Obliczenie ugięcia membrany metodą obszarów kontrolnych (objętości skończonych -MOS) - rozwiązanie równania Poissona

ORIGIN := 0

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y) = 0$$

Obliczyć przemieszczenie prostokątnej membrany o wymiarach Lx, Ly, opartej na obwodzie, obciążonej stałym ciśnieniem p0 i rozciąganej stałym napięciem T

$Lx := 7.2m$ $\quad Ly := 5m$ $\quad p0 := 1kPa$ $\quad T := 5\frac{kN}{m}$ $\quad Nx := 20$ *- liczba obszarów w kierunku osi x*

$bx := \frac{Lx}{Nx} = 36 \cdot cm$ $\quad by := \frac{Ly}{Ny} = 25 \cdot cm$ $\quad f := \frac{p0}{T} \cdot bx \cdot by$ $\quad Ny := 20$ *- liczba obszarów w kierunku osi y*

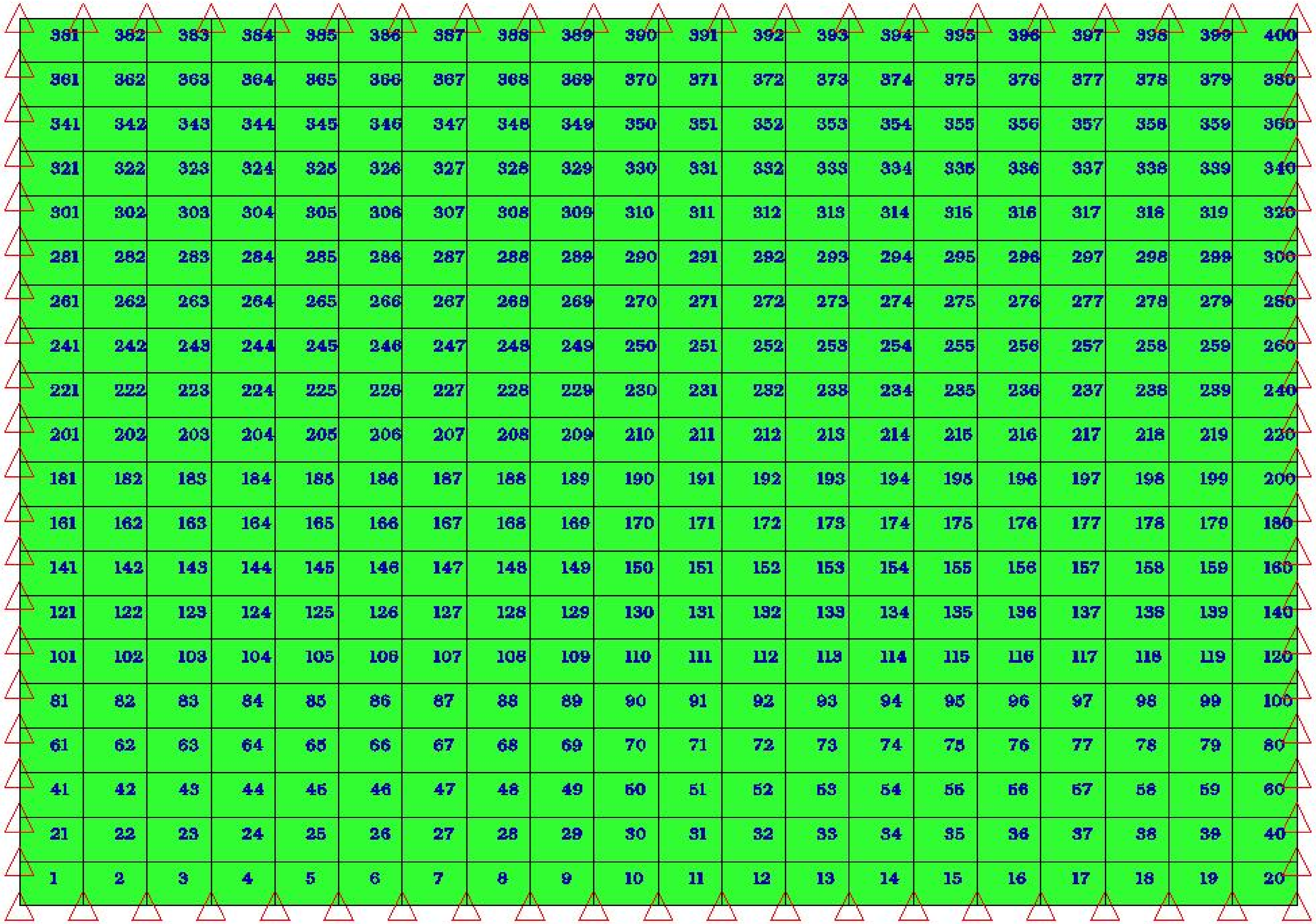
Tablica numerów obszarów kontrolnych

$w := 0 .. Ny - 1 \qquad k := 0 .. Nx - 1$

$E_{w,k} := w \cdot Nx + k + 1$

E =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
3	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
4	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
5	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
6	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
7	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
8	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
9	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
10	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
11	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230
12	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
13	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
14	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290
15	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310
16	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330
17	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350
18	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370
19	381	382	383	384	385	386	387	388	389	...



Liczba obszarów kontrolnych

$Lo := \max(E) = 400$

Tablica numerów węzłów - pomaga przejść z obszaru 2D do wektora niewiadomych

$N_{Ny,\,Nx} := 0$

$w := 1 .. Ny - 1$ $k := 1 .. Nx - 1$

$N_{w,\,k} := (w - 1) \cdot (Nx - 1) + k$

N =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	0
2	0	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	0
3	0	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	0
4	0	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	0
5	0	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	0
6	0	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	0
