Obliczenie ugięcia membrany metodą obszarów kontrolnych (objętości skończonych -MOS) - rozwiązanie równania Poissona

ORIGIN := 1

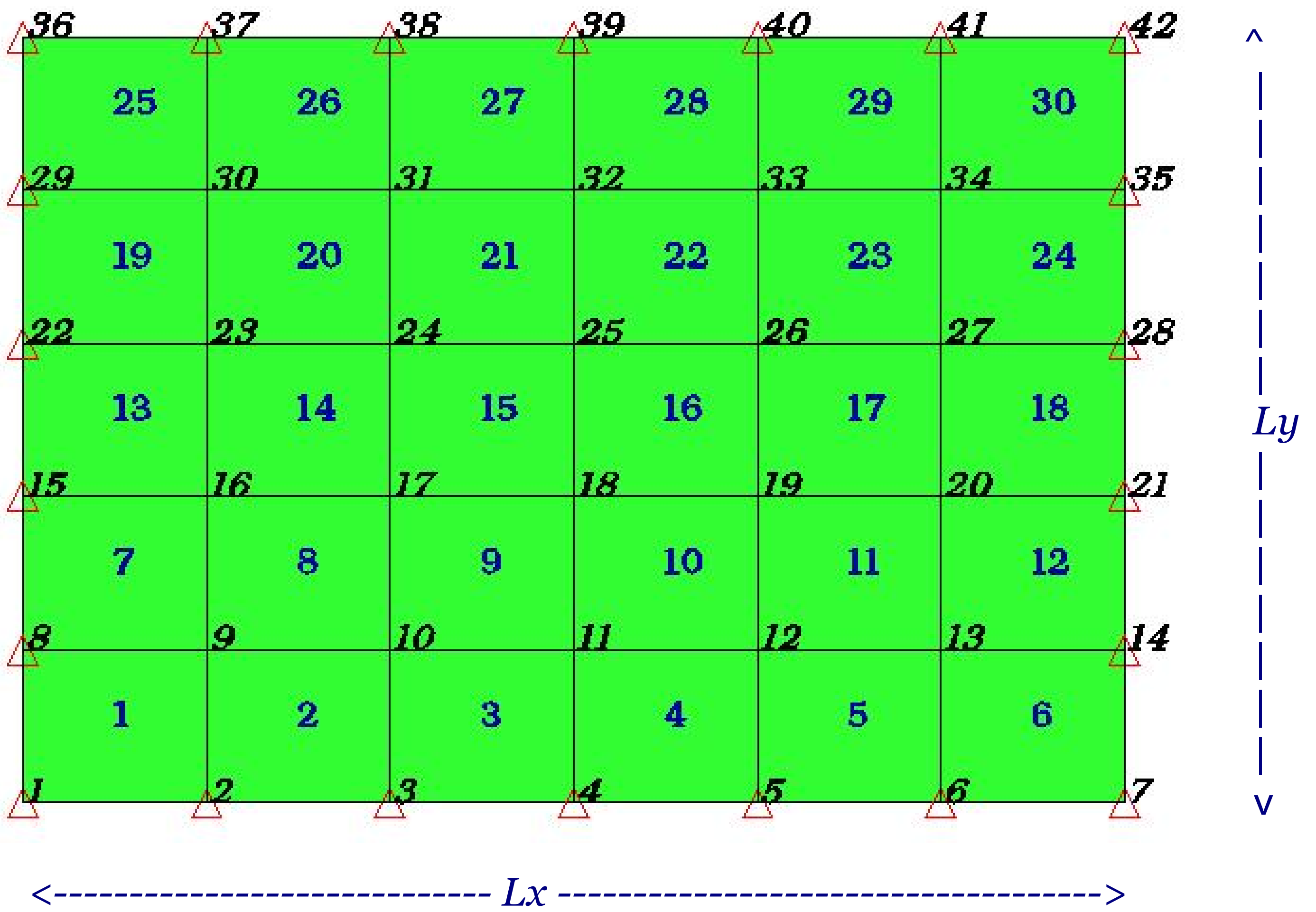
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y) = 0$$

