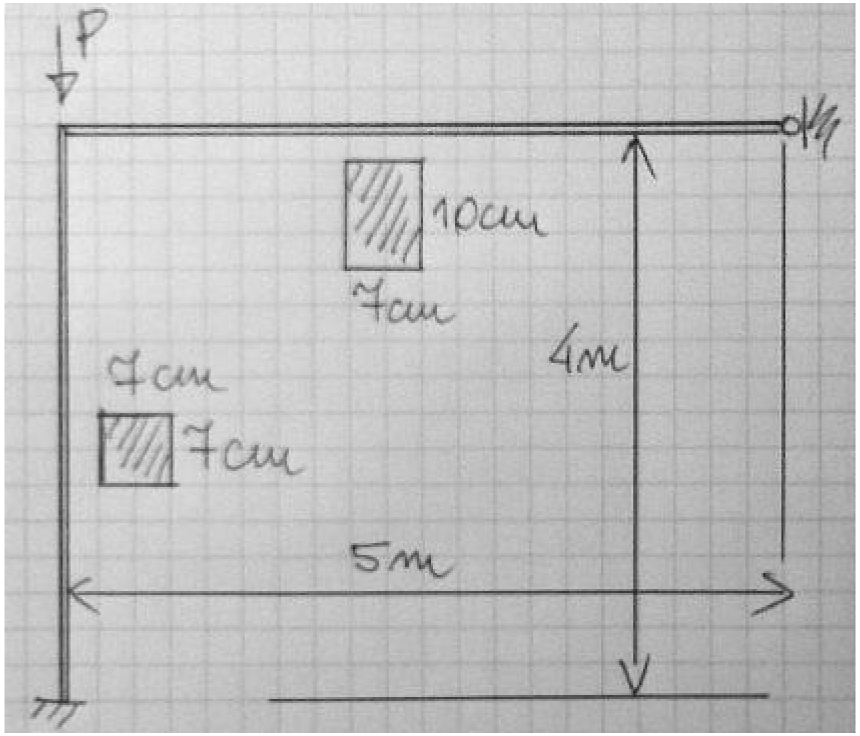
Stateczność ramy drewnianej o 2 różnych przekrojach prętów, obciążonej siłą skupioną

$ORIGIN := 1$ *- Ustawienie sposobu numeracji wierszy i kolumn macierzy*



$E := 10GPa$ *- Moduł Younga drewna*

Wymiary przekrojów

$a_1 := 7cm$ $b_1 := 7cm$

$a_2 := 7cm$ $b_2 := 10cm$

Parametry pomocnicze:

$Lss := 3$ *- Liczba stopni swobody węzła*

$Le := 5$ *- Liczba elementów*

$Lw := 6$ *- Liczba węzłów*

$Lr := Lss \cdot Lw$ *- Liczba równań*

$Ko_{Lr, Lr} := 0$ *Deklaracja globalnej macierzy sztywności i wypełnienie jej zerami*

$l := 1m$ *- pomocnicza stała długość*

Ponieważ MathCad nie pozwala przechowywać w jednej macierzy składowych wyrażonych w różnych jednostkach to mamy do wyboru 2 mozliwości:

- *nie zapisywać jednostek w których wyrażone są te składowe*
- *przekształcić tak te składowe, aby były jednolite (wyrażone w jednakowych jednostkach miary)*

Wybieram 2 sposób i przekształcam niewiadome występujące w macierzach następująco
(`l` *- oznacza tu dowolną stałą o wymiarze długości) :*

$$u_{zi} = l\cdot\varphi_i \qquad u_{zj} = l\cdot\varphi_j \qquad M_i = l\cdot T_i \qquad M_j = l\cdot T_j \qquad \lambda^2 = \frac{L^2\cdot A}{J} \qquad \eta = \frac{L}{l}$$