7	0	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	0
8	0	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	0
9	0	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	0
10	0	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	0
11	0	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	0
12	0	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	0
13	0	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	0
14	0	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	0
15	0	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	0
16	0	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	0
17	0	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	0
18	0	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	0
19	0	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Węzły podporowe oznaczone są jako 0

$Lr := \max(N)$ *- Liczba równań*

Funkcja symetryzująca macierz kwadratową. Funkcja kopiuje górny trójkat macierzy do trójkąta dolnego

```
Sym(A) := | for i ∈ 1.. rows(A) − 1
          |   for j ∈ 0.. i − 1
          |     A[i,j] ← A[j,i]
          | A
```

Funkcja AGR2 - Agregacja Macierzy, używana przy agregacji macierzy geometrycznej. Oznaczenia parametrów: A - zerowa macierz globalna, B - macierz eometryczna obszaru, L - macierz alokacji, n - numer pola

```
AGR2(A, B, L, n) := | for i ∈ 0.. rows(B) − 1
                    |   for j ∈ 0.. cols(B) − 1
                    |     A(L[n,i], L[n,j]) ← B[i,j]  if L[n,i] > 0 ∧ L[n,j] > 0
                    | A
```

Macierz geometryczna obszaru kontrolnego

```
Macierz_G(bx, by) := | λ ← bx/by
                     | A[0,0] ← −3
                     | A[0,1] ← 1 + 2·(1 − λ^2)/(1 + λ^2)
                     | A[0,2] ← 1
                     | A[0,3] ← 1 − 2·(1 − λ^2)/(1 + λ^2)
                     | A[1,1] ← −3
                     | A[1,2] ← A[0,3]
                     | A[1,3] ← 1
                     | A[2,2] ← −3
                     | A[2,3] ← A[0,1]
                     | A[3,3] ← −3
                     | A ← ((λ + 1/λ)/8)·Sym(A)
                     | A
```

$$\mathbf{G} = \tfrac{1}{8}\left(\lambda + 1/\lambda\right)\begin{bmatrix} -3 & 1+2\kappa & 1 & 1-2\kappa \\ 1+2\kappa & -3 & 1-2\kappa & 1 \\ 1 & 1-2\kappa & -3 & 1+2\kappa \\ 1-2\kappa & 1 & 1+2\kappa & -3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = b_x / b_y \qquad \kappa = (1-\lambda^2)/(1+\lambda^2)$$