Obliczyć przemieszczenie prostokątnej membrany o wymiarach Lx, Ly, opartej na obwodzie, obciążonej stałym ciśnieniem p0 i rozciąganej stałym napięciem T

Wektory alokacji

Nr	i	j	k	l
1	1	2	9	8
2	2	3	10	9
3	3	4	11	10
4	4	5	12	11
5	5	6	13	12
6	6	7	14	13
7	8	9	16	15
8	9	10	17	16
9	10	11	18	17
10	11	12	19	18
11	12	13	20	19
12	13	14	21	20
13	15	16	23	22
14	16	17	24	23
15	17	18	25	24
16	18	19	26	25
17	19	20	27	26
18	20	21	28	27
19	22	23	30	29
20	23	24	31	30
21	24	25	32	31
22	25	26	33	32
23	26	27	34	33
24	27	28	35	34
25	29	30	37	36
26	30	31	38	37
27	31	32	39	38
28	32	33	40	39
29	33	34	41	40
30	34	35	42	41

Numery obszarów i węzłów



Lx := 7.2m   Ly := 5m   p0 := 1kPa $T := 5\,\frac{kN}{m}$

$bx := \frac{Lx}{6}$ $by := \frac{Ly}{5}$ $f := \frac{p0}{T} \cdot bx \cdot by$

Funkcja symetryzująca macierz kwadratową. Funkcja kopiuje górny trójkat macierzy do trójkąta dolnego

```
Sym(A) := | n ← rows(A)
          | for i ∈ 2.. n
          |   for j ∈ 1.. i − 1
          |     A[i,j] ← A[j,i]
          | A
```

Funkcja AGR2 - Agregacja Macierzy, używana przy agregacji macierzy geometrycznej. Oznaczenia parametrów: A - zerowa macierz globalna, B - macierz eometryczna obszaru, L - macierz alokacji, n - numer pola

```
AGR2(A, B, L, n) := | for i ∈ 1.. rows(B)
                    |   for j ∈ 1.. cols(B)
                    |     A[(L[n,i], L[n,j])] ← B[i,j]  if L[n,i] > 0 ∧ L[n,j] > 0
                    | A
```

Macierz geometryczna obszaru kontrolnego

```
Macierz_G(bx, by) := | λ ← bx/by
                     | A[1,1] ← −3
                     | A[1,2] ← 1 + 2·(1 − λ^2)/(1 + λ^2)
                     | A[1,3] ← 1
                     | A[1,4] ← 1 − 2·(1 − λ^2)/(1 + λ^2)
                     | A[2,2] ← −3
                     | A[2,3] ← A[1,4]
                     | A[2,4] ← 1
                     | A[3,3] ← −3
                     | A[3,4] ← A[1,2]
                     | A[4,4] ← −3
                     | A ← (λ + 1/λ)/8 · Sym(A)
                     | A
```

$$\mathbf{G} = \tfrac{1}{8}(\lambda + 1/\lambda)\begin{bmatrix} -3 & 1+2\kappa & 1 & 1-2\kappa \\ 1+2\kappa & -3 & 1-2\kappa & 1 \\ 1 & 1-2\kappa & -3 & 1+2\kappa \\ 1-2\kappa & 1 & 1+2\kappa & -3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = b_x / b_y \qquad \kappa = (1-\lambda^2)/(1+\lambda^2)$$

Macierz geometryczna obszaru kontrolnego Nr 1.
Ponieważ wszystkie obszary są jednakowe to wystarczy
tylko jedna macierz

$$G1 := Macierz\_G(bx, by)$$

$$G1 = \begin{pmatrix} -0.763 & 0.163 & 0.254 & 0.346 \\ 0.163 & -0.763 & 0.346 & 0.254 \\ 0.254 & 0.346 & -0.763 & 0.163 \\ 0.346 & 0.254 & 0.163 & -0.763 \end{pmatrix}$$

