

Obliczenie ugięcia membrany metodą obszarów kontrolnych (objętości skończonych -MOS) - rozwiązanie równania Poissona

ORIGIN

:= 0

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y) = 0$$

Obliczyć przemieszczenie prostokątnej membrany o wymiarach L_x , L_y , opartej na obwodzie, obciążonej stałym ciśnieniem p_0 i rozciąganej stałym napięciem T

$L_x := 5m$

$L_y := 5m$

$p_0 := 5kPa$

$T := 5 \frac{kN}{m}$

$N_x := 20$ - liczba obszarów w kierunku osi x

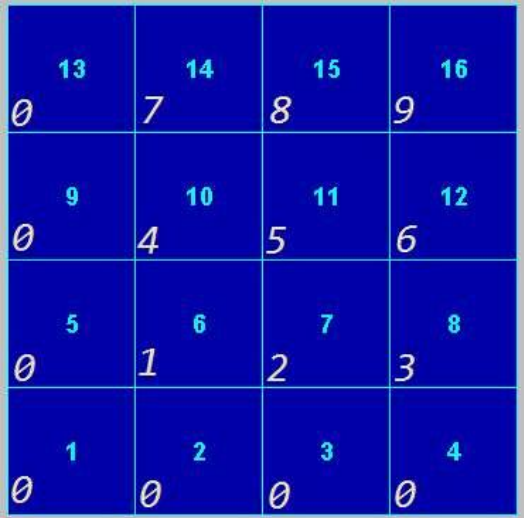
$b_x := \frac{L_x}{N_x} = 25 \cdot cm$

$b_y := \frac{L_y}{N_y} = 25 \cdot cm$

$f := \frac{p_0}{T} \cdot b_x \cdot b_y$

$N_y := 20$ - liczba obszarów w kierunku osi y

$f = 0.063m$



Rysunek siatki obszarów przy podziale 4×4

E =

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
2	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
3	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
4	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
5	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
6	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130
7	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
8	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170
9	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190
10	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
11	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230
12	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
13	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270

N_{Ny}

$, N_x := 0$

Tablica numerów węzłów - pomaga przejść z obszaru 2D do wektora niewiadomych

w

$:= 1 \dots Ny - 1$

k

$:= 1 \dots Nx - 1$

$N_{w,k}$

$:= (w - 1) \cdot (Nx - 1) + k$

	0	1	2	3

14	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290
15	301	302	303	304	305	306	307	308	309	...

N =

0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	20	21	22
3	0	39	40	41
4	0	58	59	...

Liczba obszarów kontrolnych

$L_o := \max(E) = 400$

Węzły podporowe oznaczone są jako 0

$L_r := \max(N)$ - Liczba równań

Funkcja symetryzująca macierz kwadratową. Funkcja kopiuje górny trójkąt macierzy do trójkąta dolnego

```
Sym(A) :=
  for i ∈ 1.. rows(A) - 1
    for j ∈ 0.. i - 1
      Ai,j ← Aj,i
  A
```

Funkcja AGR2 - Agregacja Macierzy, używana przy agregacji macierzy geometrycznej. Oznaczenia parametrów: A - zerowa macierz globalna, B - macierz eometryczna obszaru, L - macierz alokacji, n - numer pola

```
AGR2(A, B, L, n) :=
  for i ∈ 0.. rows(B) - 1
    for j ∈ 0.. cols(B) - 1
      A(Ln,i, Ln,j) ← Bi,j if Ln,i > 0 ∧ Ln,j > 0
  A
```

Macierz geometryczna obszaru kontrolnego

```
Macierz_G(bx, by) :=
  λ ←  $\frac{bx}{by}$ 
  A0,0 ← -3
  A0,1 ←  $1 + 2 \cdot \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}$ 
  A0,2 ← 1
  A0,3 ←  $1 - 2 \cdot \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}$ 
  A1,1 ← -3
  A1,2 ← A0,3
  A1,3 ← 1
  A2,2 ← -3
  A2,3 ← A0,1
  A3,3 ← -3
   $\lambda + \frac{1}{\lambda}$ 
  A ←  $\frac{\lambda + \frac{1}{\lambda}}{8} \cdot \text{Sym}(A)$ 
  A
```

$$\mathbf{G} = \frac{1}{8}(\lambda + 1/\lambda) \begin{bmatrix} -3 & 1+2\kappa & 1 & 1-2\kappa \\ 1+2\kappa & -3 & 1-2\kappa & 1 \\ 1 & 1-2\kappa & -3 & 1+2\kappa \\ 1-2\kappa & 1 & 1+2\kappa & -3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = b_x/b_y$$

$$\kappa = (1 - \lambda^2)/(1 + \lambda^2)$$

Macierz geometryczna obszaru kontrolnego Nr 1.
 Ponieważ wszystkie obszary są jednakowe to wystarczy
 tylko jedna macierz

$$G1 := Macierz_G(bx, by)$$

$$G1 = \begin{pmatrix} -0.75 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & -0.75 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & -0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & -0.75 \end{pmatrix}$$