*Macierz geometryczna obszaru kontrolnego Nr 1.
Ponieważ wszystkie obszary są jednakowe to wystarczy
tylko jedna macierz*

$G1 := Macierz\_G(bx, by)$

$$G1 = \begin{pmatrix} -0.8 & 0.08 & 0.267 & 0.453 \\ 0.08 & -0.8 & 0.453 & 0.267 \\ 0.267 & 0.453 & -0.8 & 0.08 \\ 0.453 & 0.267 & 0.08 & -0.8 \end{pmatrix}$$

$Lr = 361$ $\quad$ $Lo = 400$

$Go_{Lr, Lr} := 0$ *- zerowa globalna macierz geometryczna*

Agregacja globalnej macierzy geometrycznej

$e := 1 .. Lo$

$$G := \sum_e (AGR2(Go, -G1, AL, e))$$

Uwzględnianie warunków brzegowych

$G_{0,0} := 1$

Macierz alokacji

$w := 0 .. Ny - 1$ $\quad$ $k := 0 .. Nx - 1$

$AL_{(E_{w,k}),0} := N_{w,k}$ $\quad$ $AL_{(E_{w,k}),1} := N_{w,k+1}$

$AL_{(E_{w,k}),2} := N_{w+1,k+1}$ $\quad$ $AL_{(E_{w,k}),3} := N_{w+1,k}$

AL =

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	0	2	1
3	0	0	3	2
4	0	0	4	3
5	0	0	5	4
6	0	0	6	5
7	0	0	7	6
8	0	0	8	7
9	0	0	9	8
10	0	0	10	9
11	0	0	11	10
12	0	0	12	11
13	0	0	13	12
14	0	0	14	13
15	0	0	15	14
16	0	0	16	15
17	0	0	17	16
18	0	0	18	17
19	0	0	19	18
20	0	0	0	19
21	0	1	20	0
22	1	2	21	20
23	2	3	22	21
24	3	4	23	22
25	4	5	24	23
26	5	6	25	24
27	6	7	26	25
28	7	8	27	26
29	8	9	28	27
30	9	10	29	28
31	10	11	30	29
32	11	12	31	30
33	12	13	32	31
34	13	14	33	32
35	14	15	34	...

G =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	3.202	-0.161	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.906	-0.267
2	0	-0.161	3.202	-0.161	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.267	-0.906
3	0	0	-0.161	3.202	-0.161	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.267
4	0	0	0	-0.161	3.202	-0.161	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	-0.161	3.202	-0.161	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	-0.161	3.202	-0.161	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	-0.161	3.202	-0.161	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	-0.161	3.202	-0.161	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.161	3.202	-0.161	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.161	3.202	-0.161	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.161	3.202	-0.161	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.161	3.202	-0.161	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.161	3.202	-0.161	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.161	3.202	-0.161	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.161	3.202	-0.161	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.161	3.202	-0.161	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.161	3.202	-0.161	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.161	3.202	-0.161	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.161	3.202	0	0
20	0	-0.906	-0.267	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3.202	-0.161
21	0	-0.267	-0.906	-0.267	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.161	3.202
22	0	0	-0.267	-0.906	-0.267	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.161
23	0	0	0	-0.267	-0.906	-0.267	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	-0.267	-0.906	-0.267	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	-0.267	-0.906	-0.267	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	-0.267	-0.906	-0.267	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	0	-0.267	-0.906	-0.267	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.267	-0.906	-0.267	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.267	-0.906	-0.267	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.267	-0.906	-0.267	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.267	-0.906	-0.267	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.267	-0.906	-0.267	0	0	0	0	0	0	0
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.267	-0.906	-0.267	0	0	0	0	0	0
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.267	-0.906	-0.267	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.267	-0.906	-0.267	0	0	0	0
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.267	-0.906	-0.267	0	0	0
37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.267	-0.906	-0.267	0	0
38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.267	-0.906	0	...

