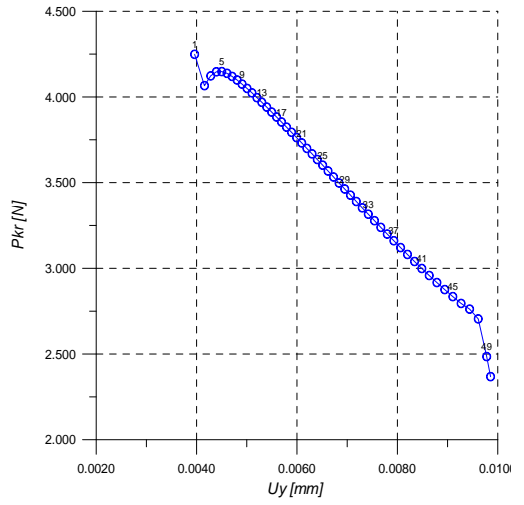
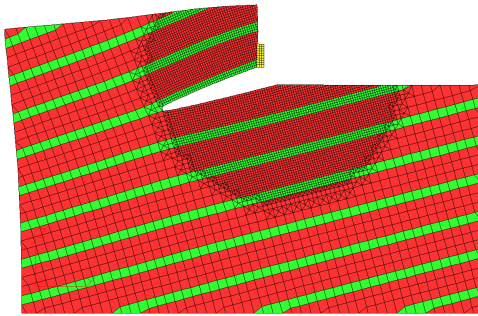
Kąt uwarstwienia $\beta = 0^\circ$



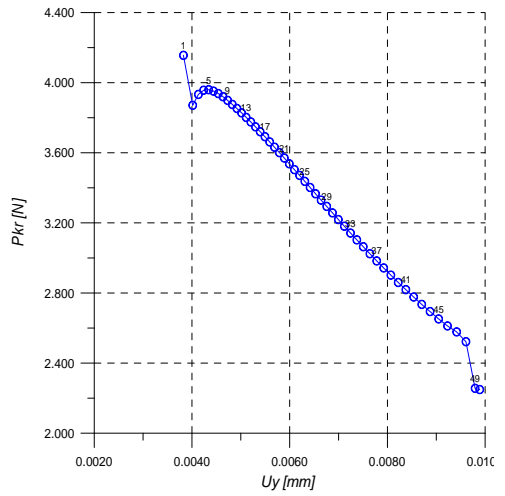
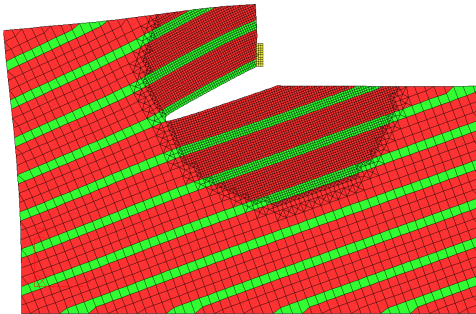
Kąt uwarstwienia $\beta = 5^\circ$



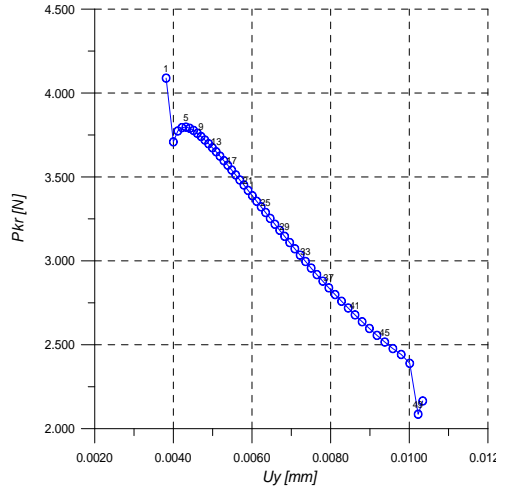
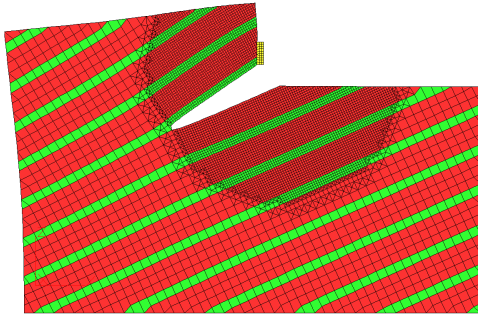
Kąt uwarstwienia $\beta = 10^\circ$



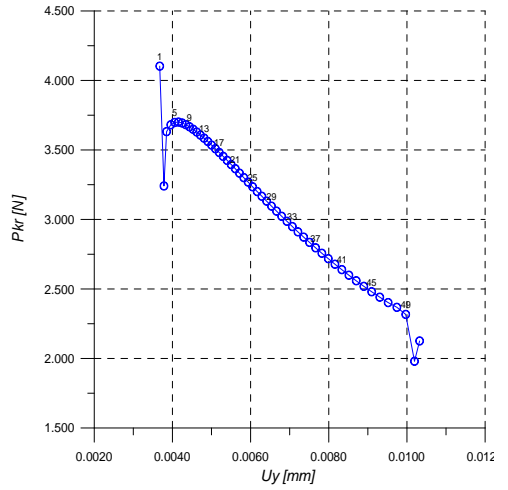
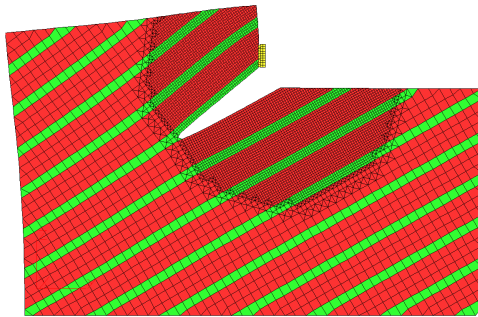
Kąt uwarstwienia $\beta = 15^\circ$



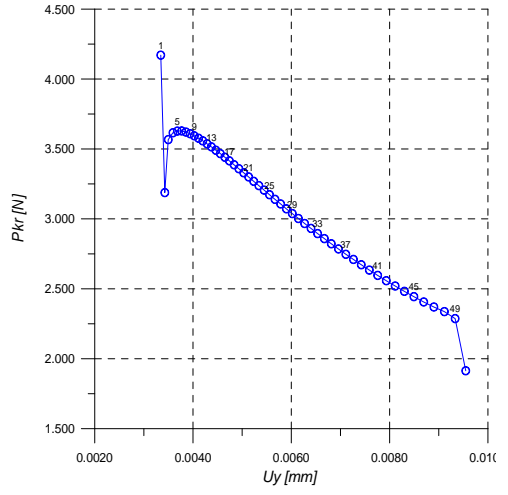
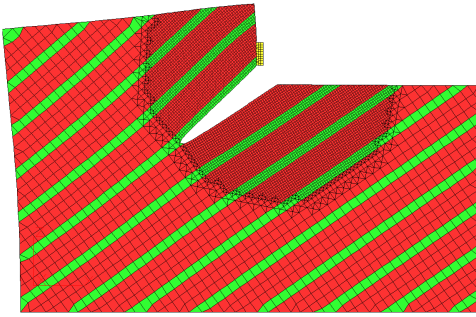
Kąt uwarstwienia $\beta = 20^\circ$



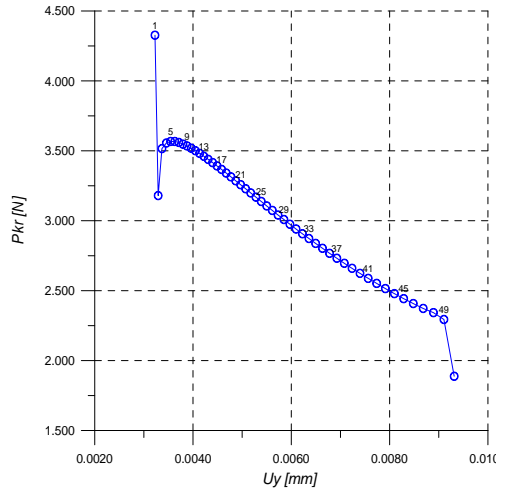
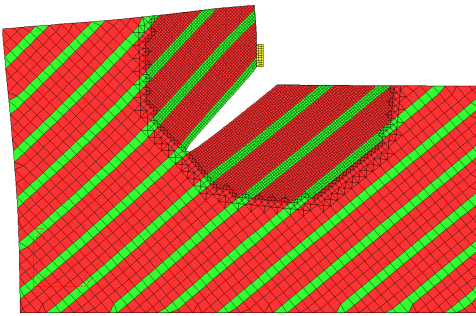
Kąt uwarstwienia $\beta = 25^\circ$