$$Lr = 361 \qquad Lo = 400$$

$$Go_{Lr, Lr} := 0 \qquad \text{- zerowa globalna macierz geometryczna}$$

Agregacja globalnej macierzy geometrycznej

$$e := 1 \dots Lo$$

$$G := \sum_e (AGR2 (Go, -G1, AL, e))$$

Uwzględnianie warunków brzegowych

$$G_{0, 0} := 1$$

$$|G| = 7.334 \times 10^{151}$$

Macierz alokacji

$$w := 0 \dots Ny - 1 \qquad k := 0 \dots Nx - 1$$

$$AL_{(E_w, k), 0} := N_w, k \qquad AL_{(E_w, k), 1} := N_w, k+1$$

$$AL_{(E_w, k), 2} := N_{w+1}, k+1 \qquad AL_{(E_w, k), 3} := N_{w+1}, k$$

0	13	7	14	8	15	9	16
0	9	4	10	5	11	6	12
0	5	1	6	2	7	3	8
0	1	0	2	0	3	0	4

$$AL =$$

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	1	0
2	0	0	2	1
3	0	0	3	2
4	0	0	4	3
5	0	0	5	4
6	0	0	6	5
7	0	0	7	6
8	0	0	8	7
9	0	0	9	8
10	0	0	10	9
11	0	0	11	10
12	0	0	12	11
13	0	0	13	12
14	0	0	14	13
15	0	0	15	14
16	0	0	16	...

$$G =$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	3	-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	-0.5	3	-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	-0.5	3	-0.5	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	-0.5	3	-0.5	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	-0.5	3	-0.5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	-0.5	3	-0.5	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	-0.5	3	-0.5	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	-0.5	3	-0.5	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.5	3	-0.5	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.5	3	-0.5	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.5	3	-0.5
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.5	3
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.5
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...

$r := 1 \dots Lr$ $p_r := f$ - *prawa strona układu równań*

Rozwiązanie układu równań

$u := \text{lsolve}(G, p)$

$u =$

	0
0	0
1	0.11
2	0.186
3	0.244
4	0.288
5	0.322
6	0.349
7	0.368
8	0.382
9	0.389
10	0.392
11	0.389
12	0.382
13	0.368
14	0.349
15	...

 m

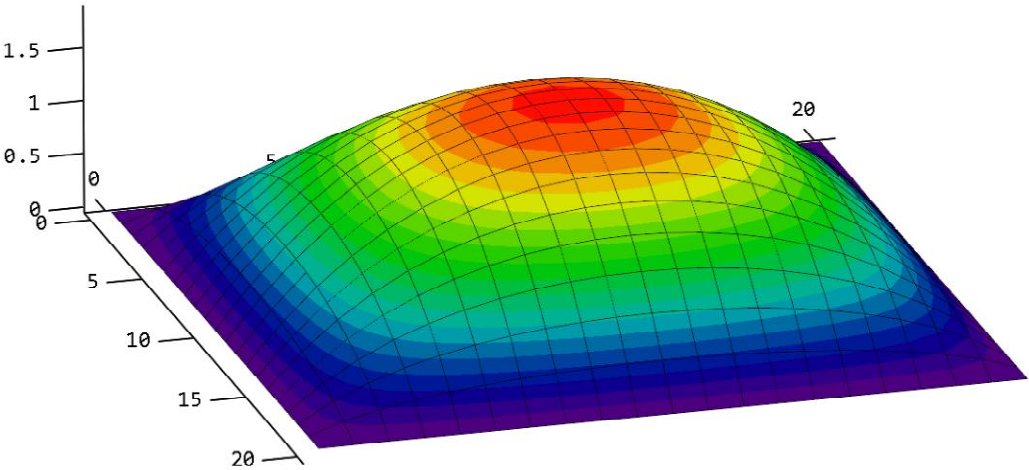
Przepisanie rozwiązania z wektora u do macierzy dwuwymiarowej U

$i := 0 \dots Ny$ $k := 0 \dots Nx$ $U_{i,k} := u_{(N_i,k)}$

$U =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0.11	0.186	0.244	0.288	0.322	0.349	0.368	0.382
2	0	0.186	0.328	0.437	0.523	0.59	0.641	0.68	0.706
3	0	0.244	0.437	0.591	0.714	0.81	0.885	0.941	0.979
4	0	0.288	0.523	0.714	0.867	0.99	1.085	1.156	1.205
5	0	0.322	0.59	0.81	0.99	1.133	1.246	1.33	1.389
6	0	0.349	0.641	0.885	1.085	1.246	1.372	1.468	1.534
7	0	0.368	0.68	0.941	1.156	1.33	1.468	1.571	1.644
8	0	0.382	0.706	0.979	1.205	1.389	1.534	1.644	1.72
9	0	0.389	0.722	1.002	1.234	1.423	1.573	1.686	1.766
10	0	0.392	0.727	1.009	1.244	1.435	1.586	1.701	1.781
11	0	0.389	0.722	1.002	1.234	1.423	1.573	1.686	1.766
12	0	0.382	0.706	0.979	1.205	1.389	1.534	1.644	1.72
13	0	0.368	0.68	0.941	1.156	1.33	1.468	1.571	1.644
14	0	0.349	0.641	0.885	1.085	1.246	1.372	1.468	1.534
15	0	0.322	0.59	0.81	0.99	1.133	1.246	1.33	...