$$AL := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 2 & 3 & 10 & 9 \\ 3 & 4 & 11 & 10 \\ 4 & 5 & 12 & 11 \\ 5 & 6 & 13 & 12 \\ 6 & 7 & 14 & 13 \\ 8 & 9 & 16 & 15 \\ 9 & 10 & 17 & 16 \\ 10 & 11 & 18 & 17 \\ 11 & 12 & 19 & 18 \\ 12 & 13 & 20 & 19 \\ 13 & 14 & 21 & 20 \\ 15 & 16 & 23 & 22 \\ 16 & 17 & 24 & 23 \\ 17 & 18 & 25 & 24 \\ 18 & 19 & 26 & 25 \\ 19 & 20 & 27 & 26 \\ 20 & 21 & 28 & 27 \\ 22 & 23 & 30 & 29 \\ 23 & 24 & 31 & 30 \\ 24 & 25 & 32 & 31 \\ 25 & 26 & 33 & 32 \\ 26 & 27 & 34 & 33 \\ 27 & 28 & 35 & 34 \\ 29 & 30 & 37 & 36 \\ 30 & 31 & 38 & 37 \\ 31 & 32 & 39 & 38 \\ 32 & 33 & 40 & 39 \\ 33 & 34 & 41 & 40 \\ 34 & 35 & 42 & 41 \end{pmatrix}$$