Wszystkie poszukiwane przemieszczenia są więc przesunięciami, a węzłowe wielkości statyczne - siłami.
Macierz sztywności zmieni sie więc do postaci, którą MathCad akceptuje:

$$\begin{pmatrix} Fxi \\ Fyi \\ Ti \\ Fxj \\ Fjy \\ Tj \end{pmatrix} = \left[\frac{E\cdot J}{L^3} \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & -\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6\eta & 0 & -12 & 6\eta \\ 0 & 6\eta & 4\eta^2 & 0 & -6\eta & 2\eta^2 \\ -\lambda^2 & 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6\eta & 0 & 12 & -6\eta \\ 0 & 6\eta & 2\eta^2 & 0 & -6\eta & 4\eta^2 \end{pmatrix} + \frac{S}{L}\cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0.1\eta & 0 & -1.2 & 0.1\eta \\ 0 & 0.1\eta & \frac{2}{15}\eta^2 & 0 & -0.1\eta & \frac{-1}{30}\eta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2 & -0.1\eta & 0 & 1.2 & -0.1\eta \\ 0 & 0.1\eta & \frac{-1}{30}\eta^2 & 0 & -0.1\eta & \frac{2}{15}\eta^2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} uxi \\ uyi \\ uzi \\ uxj \\ uyj \\ uzj \end{pmatrix}$$

Funkcja LBM - Lokuj Blok Macierzy, używana przy agregacji macierzy sztywności i wektora obciążeń termicznych

```
LBM(A, B, w, k) :=
    for  i ∈ 0 .. rows(B) − 1
        for  j ∈ 0 .. cols(B) − 1
            $A_{w+i,\,k+j} \leftarrow B_{1+i,\,1+j}$
    A
```

Współrzędne węzłów kratownicy

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} m \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} m$$

Numery węzłów początkowych (Wp) i końcowych (Wk) elementów

$$Wp := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad Wk := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Siły wewnętrzne w elementach

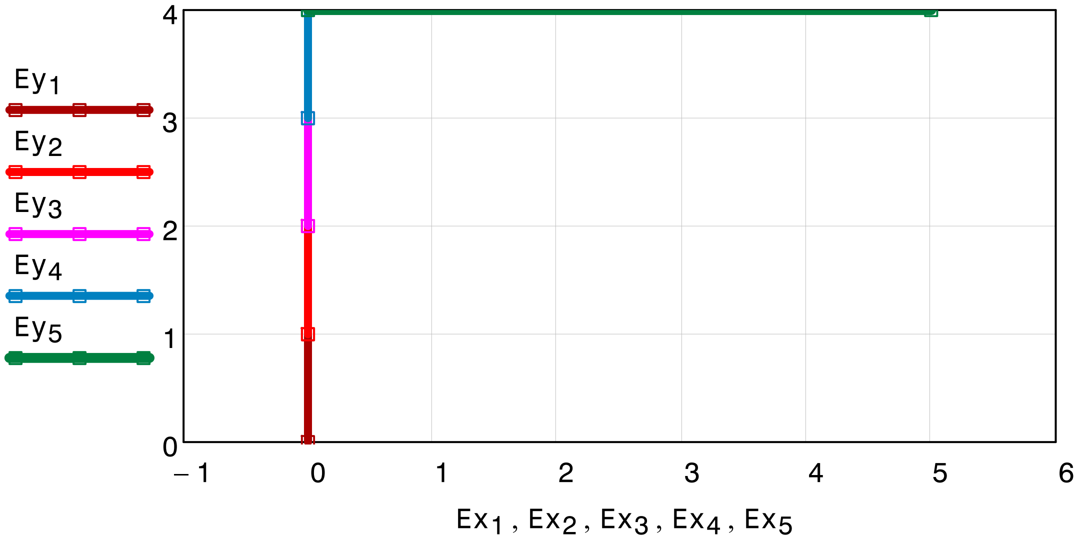
$$S := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} kN$$

$e := 1 .. Le$ *Pętla po wszystkich elementach ramy*

Rysunek elementów kontrolować poprawność wprowadzonych danych

$$Ex_e := \begin{bmatrix} X_{(Wp_e)} \\ X_{(Wk_e)} \end{bmatrix} \qquad Ey_e := \begin{bmatrix} Y_{(Wp_e)} \\ Y_{(Wk_e)} \end{bmatrix}$$

Ex, Ey - współrzędne węzłów elementów kratownicy



$A_1 := b_1 \cdot a_1$ *- Pole powierzchni przekroju elementów*

$$J_1 := \frac{a_1 \cdot (b_1)^3}{12}$$ *- Moment bezwładności przekrojów*

$i := 2 .. 4 \qquad A_i := A_1 \qquad J_i := J_1$

$$A_5 := b_2 \cdot a_2 \qquad J_5 := \frac{a_2 \cdot (b_2)^3}{12}$$

Wielkości pomocnicze do wyliczania składowych macierzy sztywności elementów ramy

$Lx_e := X_{(Wk_e)} - X_{(Wp_e)}$ $Ly_e := Y_{(Wk_e)} - Y_{(Wp_e)}$ $L_e := \sqrt{(Lx_e)^2 + (Ly_e)^2}$

