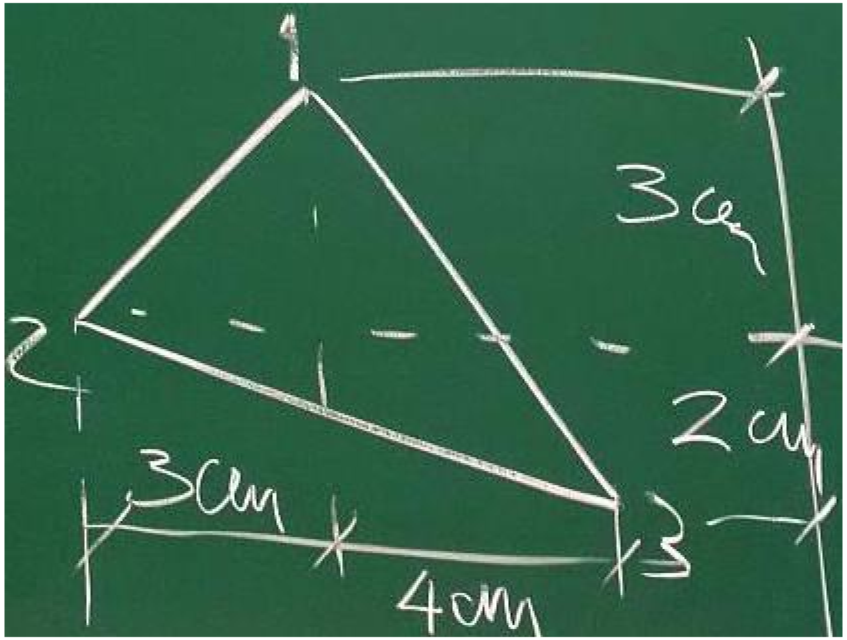
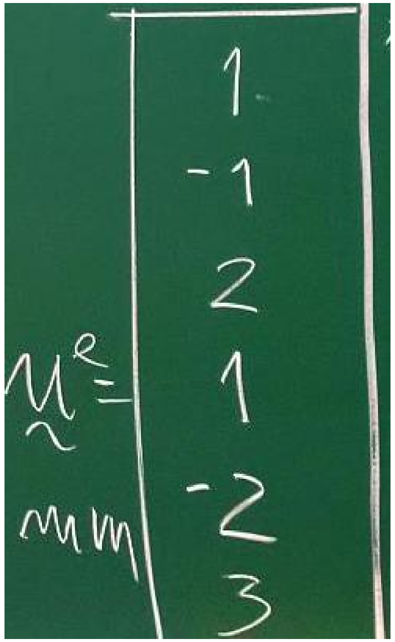
Podać składowe wektora odkształceń elementu CST z dokładnością do 5-ciu miejsc znaczących

Przykład rozwiązania w wersji "kalkulatorowej" -->





wektory współrzędnych elementu

$$x_e = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad y_e = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$x_e := \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot cm \qquad y_e := \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot cm$$

wektor przemieszczeń elementu

$$u_e = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} \qquad u_e := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot mm$$

Składowe x i y wektora przemieszczeń elementu

$$u_{ex} = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x3} \end{bmatrix} \qquad u_{ey} = \begin{bmatrix} u_{y1} \\ u_{y2} \\ u_{y3} \end{bmatrix} \qquad u_{ex} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} mm \qquad u_{ey} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} mm$$

Funkcje przemieszczeń elementu

$$u_x(x,y) = \sum_{i=1}^{3} N_i(x,y) \cdot u_{xi} \qquad u_y(x,y) = \sum_{i=1}^{3} N_i(x,y) \cdot u_{yi}$$

Wektor odkształceń elementu

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_x = \frac{d}{dx} u_x(x,y) \qquad \varepsilon_y = \frac{d}{dy} u_y(x,y) \qquad \gamma_{xy} = \frac{d}{dy} u_x(x,y) + \frac{d}{dx} u_y(x,y)$$

$N_i(x,y) = a_i + b_i x + c_i y$ *- funkcja kształtu węzła"i" (i=1,2,3)*

$dNx_i(x,y) = \frac{d}{dx} N_i(x,y) = b_i$ *- pochodna funkcji kształtu węzła "i" względem "x"*