$Lo := rows(AL) = 30$ *Liczba obszarów*

$Lr := max(AL) = 42$ *Liczba równań- liczba węzłów siatki*

$Go_{Lr,Lr} := 0$ *Zerowa globalna macierz geometryczna*

Agregacja globalnej macierzy geometrycznej

$e := 1 .. Lo$

$$G := \sum_{e} \left(AGR2\left(Go , -G1 , AL , e \right) \right)$$

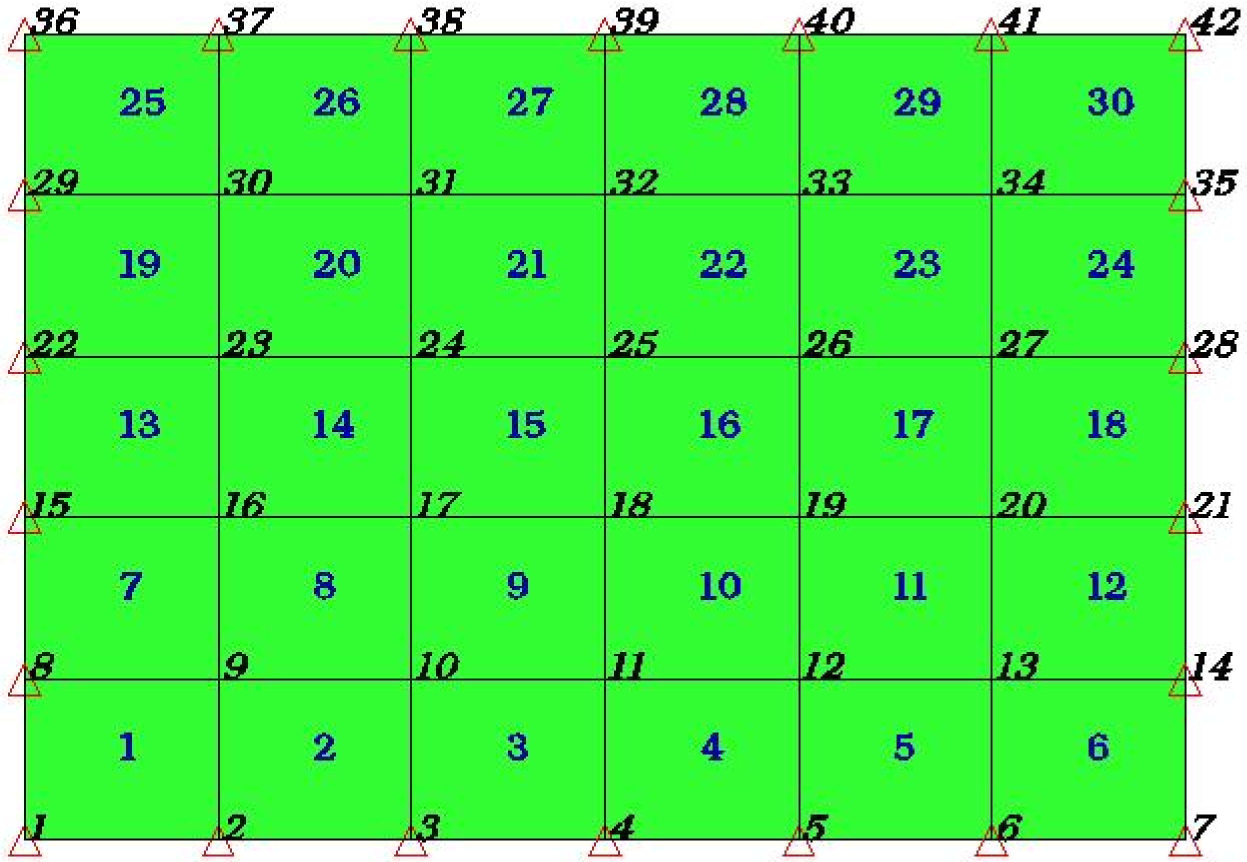
G =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1	0.763	-0.163	0	0	0	0	0	-0.346	-0.254	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-0.163	1.525	-0.163	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	-0.163	1.525	-0.163	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	-0.163	1.525	-0.163	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	-0.163	1.525	-0.163	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	-0.163	1.525	-0.163	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	-0.163	0.763	0	0	0	0	0	-0.254	-0.346	0	0	0	0	0	0	0	0
8	-0.346	-0.254	0	0	0	0	0	1.525	-0.325	0	0	0	0	0	-0.346	-0.254	0	0	0	0	0	0
9	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0	0	-0.325	3.05	-0.325	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0	0	0
10	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0	0	-0.325	3.05	-0.325	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0	0
11	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0	0	-0.325	3.05	-0.325	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0
12	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0	0	-0.325	3.05	-0.325	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0
13	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0	0	-0.325	3.05	-0.325	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0
14	0	0	0	0	0	-0.254	-0.346	0	0	0	0	0	-0.325	1.525	0	0	0	0	0	-0.254	-0.346	0
15	0	0	0	0	0	0	0	-0.346	-0.254	0	0	0	0	0	1.525	-0.325	0	0	0	0	0	-0.346
16	0	0	0	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0	0	-0.325	3.05	-0.325	0	0	0	0	-0.254
17	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0	0	-0.325	3.05	-0.325	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0	0	-0.325	3.05	-0.325	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0	0	-0.325	3.05	-0.325	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0	0	-0.325	3.05	-0.325	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.254	-0.346	0	0	0	0	0	-0.325	1.525	0
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.346	-0.254	0	0	0	0	0	1.525
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0	0	-0.325
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.254	-0.692	-0.254	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.254	-0.346	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.346
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.254
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...

$r := 1 .. Lr \quad p_r := f$ *- prawa strona układu równań*

Numery węzłów zamocowanych

$$Nb := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 14 \\ 15 \\ 21 \\ 22 \\ 28 \\ 29 \\ 35 \\ 36 \\ 37 \\ 38 \\ 39 \\ 40 \\ 41 \\ 42 \end{pmatrix}$$



Uwzględnienie warunków brzegowych

$b := 1 .. rows(Nb)$

$k := 1 .. cols(G) \quad G_{(Nb_b, k)} := 0 \quad G_{(Nb_b, Nb_b)} := 1 \quad p_{(Nb_b)} := 0$

Rozwiązanie układu równań

$u := \mathrm{lsolve}(G, p)$

$u =$ (m)

	1
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0.217
10	0.302
11	0.325
12	0.302
13	0.217
14	0
15	0
16	0.307
17	0.442
18	0.479
19	0.442
20	0.307
21	0
22	0
23	0.307
24	0.442
25	0.479
26	0.442
27	0.307
28	0
29	0
30	0.217
31	0.302
32	0.325
33	0.302
34	...