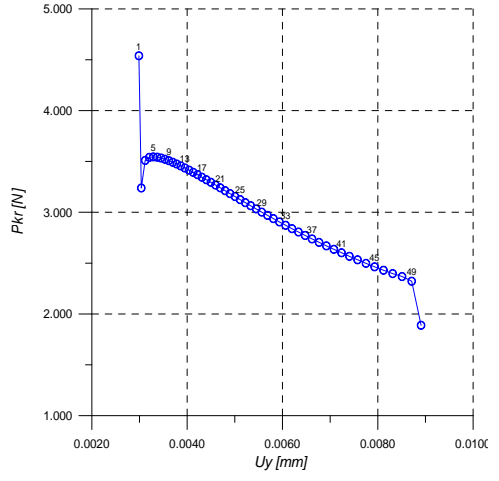
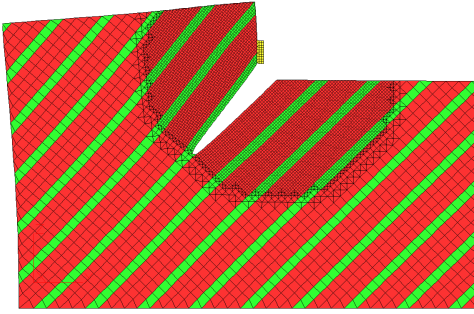
Kąt uwarstwienia $\beta = 30^\circ$



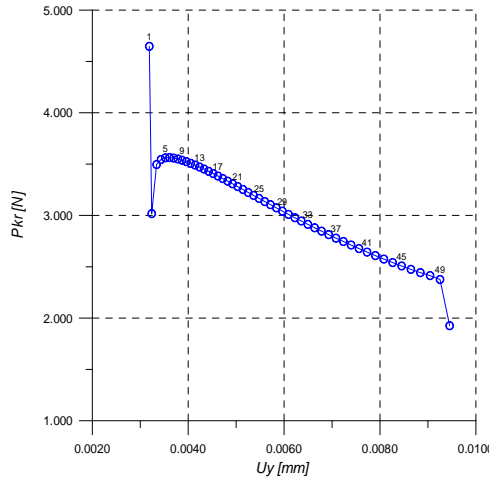
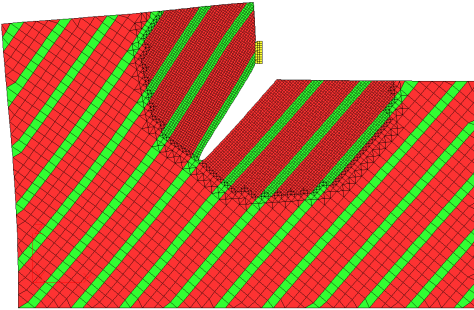
Kąt uwarstwienia $\beta = 35^\circ$



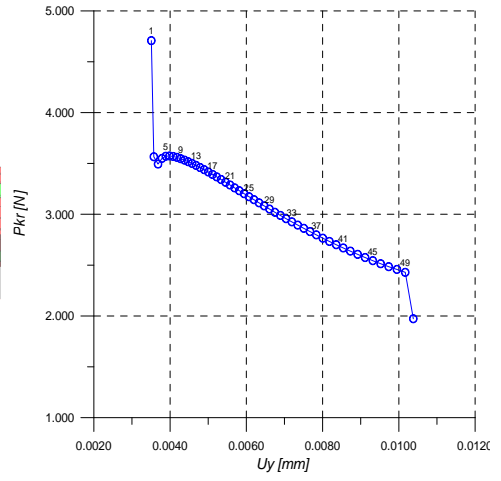
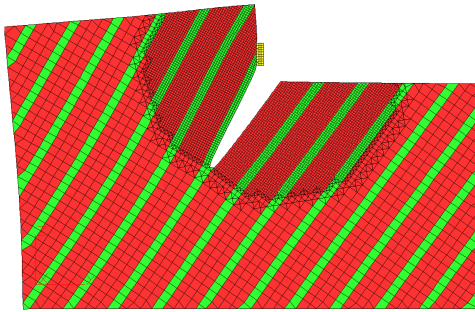
Kąt uwarstwienia $\beta = 40^\circ$



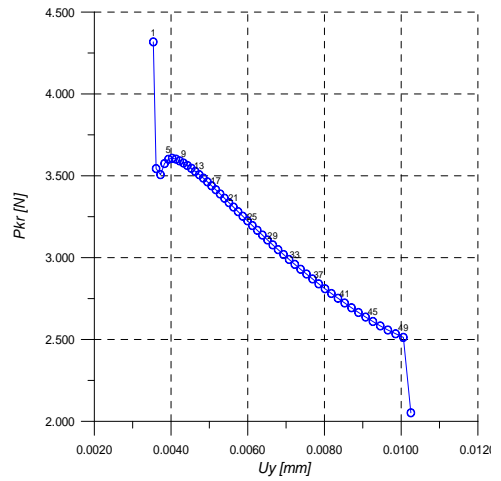
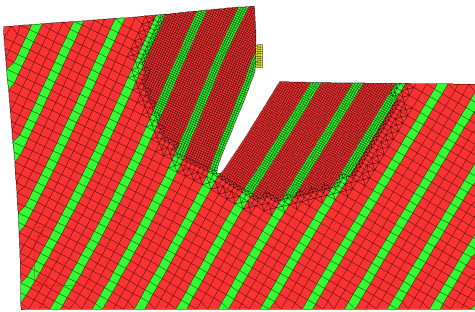
Kąt uwarstwienia $\beta = 45^\circ$



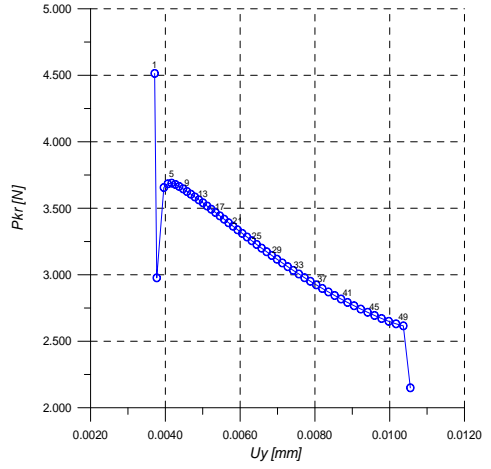
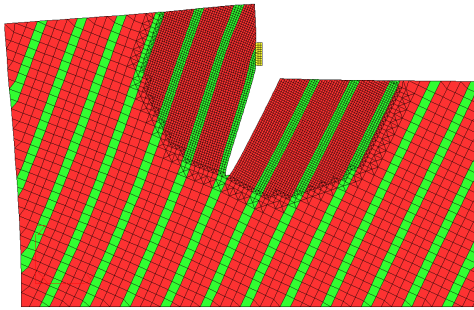
Kąt uwarstwienia $\beta = 50^\circ$



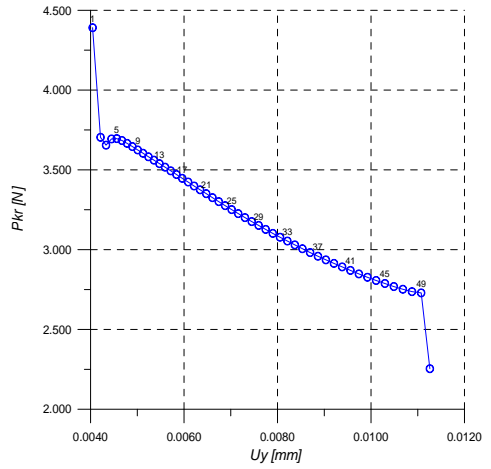
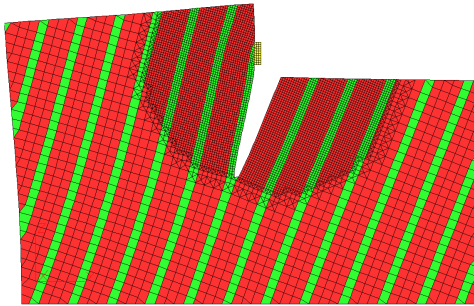
Kąt uwarstwienia $\beta = 55^\circ$



