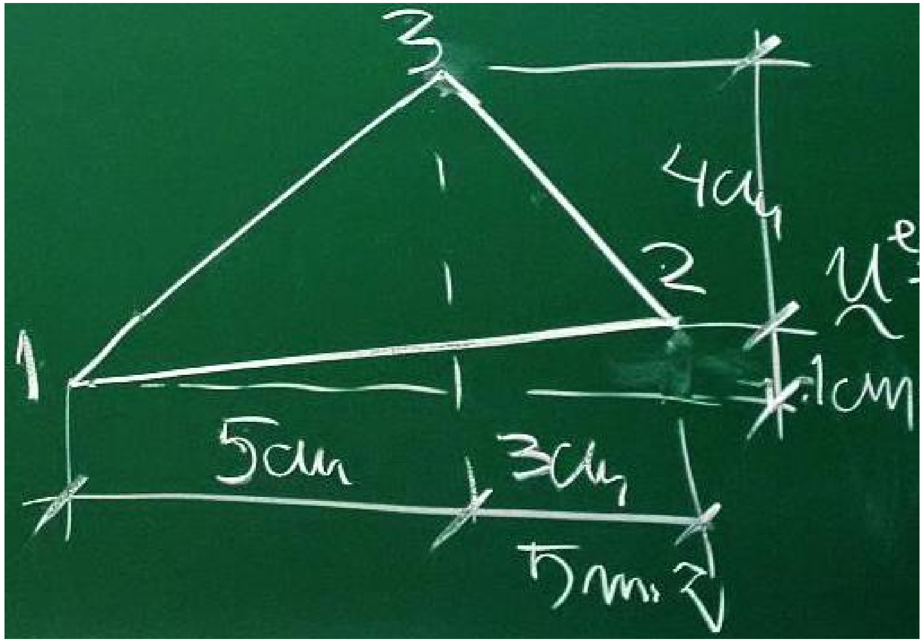
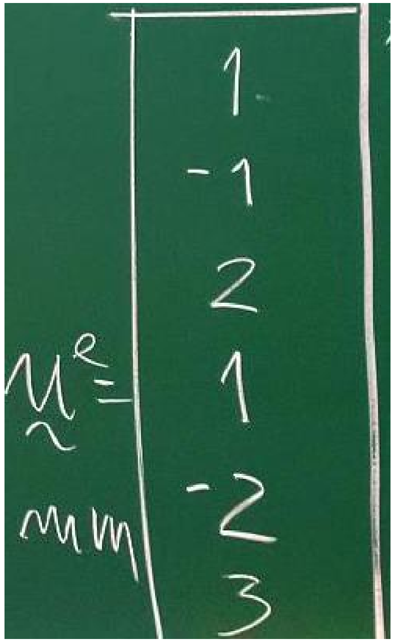
Podać składowe wektora odkształceń elementu CST z dokładnością do 5-ciu miejsc znaczących

Przykład rozwiązania "prostą metodą kalulatorową"





wektory współrzędnych elementu

$$x_e = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad y_e = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$x_e := \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot cm \qquad y_e := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot cm$$

wektor przemieszczeń elementu

$$u_e = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{x3} \\ u_{y3} \end{bmatrix} \qquad u_e := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot mm$$

Składowe x i y wektora przemieszczeń elementu

$$u_{ex} = \begin{bmatrix} u_{x1} \\ u_{x2} \\ u_{x3} \end{bmatrix} \qquad u_{ey} = \begin{bmatrix} u_{y1} \\ u_{y2} \\ u_{y3} \end{bmatrix} \qquad u_{ex} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} mm \qquad u_{ey} := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} mm$$

Funkcje przemieszczeń elementu

$$u_x(x,y) = a_x + b_x \cdot x + c_x \cdot y \qquad u_y(x,y) = a_y + b_y \cdot x + c_y \cdot y$$

Wektor odkształceń elementu

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_x = \frac{d}{dx} u_x(x,y) = b_x \qquad \varepsilon_y = \frac{d}{dy} u_y(x,y) = c_y \qquad \gamma_{xy} = \frac{d}{dy} u_x(x,y) + \frac{d}{dx} u_y(x,y) = c_x + b_y \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} b_x \\ c_y \\ c_x + b_y \end{bmatrix}$$