*Przepisanie rozwiązania z wektora **u** do macierzy dwuwymiarowej **U***

1. Tablica numerów węzłów - pomaga przepisać rozwiązania

$i := 0 .. 5 \quad k := 1 .. 7 \quad N_{i+1,k} := i \cdot 7 + k$

$N =$

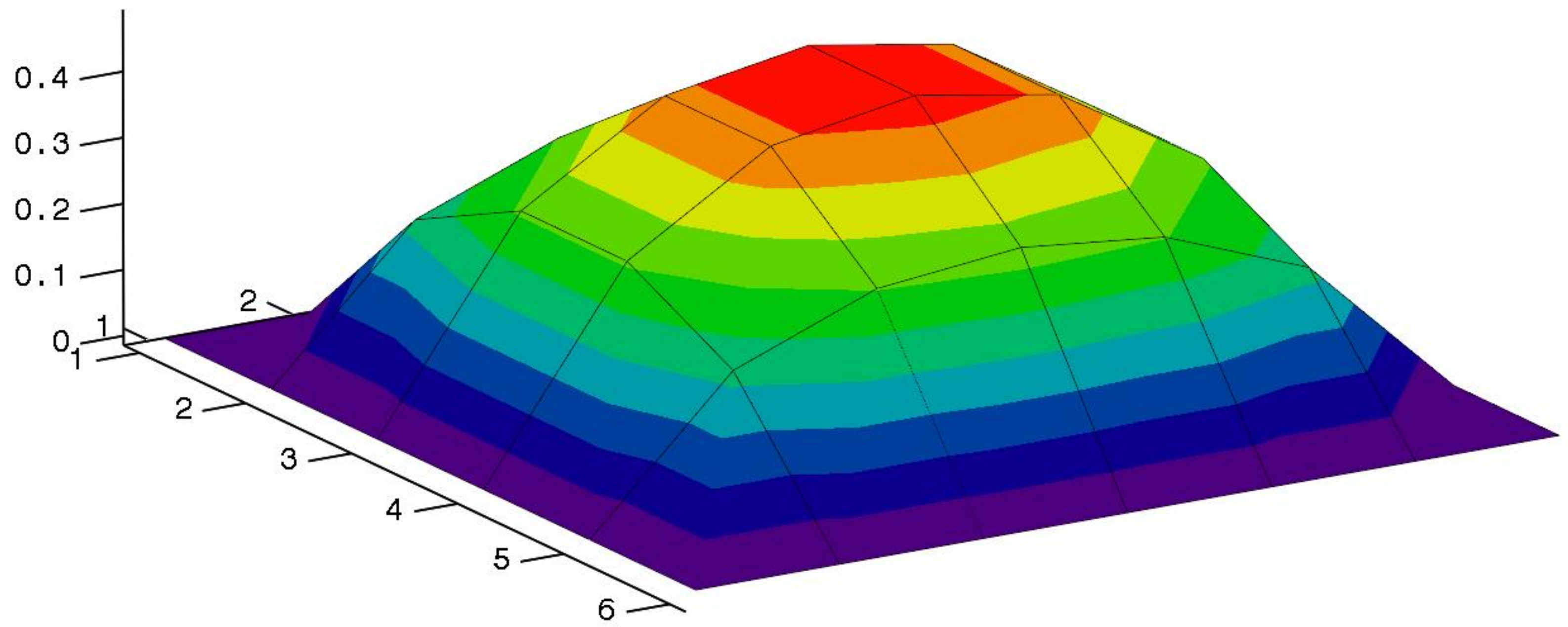
	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	8	9	10	11	12	13	14
3	15	16	17	18	19	20	21
4	22	23	24	25	26	27	28
5	29	30	31	32	33	34	35
6	36	37	38	39	40	41	42

2. Dwuwymiarowa macierz z przemieszczeniami węzłów

$i := 1 .. 6 \quad k := 1 .. 7 \quad U_{i,k} := u_{(N_{i,k})}$

$U =$ (m)

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.217	0.302	0.325	0.302	0.217	0
3	0	0.307	0.442	0.479	0.442	0.307	0
4	0	0.307	0.442	0.479	0.442	0.307	0
5	0	0.217	0.302	0.325	0.302	0.217	0
6	0	0	0	0	0	0	0



U