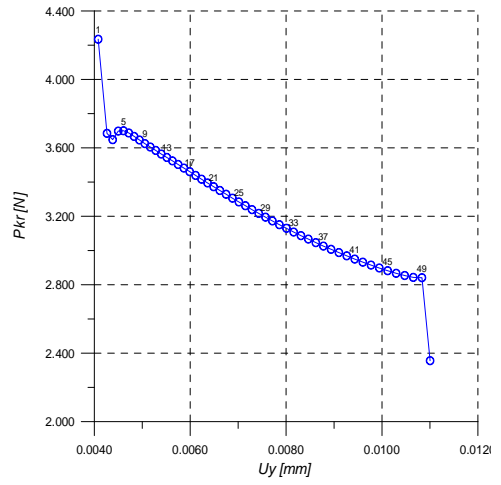
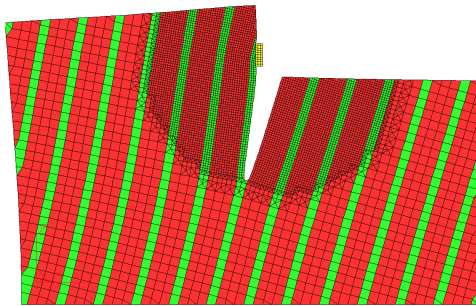
Kąt uwarstwienia $\beta = 60^\circ$



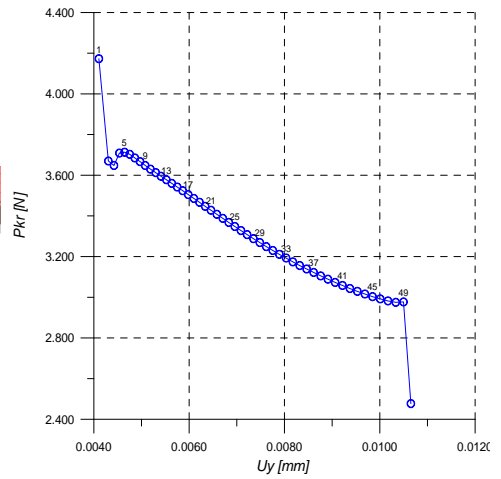
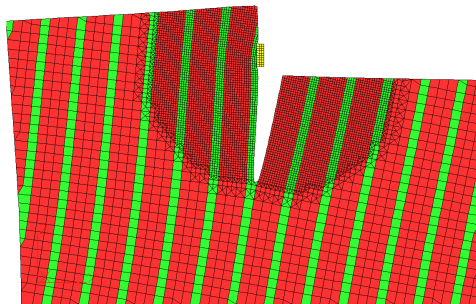
Kąt uwarstwienia $\beta = 65^\circ$



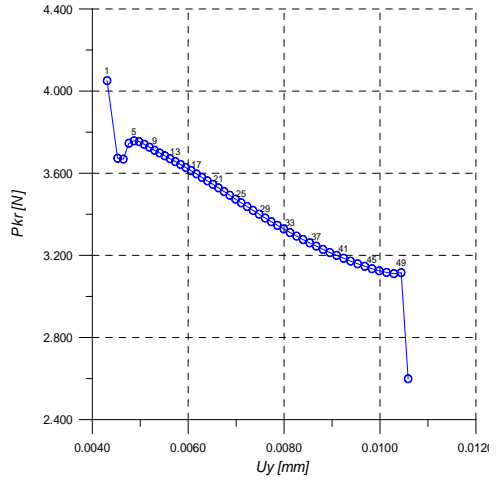
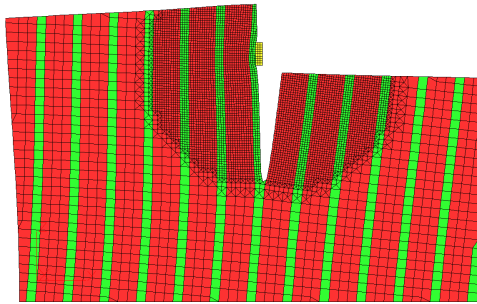
Kąt uwarstwienia $\beta = 70^\circ$



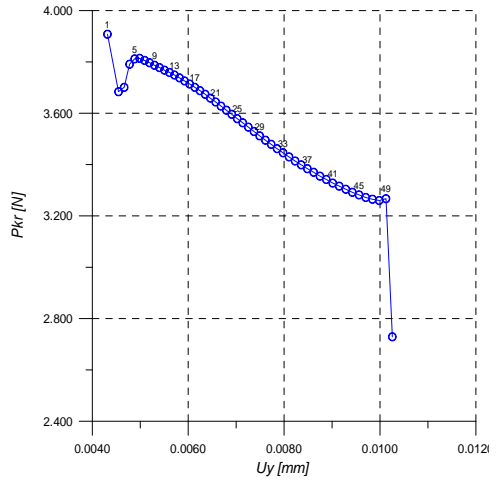
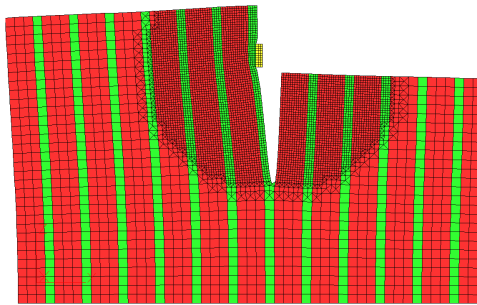
Kąt uwarstwienia $\beta = 75^\circ$



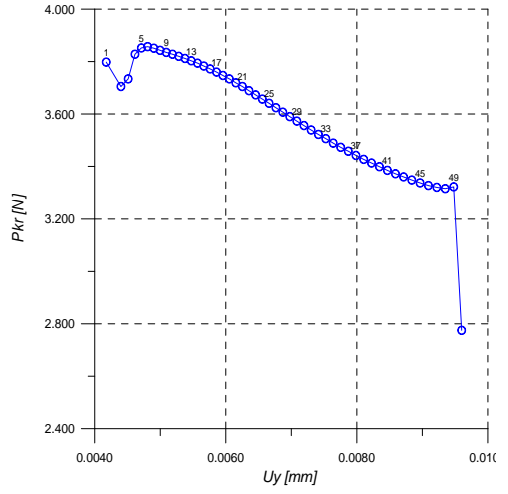
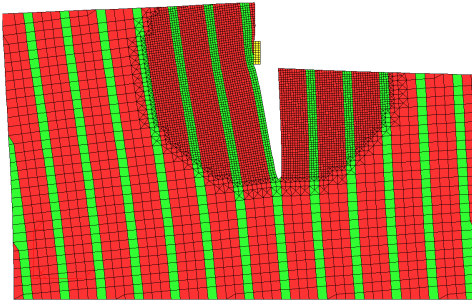
Kąt uwarstwienia $\beta = 80^\circ$



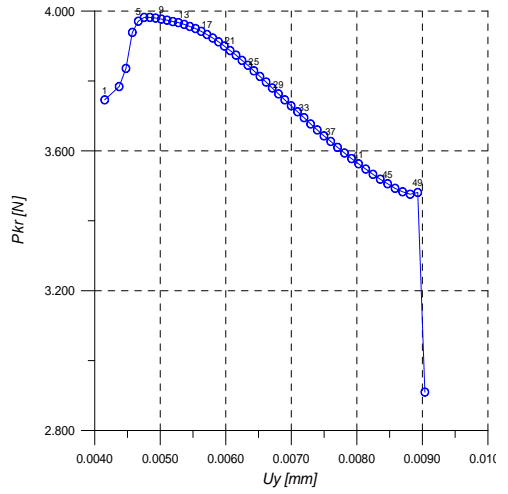
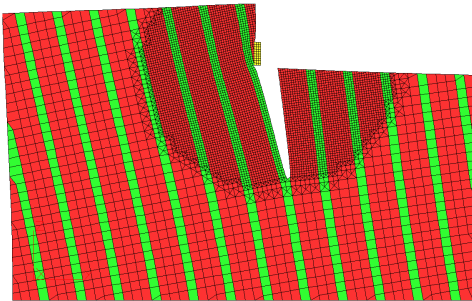
Kąt uwarstwienia $\beta = 85^\circ$