$r := 1 .. Lr$ $\quad p_r := f$ *- prawa strona układu równań*

Rozwiązanie układu równań

$u := \mathrm{lsolve}(G, p)$

$u =$

	0
0	0
1	0.031
2	0.05
3	0.065
4	0.075
5	0.083
6	0.089
7	0.093
8	0.096
9	0.097
10	0.098
11	0.097
12	0.096
13	0.093
14	0.089
15	0.083
16	0.075
17	0.065
18	0.05
19	0.031
20	0.054
21	0.091
22	0.118
23	0.139
24	0.154
25	0.166
26	0.174
27	0.18
28	0.183
29	0.184
30	0.183
31	0.18
32	0.174
33	...

m

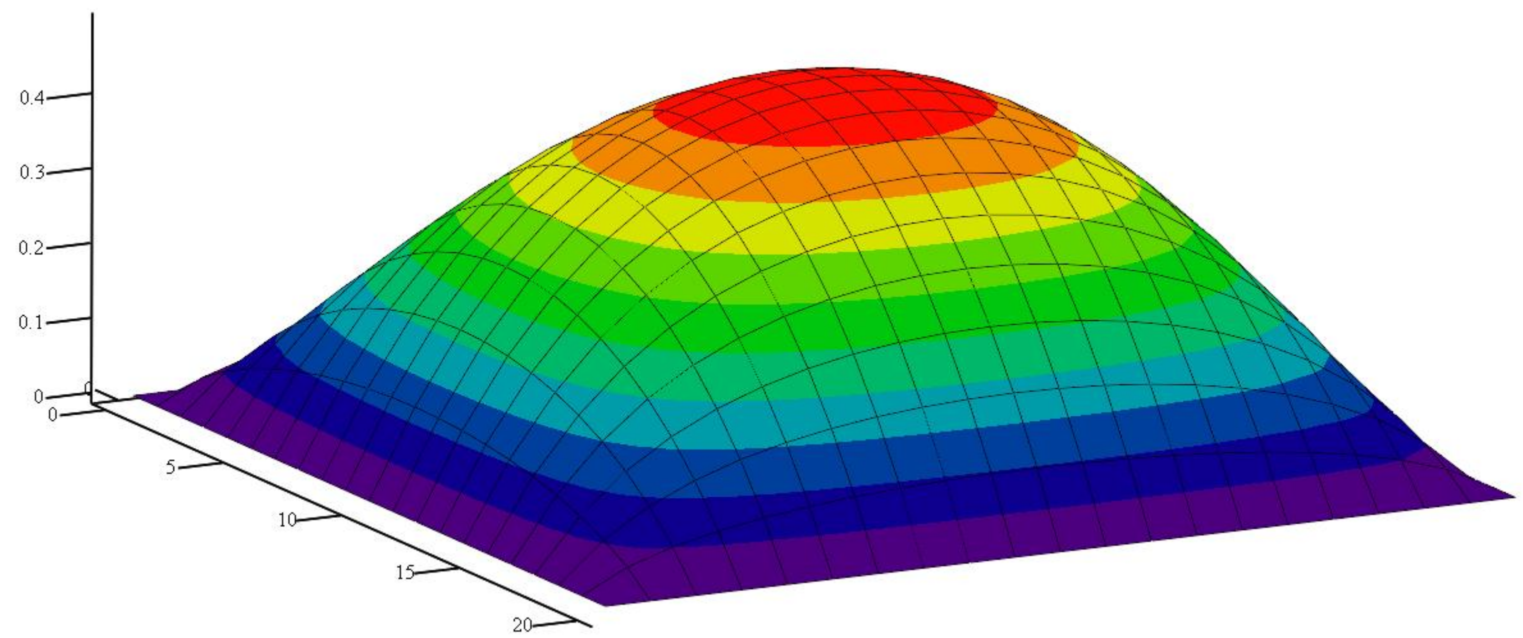
*Przepisanie rozwiązania z wektora **u** do macierzy dwuwymiarowej **U***