Wyznaczanie współczynników funkcji przemieszczeń dzięki warunkom zgodności przemieszczeń w węzłach. Tworzymy 2 układy równań liniowych:

$$\left.\begin{aligned} u_x(x_1,y_1) &= a_x + b_x x_1 + c_x y_1 = u_{x1} \\ u_x(x_2,y_2) &= a_x + b_x x_2 + c_x y_2 = u_{x2} \\ u_x(x_3,y_3) &= a_x + b_x x_3 + c_x y_3 = u_{x3} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} u_y(x_1,y_1) &= a_y + b_y x_1 + c_y y_1 = u_{y1} \\ u_y(x_2,y_2) &= a_y + b_y x_2 + c_y y_2 = u_{y2} \\ u_y(x_3,y_3) &= a_y + b_y x_3 + c_y y_3 = u_{y3} \end{aligned}\right\}$$

W postaci macierzowej równania te można zapisać bardzo prosto:

$$M \cdot \beta_x = u_{ex} \qquad M \cdot \beta_y = u_{ey}$$

gdzie M jest macierzą współrzędnych elementu:

$$Me = \begin{bmatrix} 1 & x_{e_1} & y_{e_1} \\ 1 & x_{e_2} & y_{e_2} \\ 1 & x_{e_3} & y_{e_3} \end{bmatrix}$$

a $\beta_x = \begin{bmatrix} a_x \\ b_x \\ c_x \end{bmatrix}$ *i* $\beta_y = \begin{bmatrix} a_y \\ b_y \\ c_y \end{bmatrix}$ *są wektorami poszukiwanych współczynników funkcji przemieszczeń elementu.*

Liniowe uklady równań można łatwo rozwiązać korzystając z metody Cramera lub eliminacji Gaussa. Ponieważ potrzebne są nam tylko współczynniki "b" oraz "c" (ponieważ "a" nie występują składowych wektora odkształcenia) możemy uprościć układy równań np. odejmując jedno z równań od 2 pozostałych.
Szczególnie uproszczenie dostajemy przyjmując początek układu współrzędnych w węźle nr 1:

$$\begin{bmatrix} x_{e_2} & y_{e_2} \\ x_{e_3} & y_{e_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_x \\ c_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ex_2} - u_{ex_1} \\ u_{ex_3} - u_{ex_1} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_{e_2} & y_{e_2} \\ x_{e_3} & y_{e_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_y \\ c_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ey_2} - u_{ey_1} \\ u_{ey_3} - u_{ey_1} \end{bmatrix}$$

Rozwiązując te układy otrzymamy:

$$\varepsilon := \begin{bmatrix} b_x \\ c_y \\ c_x + b_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2857 \cdot 10^{-2} \\ 6.2857 \cdot 10^{-2} \\ -6.5714 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \qquad 100\ \varepsilon = \begin{bmatrix} 2.2857 \\ 6.2857 \\ -6.5714 \end{bmatrix}$$

$$\beta_x := RozLN(Me, u_{ex}) = \begin{bmatrix} (1 \cdot 10^{-3}) \; m \\ 2.2857 \cdot 10^{-2} \\ -8.2857 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \qquad \beta_y := RozLN(Me, u_{ey}) = \begin{bmatrix} -1 \cdot 10^{-3} \; m \\ 1.7143 \cdot 10^{-2} \\ 6.2857 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}$$

$$A2 := |Me| = 35 \; cm^2 \qquad A2 \cdot \varepsilon = \begin{bmatrix} 80 \\ 220 \\ -230 \end{bmatrix} mm^2 \qquad A2 \cdot \beta_x = \begin{bmatrix} 3.5 \; m \\ 80 \\ -290 \end{bmatrix} mm^2 \qquad A2 \cdot \beta_y = \begin{bmatrix} -3.5 \; m \\ 60 \\ 220 \end{bmatrix} mm^2$$

$$\begin{bmatrix} x_{e_2} & y_{e_2} \\ x_{e_3} & y_{e_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_x \\ c_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ex_2} - u_{ex_1} \\ u_{ex_3} - u_{ex_1} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_{e_2} & y_{e_2} \\ x_{e_3} & y_{e_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_y \\ c_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ey_2} - u_{ey_1} \\ u_{ey_3} - u_{ey_1} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon := \begin{bmatrix} b_x \\ c_y \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2857 \cdot 10^{-2} \\ 6.2857 \cdot 10^{-2} \\ \end{bmatrix}$$

$$\left\lfloor c_x + b_y \right\rfloor \quad \left\lfloor -6.5714 \cdot 10^{-2} \right\rfloor$$