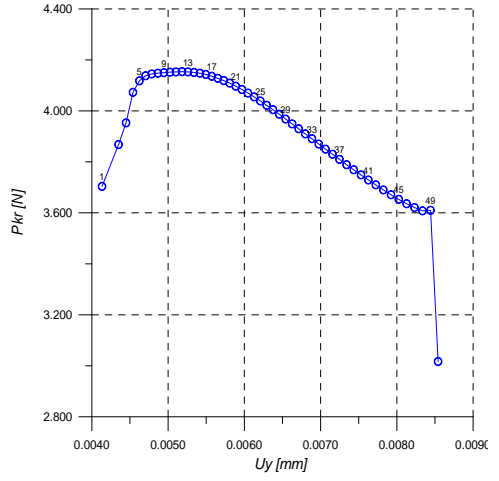
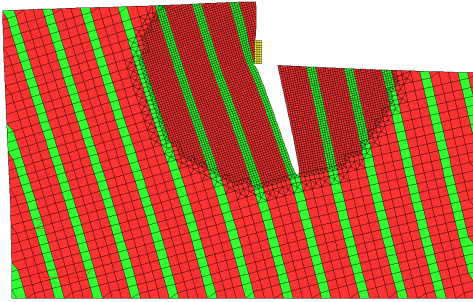
Kąt uwarstwienia $\beta = 90^\circ$



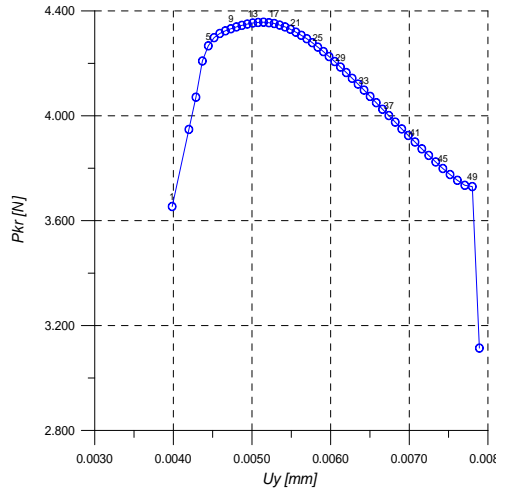
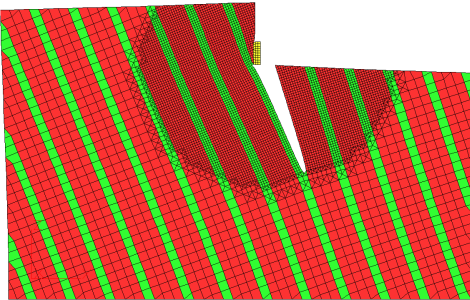
Kąt uwarstwienia $\beta = 95^\circ$



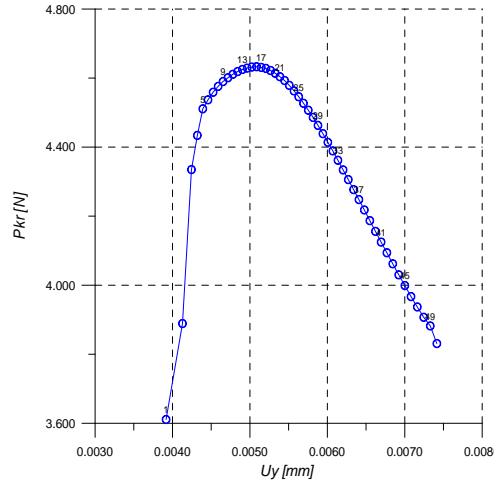
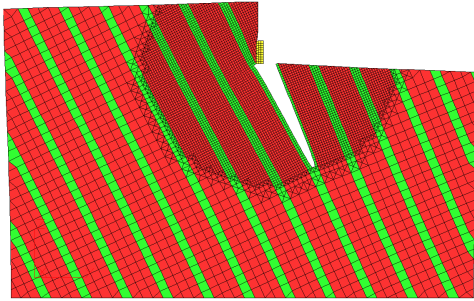
Kąt uwarstwienia $\beta = 100^\circ$



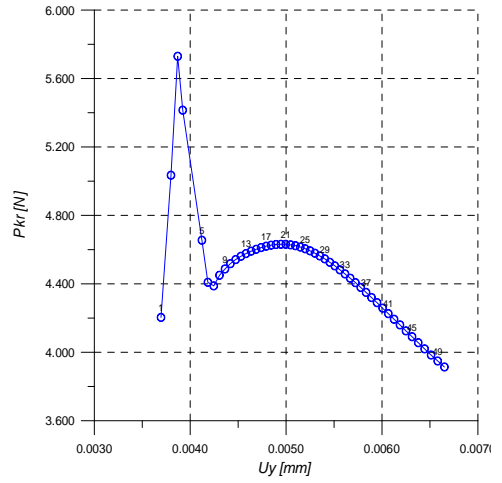
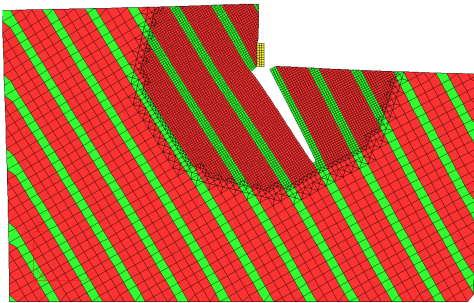
Kąt uwarstwienia $\beta = 105^\circ$



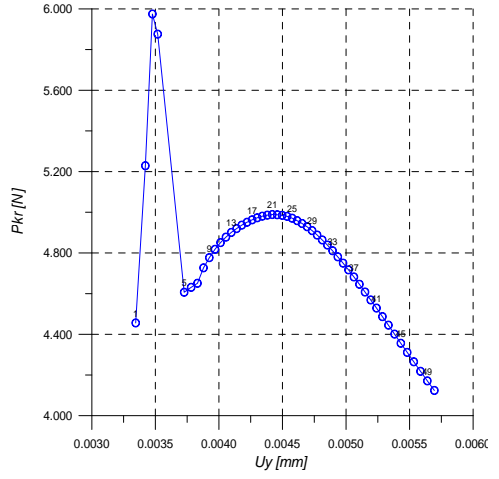
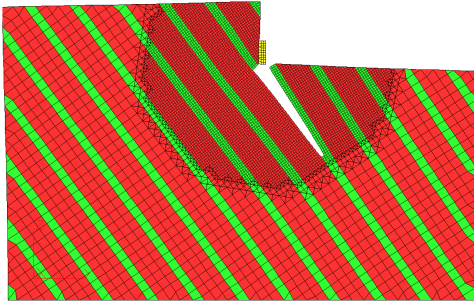
Kąt uwarstwienia $\beta = 110^\circ$



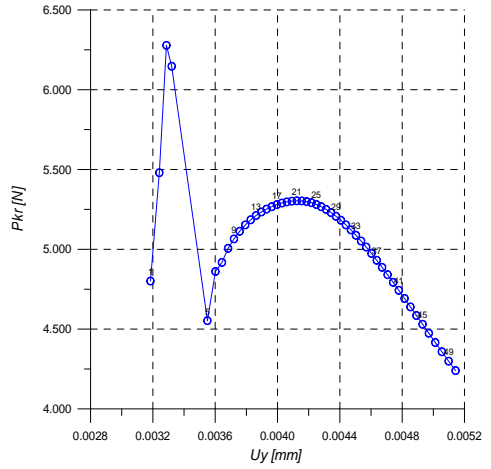
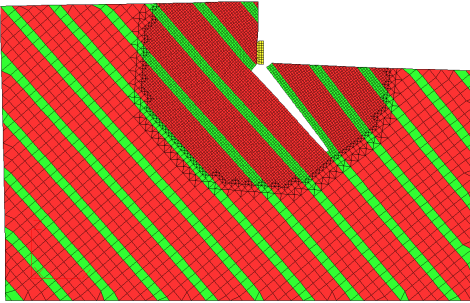
Kąt uwarstwienia $\beta = 115^\circ$