$i := 0 .. Ny \qquad k := 0 .. Nx \qquad U_{i,k} := u_{(N_{i,k})}$

$U =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0.031	0.05	0.065	0.075	0.083	0.089	0.093	0.096	0.097	0.098	0.097	0.096	0.093	0.089	0.083	0.075	0.065	0.05	0.031	0
2	0	0.054	0.091	0.118	0.139	0.154	0.166	0.174	0.18	0.183	0.184	0.183	0.18	0.174	0.166	0.154	0.139	0.118	0.091	0.054	0
3	0	0.071	0.123	0.163	0.192	0.215	0.232	0.244	0.252	0.257	0.259	0.257	0.252	0.244	0.232	0.215	0.192	0.163	0.123	0.071	0
4	0	0.085	0.15	0.199	0.237	0.266	0.288	0.303	0.314	0.32	0.322	0.32	0.314	0.303	0.288	0.266	0.237	0.199	0.15	0.085	0
5	0	0.096	0.17	0.228	0.273	0.308	0.334	0.352	0.365	0.373	0.375	0.373	0.365	0.352	0.334	0.308	0.273	0.228	0.17	0.096	0
6	0	0.104	0.187	0.252	0.302	0.341	0.371	0.392	0.407	0.415	0.418	0.415	0.407	0.392	0.371	0.341	0.302	0.252	0.187	0.104	0
7	0	0.11	0.199	0.269	0.324	0.367	0.399	0.422	0.438	0.448	0.451	0.448	0.438	0.422	0.399	0.367	0.324	0.269	0.199	0.11	0
8	0	0.115	0.207	0.281	0.339	0.385	0.419	0.444	0.461	0.471	0.474	0.471	0.461	0.444	0.419	0.385	0.339	0.281	0.207	0.115	0
9	0	0.117	0.212	0.289	0.349	0.395	0.431	0.457	0.474	0.485	0.488	0.485	0.474	0.457	0.431	0.395	0.349	0.289	0.212	0.117	0
10	0	0.118	0.214	0.291	0.352	0.399	0.435	0.461	0.479	0.489	0.493	0.489	0.479	0.461	0.435	0.399	0.352	0.291	0.214	0.118	0
11	0	0.117	0.212	0.289	0.349	0.395	0.431	0.457	0.474	0.485	0.488	0.485	0.474	0.457	0.431	0.395	0.349	0.289	0.212	0.117	0
12	0	0.115	0.207	0.281	0.339	0.385	0.419	0.444	0.461	0.471	0.474	0.471	0.461	0.444	0.419	0.385	0.339	0.281	0.207	0.115	0
13	0	0.11	0.199	0.269	0.324	0.367	0.399	0.422	0.438	0.448	0.451	0.448	0.438	0.422	0.399	0.367	0.324	0.269	0.199	0.11	0
14	0	0.104	0.187	0.252	0.302	0.341	0.371	0.392	0.407	0.415	0.418	0.415	0.407	0.392	0.371	0.341	0.302	0.252	0.187	0.104	0
15	0	0.096	0.17	0.228	0.273	0.308	0.334	0.352	0.365	0.373	0.375	0.373	0.365	0.352	0.334	0.308	0.273	0.228	0.17	0.096	0
16	0	0.085	0.15	0.199	0.237	0.266	0.288	0.303	0.314	0.32	0.322	0.32	0.314	0.303	0.288	0.266	0.237	0.199	0.15	0.085	0
17	0	0.071	0.123	0.163	0.192	0.215	0.232	0.244	0.252	0.257	0.259	0.257	0.252	0.244	0.232	0.215	0.192	0.163	0.123	0.071	0
18	0	0.054	0.091	0.118	0.139	0.154	0.166	0.174	0.18	0.183	0.184	0.183	0.18	0.174	0.166	0.154	0.139	0.118	0.091	0.054	...

m



U

$\max(U) = 49.26 \cdot cm$

Modyfikacja zadania: dodajemy nowe warunki brzegowe.
Obszary Nr 150, 151, 170, 171 będą miały narzucone przemieszczenie `u0=0.2m`

$u0 := 0.2m$

$n := 0 .. 3$

$k := 0 .. Lr$

$Nr := 150 \quad G_{(AL_{Nr,n}),k} := 0 \quad G_{(AL_{Nr,n}),(AL_{Nr,n})} := 1 \quad p_{(AL_{Nr,n})} := u0$

$Nr := 151 \quad G_{(AL_{Nr,n}),k} := 0 \quad G_{(AL_{Nr,n}),(AL_{Nr,n})} := 1 \quad p_{(AL_{Nr,n})} := u0$