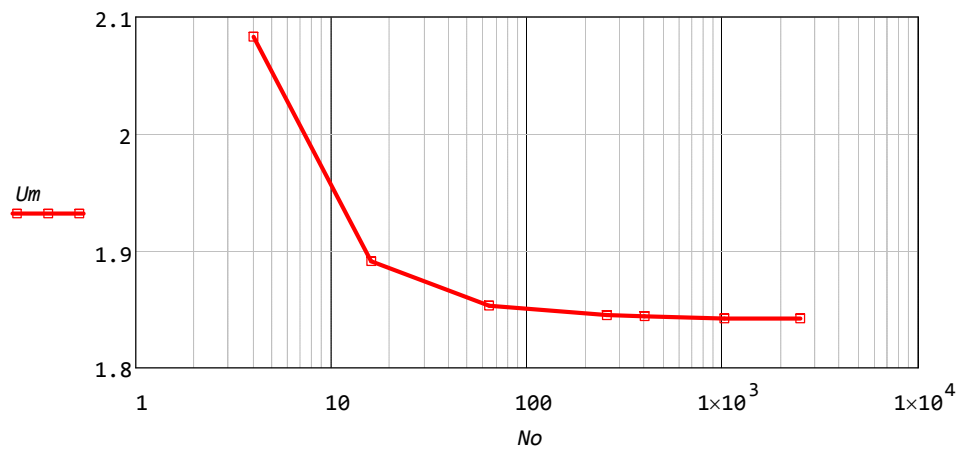
 m



U

$\max(U) = 184.36 \cdot \text{cm}$ $Lo = 400$

$No :=$	4	$Um :=$	2.083
	16		1.891
	64		1.853
	256		1.845
	400		1.844
	1024		1.842
	2500		1.842



Modyfikacja zadania: dodajemy nowe warunki brzegowe.

Obszary Nr 150, 151, 170, 171 będą miały narzucone przemieszczenie $u_0=0.2m$

$$u_0 := 0.2m$$

$$n := 0 \dots 3$$

$$k := 0 \dots Lr$$

$$Nr := 150 \quad \tilde{G}_{(AL_{Nr}, n), k} := 0 \quad \tilde{G}_{(AL_{Nr}, n), (AL_{Nr}, n)} := 1 \quad \tilde{p}_{(AL_{Nr}, n)} := u_0$$

$$Nr := 151 \quad \tilde{G}_{(AL_{Nr}, n), k} := 0 \quad \tilde{G}_{(AL_{Nr}, n), (AL_{Nr}, n)} := 1 \quad \tilde{p}_{(AL_{Nr}, n)} := u_0$$

$$Nr := 170 \quad \tilde{G}_{(AL_{Nr}, n), k} := 0 \quad \tilde{G}_{(AL_{Nr}, n), (AL_{Nr}, n)} := 1 \quad \tilde{p}_{(AL_{Nr}, n)} := u_0$$

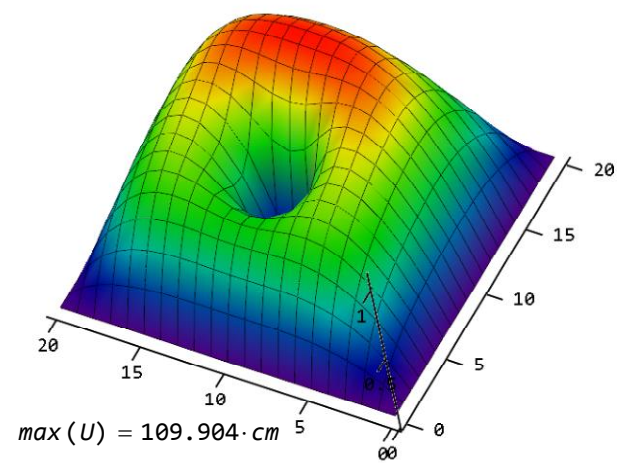
$$Nr := 171 \quad \tilde{G}_{(AL_{Nr}, n), k} := 0 \quad \tilde{G}_{(AL_{Nr}, n), (AL_{Nr}, n)} := 1 \quad \tilde{p}_{(AL_{Nr}, n)} := u_0$$

Rozwiązanie układu równań

Przepisanie rozwiązania z wektora $\mathbf{u}$ do macierzy dwuwymiarowej $\mathbf{U}$

$$\tilde{u} := \text{lsolve}(\tilde{G}, \tilde{p})$$

$$\tilde{i} := 0 \dots Ny \quad \tilde{k} := 0 \dots Nx \quad \tilde{u}_{\tilde{i}, \tilde{k}} := u_{(N_{\tilde{i}}, \tilde{k})}$$



U