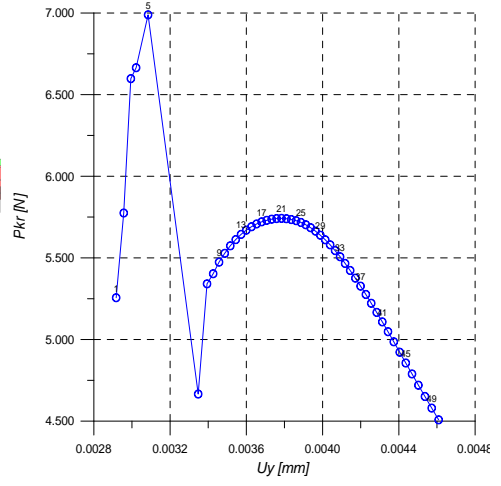
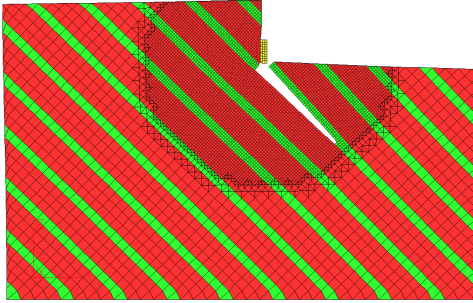
Kąt uwarstwienia $\beta = 120^\circ$



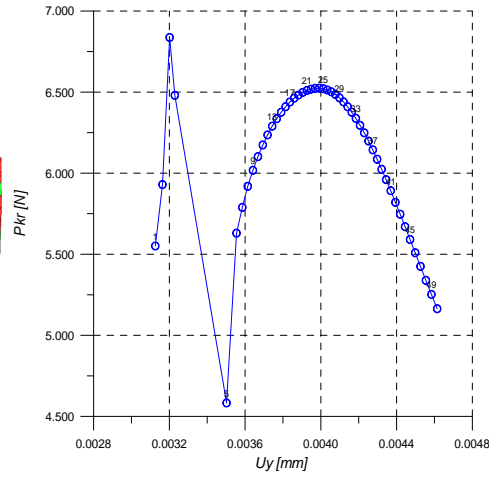
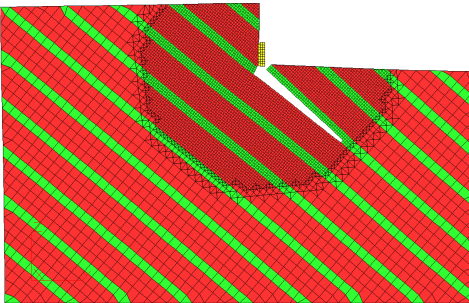
Kąt uwarstwienia $\beta = 125^\circ$



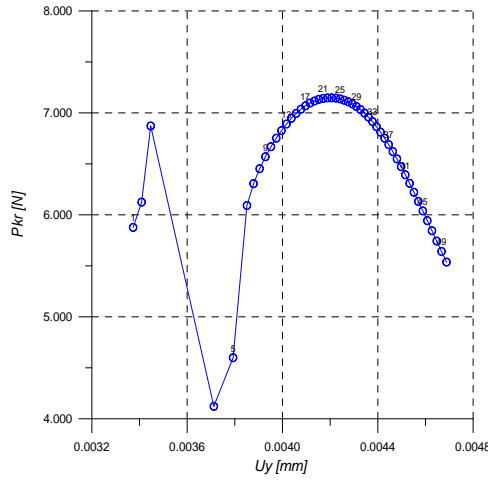
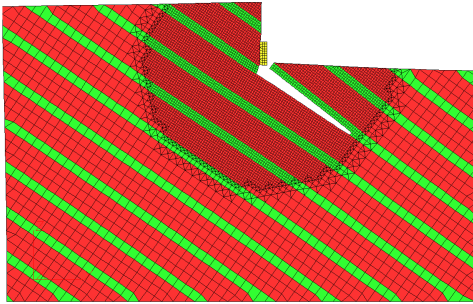
Kąt uwarstwienia $\beta = 130^\circ$



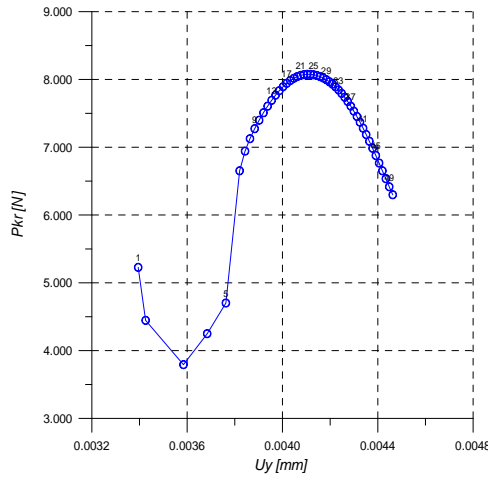
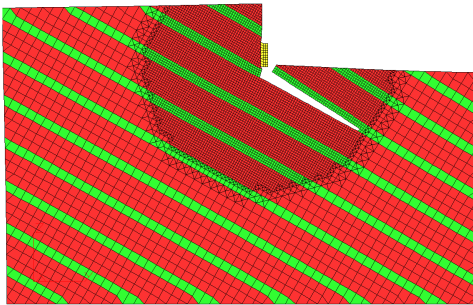
Kąt uwarstwienia $\beta = 135^\circ$



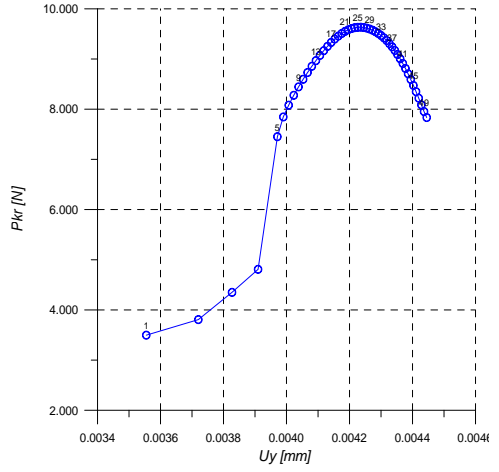
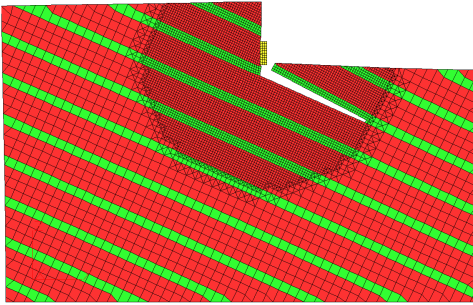
Kąt uwarstwienia $\beta = 140^\circ$



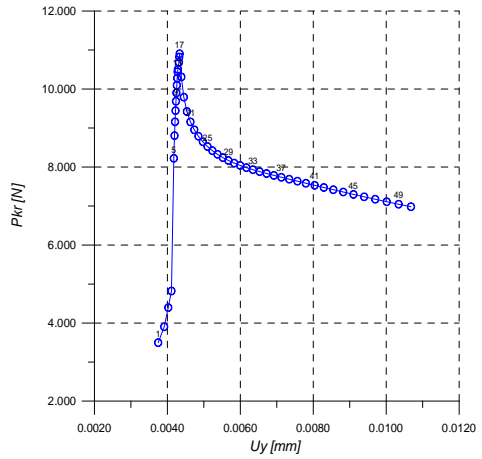
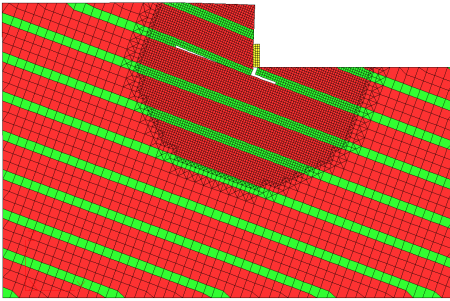
Kąt uwarstwienia $\beta = 145^\circ$



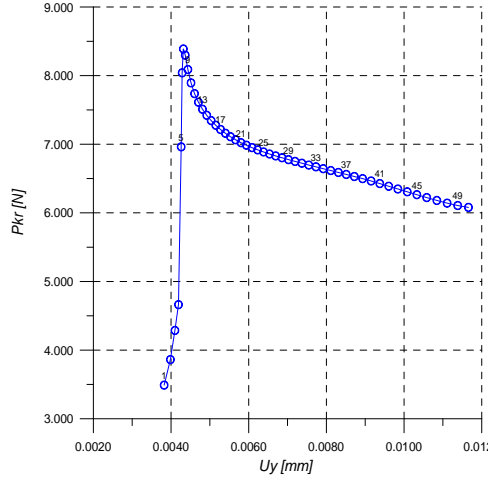
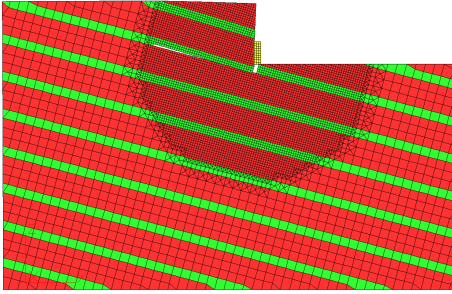
Kąt uwarstwienia $\beta = 150^\circ$