$Nr := 170 \quad G_{(AL_{Nr,n}),k} := 0 \quad G_{(AL_{Nr,n}),(AL_{Nr,n})} := 1 \quad p_{(AL_{Nr,n})} := u0$

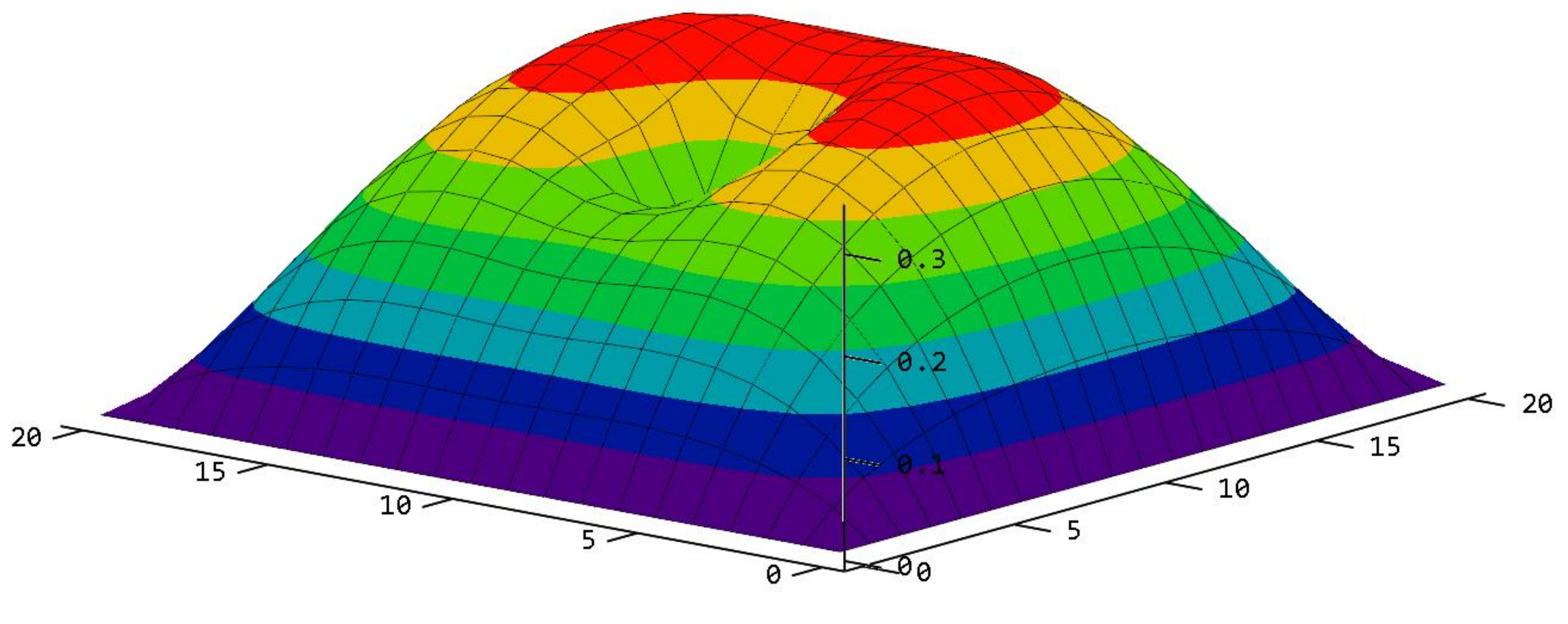
$Nr := 171 \quad G_{(AL_{Nr,n}),k} := 0 \quad G_{(AL_{Nr,n}),(AL_{Nr,n})} := 1 \quad p_{(AL_{Nr,n})} := u0$

Rozwiązanie układu równań

$u := \text{lsolve}(G, p)$

*Przepisanie rozwiązania z wektora **u** do macierzy dwuwymiarowej **U***

$i := 0 .. Ny \quad k := 0 .. Nx \quad U_{i,k} := u_{(N_{i,k})}$



U

$\max(U) = 33.84 \cdot cm$