$dNy_i(x,y) = \frac{d}{dy} N_i(x,y) = c_i$ *- pochodna funkcji kształtu węzła "i" względem "y"*

Składowe wektora odkształcenia można obliczyć teraz za pomoca sumowania:

$$\varepsilon_x = \sum_{i=1}^{3} b_i u_{xi} \qquad \varepsilon_y = \sum_{i=1}^{3} c_i u_{yi} \qquad \gamma_{xy} = \sum_{i=1}^{3} \left(c_i u_{xi} + b_i u_{yi} \right)$$

Wyznaczanie współczynników funkcji kształtu dzięki warunkom zgodności przemieszczeń w węzłach uzyskamy przez rozwiązanie 3 układów równań liniowych:

$$\left.\begin{aligned} N_1(x_1,y_1) &= a_1 + b_1 x_1 + c_1 y_1 = 1 \\ N_1(x_2,y_2) &= a_1 + b_1 x_2 + c_1 y_2 = 0 \\ N_1(x_3,y_3) &= a_1 + b_1 x_3 + c_1 y_3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} N_2(x_1,y_1) &= a_2 + b_2 x_1 + c_2 y_1 = 0 \\ N_2(x_2,y_2) &= a_2 + b_2 x_2 + c_2 y_2 = 1 \\ N_2(x_3,y_3) &= a_2 + b_2 x_3 + c_2 y_3 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} N_3(x_1,y_1) &= a_3 + b_3 x_1 + c_3 y_1 = 0 \\ N_3(x_2,y_2) &= a_3 + b_3 x_2 + c_3 y_2 = 0 \\ N_3(x_3,y_3) &= a_3 + b_3 x_3 + c_3 y_3 = 1 \end{aligned}\right\}$$

Liniowe uklady równań można łatwo rozwiązać korzystając z metody Cramera lub eliminacji Gaussa. Ponieważ potrzebne są nam tylko współczynniki b_i oraz c_i (a_i niewystępują w równaniach składowych odkształcenia) możemy uprościć układy równań.
Dla przykładu pierwszy układ równań (dla węzła Nr 1) można przekształcić do postaci:

$$\left.\begin{aligned} b_1(x_1-x_2)+c_1(y_1-y_2)=1 \\ b_1(x_2-x_3)+c_1(y_2-y_3)=0 \end{aligned}\right\} \text{ i rozwiązać ---->} \quad b_1=-c_1\frac{y_2-y_3}{x_2-x_3}$$

$$c_1\left(y_1-y_2-\frac{(x_1-x_2)\,(y_2-y_3)}{x_2-x_3}\right)=1 \qquad c_1=\frac{x_2-x_3}{(x_2-x_3)\,(y_1-y_2)-(x_1-x_2)\,(y_2-y_3)}$$

$$b_1=\frac{y_2-y_3}{A2} \qquad c_1=\frac{x_3-x_2}{A2} \qquad A2=det(M) \qquad M=\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{bmatrix}$$

$A2=27\ cm^2$ *<---- jest tutaj podwojonym polem powierzchni elementu trójkatnego*

Drugi układ równan ---->

$$\left.\begin{aligned} b_2(x_2-x_1)+c_2(y_2-y_1)=1 \\ b_2(x_1-x_3)+c_2(y_1-y_3)=0 \end{aligned}\right\} \qquad b_1=\frac{y_3-y_1}{A2} \qquad c_1=\frac{x_1-x_3}{A2}$$

Trzeci układ równań ---->

$$\left.\begin{array}{l} b_3(x_3-x_1)+c_3(y_3-y_1)=1 \\ b_3(x_1-x_2)+c_3(y_1-y_2)=0 \end{array}\right\} \qquad b_1=\frac{y_1-y_2}{A2} \qquad c_1=\frac{x_1-x_1}{A2}$$

Po rozwązaniu tych układów równań otrzymamy:

$$\varepsilon_x=\sum_{i=1}^{3} b_i u_{xi} \qquad \varepsilon_y=\sum_{i=1}^{3} c_i u_{yi} \qquad \gamma_{xy}=\sum_{i=1}^{3}\left(c_i u_{xi}+b_i u_{yi}\right) \qquad \varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}$$