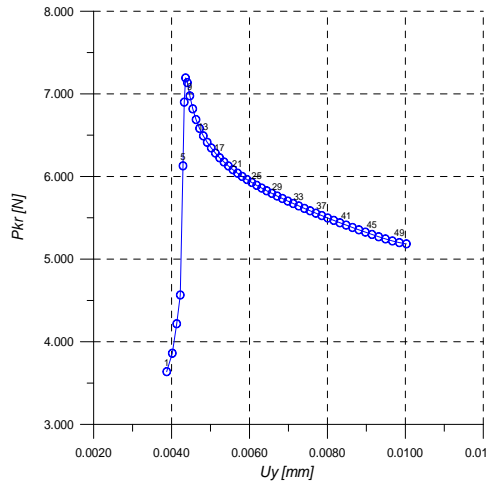
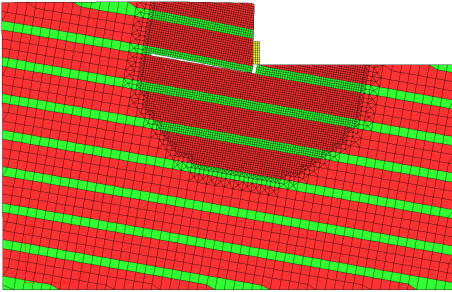
Kąt uwarstwienia $\beta = 155^\circ$



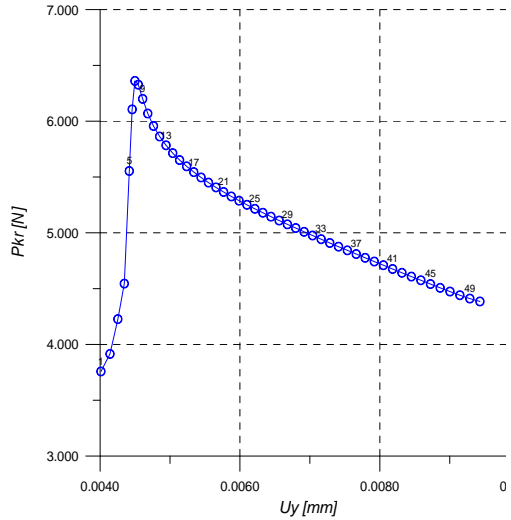
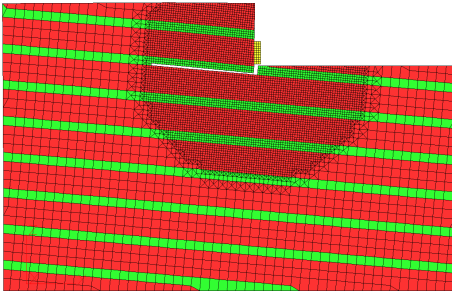
Kąt uwarstwienia $\beta = 160^\circ$



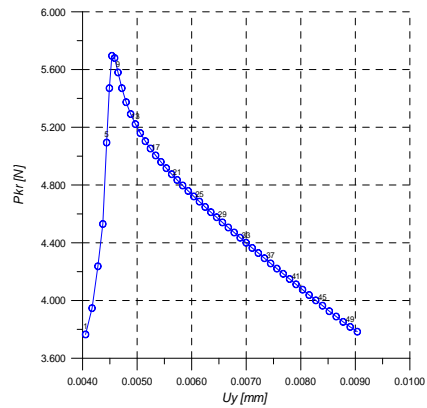
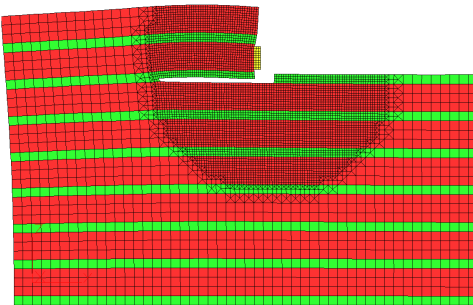
Kąt uwarstwienia $\beta = 165^\circ$



Kąt uwarstwienia $\beta = 170^\circ$



Kąt uwarstwienia $\beta = 175^\circ$

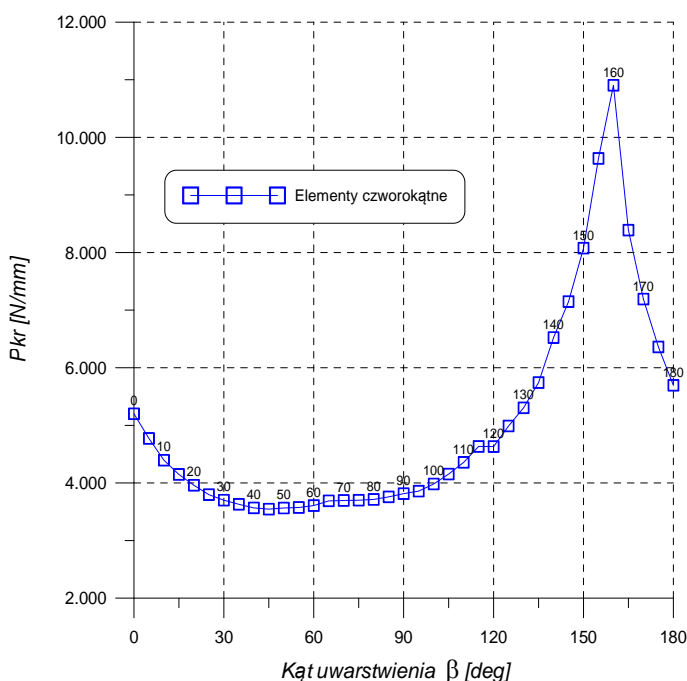


Kąt uwarstwienia $\beta = 180^\circ$

Rys.4.3. Przebieg zmian deformacji progu skalnego pod naciskiem powierzchni natarcia ostrza, dla kąta uwarstwienia β zmieniającego się w zakresie $0^\circ \div 180^\circ$

Jak wynika z rysunków 4.3, do wartości kąta β około 155° nie szczególnego w porównaniu z dotychczasowymi wynikami symulacji się nie dzieje. Wraz ze wzrostem obciążenia tworzy się otwarta, „rozciągną” szczelina za progiem. Sytuacja zmienia się diametralnie w przedziale kątów $160^\circ \div 175^\circ$. W początkowym stadium, szczelina otwiera się jak

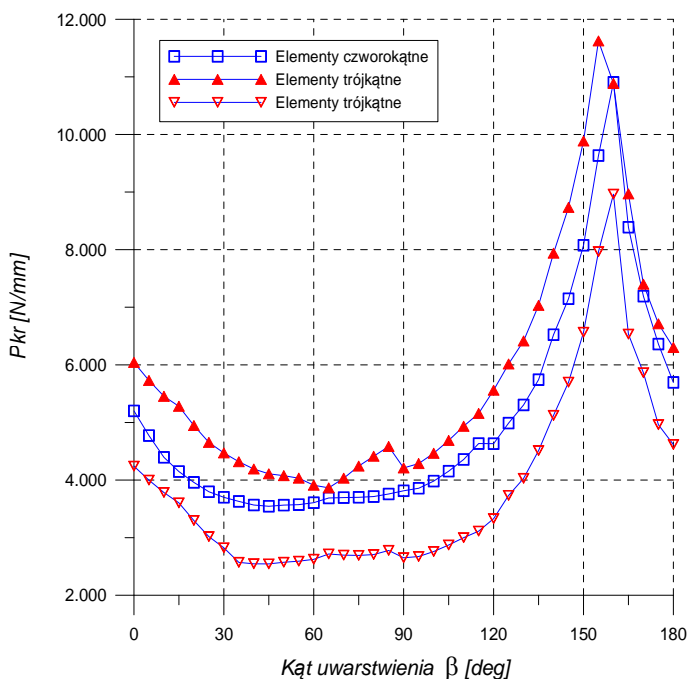
poprzednio za progiem, a później zmienia kierunek propagacji i zaczyna powstawać szczelina poślizgowa na granicy warstw. Pod naporem obciążenia zewnętrznego, materiał zaczyna się ślizgać wzdłuż powierzchni penetrującej szczeliny, równocześnie też jest w tej strefie silnie zaciskany, na co wskazuje sposób deformacji siatki elementów skończonych. Dla kąta 180^0 sytuacja zaczyna ponownie się stabilizować. Jak wykazała analiza, te zaburzenia w przebiegu deformacji materiału, mają swe konsekwencje również w przebiegu zmian siły krytycznej, tj. siły niszczącej strukturę materiału, w poszczególnych etapach rozwoju szczeliny.



Rys. 4.4. Kształtowanie się maksymalnej wartości siły krytycznej w zależności od zmiany kąta uwarstwienia

Wyraźnie to ilustrują wykresy zależności siła – przemieszczenie poziome punktu obciążonego, pokazane na rysunku 4.3. Wykres przedstawiony na rysunku 4.4, ilustruje zmiany wartości siły krytycznej, odczytanej jako lokalne maksimum na wykresach 4.3, w zależności od kąta nachylenia warstw β .

Widać wyraźny wzrost oporu materiału w okolicach kąta uwarstwienia $\beta=160^\circ$, wywołany zmianą charakteru szczeliny i udziałem sił tarcia.



Rys.4.5. Wpływ zmiany typu elementu skończonego na wartość siły krytycznej przy różnych kątach uwarstwienia

Podobnie kształtuje się ta zależność w modelu C, dla wariantu z elementami trójkątnymi, przedstawiona na rys. 4.5. Widać tu wyraźny wpływ kształtu i usytuowania elementów trójkątnych na obliczoną

wartość siły krytycznej. Wartości wyznaczone dla elementów czworokątnych, których funkcja kształtu zapewnia dokładniejsze wyznaczenie wartości naprężeń i przemieszczeń modelu, układają się w obszarze ograniczonym przez wartości uzyskane z zastosowaniem elementów trójkątnych.

5. Podsumowanie

Przeprowadzona symulacja MES wykazała, że:

- dla kruchych materiałów uwarstwionych, dla podobnych cech geometrycznych modelu, występuje silny wpływ sposobu wywierania obciążenia oraz przyjętych warunków brzegowych,
- mechanika procesu rozwoju rys towarzyszących odspajaniu głównego elementu wióra, zależy ściśle od wartości asymetrii wytrzymałości materiału warstw z których jest zbudowana skała anizotropowa,
- większa asymetria wytrzymałości materiału warstw powoduje, że materiał w warstwie „słabszej” łatwiej podlega zniszczeniu. W efekcie, cały materiał uwarstwiony, podlega szybciej rozwarstwieniu.

Przeprowadzone symulacje numeryczne, w dużym stopniu są zbieżne z wynikami badań doświadczalnych, przedstawionymi w rozdziale 1 oraz 2, dotyczącymi przebiegu formowania wióra podczas skrawania skał, jak dotyczącymi skrawania kompozytowych materiałów uwarstwionych, wytworzonych np. na bazie grafitu (np. rys. 1.9). Niezbędna jest jednak szersza analiza prezentowanej tematyki (w oparciu o większą liczbę elementów modelu), celem pełniejszego określenia trajektorii szczelin o większym zasięgu. Jest to niezbędne np. w prognozowaniu wymiarów elementów wióra powstającego w trakcie urabiania skał z wykorzystaniem noży urabiających, zachowania się ośrodka skalnego w okolicach podziemnych budowli inżynierskich, czy problematyki zniszczenia konstrukcji wykonywanych z materiałów kompozytowych.

NUMERYCZNE BADANIA PROCESU SKRAWANIA SKAŁ ANIZOTROPOWYCH

Streszczenie

W monografii przeanalizowano wpływ uwarstwienia materiału sprężysto – kruchego, na propagację szczeliny podczas pęknięcia takiego materiału pod działaniem obciążenia zewnętrznego. Do celów symulacji wykorzystano Metodę Elementów Skończonych. Jako warunek zniszczenia wykorzystano kryterium Podgórskiego (PJ), dobrze opisujące zachowanie skał, betonu i innych geomateriałów. Zbadano wpływ asymetrii wytrzymałości materiału uwarstwionego na mechanizm pęknięcia. Przeanalizowano także wpływ przyjęcia określonych warunków brzegowych modelu, na efekt symulacji numerycznej.

NUMERICAL RESEARCH OF THE CUTTING PROCESS FOR ANISOTROPIC ROCKS

Summary

In the monograph the influence of layer direction in elastic-brittle material on the progress of crack propagation as a result of the acting of shearing and stretching loads was analyzed. The Finite Elements Method was applied to stress analysis as well as the lost elements method being applied to the simulation of crack propagation. The analysis used the Podgórski (PJ) material failure criterion which was used for the description of material with properties close to the properties of rock, concrete and other geomaterials.

In this monograph also an analysis has been presented concerning the influence of the strength asymmetry in laminar elastic-brittle material on the crack propagation mechanism when a destructive load is applied to a sample.

The monograph describes the results of the Finite Elements Method analysis concerning the influence of certain boundary conditions assumed in the analysis on the results of the numerical simulations.

DODATEK 1

Wyznaczanie współczynników kryterium PJ

Arkusz MathCada wyliczający parametry kryterium: $C_0, C_1, C_2, \alpha, \beta$ oraz wartości parametrów λ, θ .

Wyznaczanie parametrów kryterium PJ:

$$P(J) = \cos\left(\frac{1}{3} \cdot \arccos(\alpha \cdot J) - \beta\right) \quad - \text{definicja funkcji opisującej kształt przekroju poprzecznego powierzchni granicznej}$$

$$C_2 \cdot \tau_o^2 + C_1 \cdot P(J) \cdot \tau_o + \sigma_o - C_o = 0 \quad - \text{równanie powierzchni granicznej kryterium}$$

Parametry materiału otrzymane w testach wytrzymałościowych w płaskim stanie naprężenia:

$$f_c := 1.0 \quad f_{oc} := 1.25 \cdot f_c \quad f_{cc} := 1.15 \cdot f_c \quad - \text{wytrzymałości na ściskanie}$$

$$f_t := 0.1 \cdot f_c \quad f_v := f_t \quad - \text{wytrzymałości na rozciąganie}$$

Stan naprężenia w 5 punktach, które zostały wybrane do określenia parametrów kryterium:

Nr	σ_1	$\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$	σ_0	τ_0	J	φ	$P(J)$
0	f_v	1 : 1 : 1	f_v	0	nieokreślony	nieokreślony	nieokreślona
1	f_t	1 : 0 : 0	$\frac{1}{3} f_t$	$\frac{\sqrt{2}}{3} f_t$	1	0°	P_0
2	$-f_{cc}$	1 : 1 : 0	$-\frac{2}{3} f_{cc}$	$\frac{\sqrt{2}}{3} f_{cc}$	1	0°	P_0
3	$-f_c$	1 : 0 : 0	$-\frac{1}{3} f_c$	$\frac{\sqrt{2}}{3} f_c$	-1	60°	P_{60}
4	$-f_{oc}$	1 : 0.5 : 1	$-\frac{1}{2} f_{oc}$	$\frac{\sqrt{6}}{6} f_{oc}$	0	30°	P_{30}

Oznaczenia upraszczające:

$$\lambda = P_{60}/P_0, \quad \theta = P_{60}/P_{30}$$

$$C1 P_0 = B_1, \quad C1 P_{60} = B_2, \quad C1 P_{30} = B_3$$

Podstawiając $\alpha = \cos(3\gamma)$ otrzymamy:

$$\lambda = \frac{P_{60}}{P_0} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \gamma - \beta\right)}{\cos(\gamma - \beta)} \quad \theta = \frac{P_{60}}{P_{30}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \gamma - \beta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6} - \beta\right)} \quad (A)$$

Podstawienie $\alpha = \sin(3\delta)$ daje:

$$\lambda = \frac{P_{60}}{P_0} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \delta - \beta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6} - \delta - \beta\right)} \quad \theta = \frac{P_{60}}{P_{30}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{6} + \delta - \beta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6} - \beta\right)} \quad (B)$$

Przekształcając układ (A) otrzymamy:

$$\gamma = \operatorname{atan}\left(\frac{\lambda \cdot \cos(\beta) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) - \lambda \cdot \sin(\beta)}\right) \quad \beta = \operatorname{atan}\left(\frac{2 \cdot \lambda \cdot \cos(\gamma) - \sqrt{3} \cdot \theta}{\theta - 2 \cdot \lambda \cdot \sin(\gamma)}\right) \quad (A.1)$$

Układ ten umożliwia znalezienie wartości γ i β metodą iteracyjną startując od wartości $\gamma=0$ i $\beta=0$

Przekształcając układ (B) otrzymamy:

$$\delta = \operatorname{acos}\left[\frac{\theta}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)\right] \quad \beta = \frac{\pi}{6} - \operatorname{atan}\left[\frac{\theta(1 - \lambda)}{2 \cdot \lambda \cdot \sin(\delta)}\right] \quad (B.1)$$

Formuły te upraszczają obliczenia, bo umożliwiają bezpośrednio wyznaczenie wartości δ i β . Autorem tego przekształcenia jest P. Lewiński - "Nieliniowa analiza osiowo-symetrycznych konstrukcji powłokowych...", Prace Naukowe PW, z 131, Budownictwo, 1996, str. 73

Podstawienie składowych naprężenia do równania kryterium:

Punkt 0: $f_v - C_0 = 0$ -----> daje to $C_0 = f_v$, a po przyjęciu równości: $f_v = f_t$ mamy:
 $C_0 = f_t$ - tę wartość podstawiamy do następnych równań

Układ równań (C) pozwala wyznaczyć stałe: C_1, C_2, α, β .

Jest to liniowy układ równań $M \cdot \mathbf{f} = \mathbf{f}$ względem C_2, B_1, B_2, B_3 :

$$\begin{array}{l}
 \text{Punkt 1: } C_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot f_t + \sqrt{2} \cdot B_1 = 2 \\
 \text{Punkt 2: } C_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot f_{cc} + \sqrt{2} \cdot B_1 = 2 + 3 \cdot \frac{f_t}{f_{cc}} \\
 \text{Punkt 3: } C_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot f_c + \sqrt{2} \cdot B_2 = 1 + 3 \cdot \frac{f_t}{f_c} \\
 \text{Punkt 4: } C_2 \cdot f_{oc} + \sqrt{6} \cdot B_3 = 3 + 6 \cdot \frac{f_t}{f_{oc}}
 \end{array} \quad (C)$$

$$M := \begin{pmatrix} \frac{2}{3}f_t & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}f_{cc} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3}f_c & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ f_{oc} & 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$f := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 + 3 \cdot \frac{f_t}{f_{cc}} \\ 1 + 3 \cdot \frac{f_t}{f_c} \\ 3 + 6 \cdot \frac{f_t}{f_{oc}} \end{pmatrix}$$

Rozwiązaniem układu jest wektor:

$$\begin{pmatrix} C_2 \\ B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} := \text{lsolve}(M, f) = \begin{pmatrix} 0.3726708075 \\ 1.3966456920 \\ 0.7435601121 \\ 1.2305262758 \end{pmatrix}$$

Ponieważ $\lambda = P_{60}/P_0$ oraz $\theta = P_{60}/P_{30}$ to mamy: $\lambda = B_2/B_1$, $\theta = B_2/B_3$

$$\lambda := \frac{B_2}{B_1} = 0.532390 \quad \theta := \frac{B_2}{B_3} = 0.604262$$

Ten sam wynik dają formuły otrzymane po analitycznym rozwiązaniu układu równań (C)

$$C_2 := \frac{9}{2} \cdot \frac{f_t}{f_{cc} \cdot (f_{cc} - f_t)} = 0.372671$$

$$B_1 := \sqrt{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot C_2 \cdot f_t \right) = 1.396646$$

$$\lambda := \frac{\frac{f_{cc}}{3 \cdot f_t} + \frac{f_{cc}}{f_c} - \frac{f_c}{f_{cc} - f_t}}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{f_{cc}}{f_t} - \frac{f_{cc}}{f_{cc} - f_t}} = 0.532390$$

$$\theta := \sqrt{3} \cdot \frac{\frac{1}{3} + \frac{f_t}{f_c} - \frac{f_t \cdot f_c}{f_{cc} \cdot (f_{cc} - f_t)}}{1 + 2 \cdot \frac{f_t}{f_{oc}} - \frac{3 \cdot f_t \cdot f_{oc}}{2 \cdot f_{cc} \cdot (f_{cc} - f_t)}} = 0.604262$$

Po wyznaczeniu wartości λ i θ , można rozwiązać układ równań (A.1) wyznaczając parametry α i β . Można to zrobić iteracyjnie startując od wartości $\beta = 0$ lub $\alpha = 1$ ($\gamma = 0$), wykorzystując szybką zbieżność układu, lub obliczyć bezpośrednio wykorzystując formuły P. Lewińskiego (B.1)

Metoda iteracyjna - J. Podgórski, "General Failure Criterion for Isotropic Media", JEM ASCE, 111, 1985

1. Definiujemy funkcje wynikające z równań (A.1):

$$G(b) := \operatorname{atan} \left(\frac{\lambda \cdot \cos(b) - \cos\left(\frac{\pi}{3} - b\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - b\right) - \lambda \cdot \sin(b)} \right) \quad B(g) := \operatorname{atan} \left(\frac{2 \cdot \lambda \cdot \cos(g) - \sqrt{3} \cdot \theta}{\theta - 2 \cdot \lambda \cdot \sin(g)} \right)$$

2. Przyjmujemy wartość początkową: $\gamma := 0.0$

3. Kilkakrotnie obliczamy:

$\beta := B(\gamma) = 3.005673 \times 10^{-2}$	$\gamma_{\text{nowy}} := G(\beta) = 7.607409 \times 10^{-3}$
$\beta_{\text{nowy}} := B(\gamma) = 3.041323 \times 10^{-2}$	$\gamma_{\text{nowy}} := G(\beta) = 7.240533 \times 10^{-3}$
$\beta_{\text{nowy}} := B(\gamma) = 3.039819 \times 10^{-2}$	$\gamma_{\text{nowy}} := G(\beta) = 7.256023 \times 10^{-3}$
$\beta_{\text{nowy}} := B(\gamma) = 3.039883 \times 10^{-2}$	$\gamma_{\text{nowy}} := G(\beta) = 7.255365 \times 10^{-3}$
$\beta_{\text{nowy}} := B(\gamma) = 3.039880 \times 10^{-2}$	$\gamma_{\text{nowy}} := G(\beta) = 7.255393 \times 10^{-3}$
$\beta_{\text{nowy}} := B(\gamma) = 3.039880 \times 10^{-2}$	$\gamma_{\text{nowy}} := G(\beta) = 7.255392 \times 10^{-3}$
$\beta_{\text{nowy}} := B(\gamma) = 3.039880 \times 10^{-2}$	$\gamma_{\text{nowy}} := G(\beta) = 7.255392 \times 10^{-3}$

aż do uzyskania koniecznej dokładności.

4. Na koniec obliczamy: $\alpha := \cos(3\gamma) = 9.997631 \times 10^{-1}$

Opisane iteracje najprościej wykonać pisząc krótka procedurę iteracyjną.

Oto wyniki obliczeń przy 8 iteracjach, błąd względny jest mniejszy niż 10^{-7}

Wyniki obliczeń programem
"Alfa_Beta.pas"
Lambda= 0.532389937106918
Theta = 0.604261872983455
Alfa = 0.999763126166102
Beta = 0.030398801440890

Formuły Pawła Lewińskiego

$$\delta_{\text{ww}} := \arccos\left[\frac{\theta}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)\right] = 0.5163433839$$

$$\beta_{\text{ww}} := \frac{\pi}{6} - \operatorname{atan}\left[\frac{\theta(1-\lambda)}{2 \cdot \lambda \cdot \sin(\delta)}\right] = 0.03039880144$$

$$\alpha_{\text{ww}} := \sin(3 \cdot \delta) = 0.999763126166$$

Wyniki te są zgodne z dokładnością do 11 miejsca dziesiętnego z wynikami otrzymanymi iteracyjnie