$Lx =$

	1
1	0.000
2	0.000
3	0.000
4	0.000
5	5.000

m

$Ly =$

	1
1	1.000
2	1.000
3	1.000
4	1.000
5	0.000

m

$L =$

	1
1	1.000
2	1.000
3	1.000
4	1.000
5	5.000

m

$A =$

	1
1	49.000
2	49.000
3	49.000
4	49.000
5	70.000

$\cdot cm^2$

$J =$

	1
1	200.083
2	200.083
3	200.083
4	200.083
5	583.333

$\cdot cm^4$

$\eta_e := \frac{L_e}{l}$ $\lambda2_e := \frac{(L_e)^2 \cdot A_e}{J_e}$ $\mu_e := \frac{E \cdot J_e}{(L_e)^3}$ $\kappa_e := \frac{S_e}{L_e}$

$\eta =$

	1
1	1.000
2	1.000
3	1.000
4	1.000
5	5.000

$\lambda2 =$

	1
1	2448.980
2	2448.980
3	2448.980
4	2448.980
5	30000.000

$\mu =$

	1
1	20008.333
2	20008.333
3	20008.333
4	20008.333
5	466.667

$\cdot \frac{N}{m}$

$\kappa =$

	1
1	-1000.000
2	-1000.000
3	-1000.000
4	-1000.000
5	0.000

$\cdot \frac{N}{m}$

Bloki macierzy sztywności elementu ramowego w lokalnym układzie współrzednych

$$K11_e := \mu_e \cdot \begin{bmatrix} \lambda 2_e & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6\eta_e \\ 0 & 6\eta_e & 4\left(\eta_e\right)^2 \end{bmatrix} \qquad K12_e := \mu_e \cdot \begin{bmatrix} -\lambda 2_e & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6\eta_e \\ 0 & -6\eta_e & 2\left(\eta_e\right)^2 \end{bmatrix} \qquad K22_e := \mu_e \cdot \begin{bmatrix} \lambda 2_e & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -6\eta_e \\ 0 & -6\eta_e & 4\left(\eta_e\right)^2 \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności elementu zapisana z użyciem bloków

$$K = \begin{pmatrix} K11 & K12 \\ K21 & K22 \end{pmatrix} \qquad K21 = K12^T$$

Bloki macierzy geometrycznych elementu ramowego w lokalnym układzie współrzednych

$$G11_e := \kappa_e \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & 0.1\eta_e \\ 0 & 0.1\eta_e & \frac{2}{15}\left(\eta_e\right)^2 \end{bmatrix} \qquad G12_e := \kappa_e \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.2 & 0.1\eta_e \\ 0 & -0.1\eta_e & \frac{-1}{30}\left(\eta_e\right)^2 \end{bmatrix} \qquad G22_e := \kappa_e \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2 & -0.1\eta_e \\ 0 & -0.1\eta_e & \frac{2}{15}\left(\eta_e\right)^2 \end{bmatrix}$$

Macierz geometryczna elementu zapisana z użyciem bloków

$$G = \begin{pmatrix} G11 & G12 \\ G21 & G22 \end{pmatrix} \qquad G21 = G12^T$$

Macierze obrotu do globalnego układu współrzednych

$c_e := \frac{Lx_e}{L_e}$ $s_e := \frac{Ly_e}{L_e}$

$R_e := \begin{pmatrix} c_e & -s_e & 0 \\ s_e & c_e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $R_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $R_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Transformacja macierzy sztywności i macierzy geometrycznych elementu 1 do globalnego układu współrzędnych.
Uwaga!
Macierzy elementu 5 można nie transformować bo kąt obrotu jest równy 0
Macierze elementów 1..4 są identyczne

$K11_e := R_e \cdot K11_e \cdot R_e^T$ $K12_e := R_e \cdot K12_e \cdot R_e^T$ $K22_e := R_e \cdot K22_e \cdot R_e^T$

$G11_e := R_e \cdot G11_e \cdot R_e^T$ $G12_e := R_e \cdot G12_e \cdot R_e^T$ $G22_e := R_e \cdot G22_e \cdot R_e^T$

Mimo, że nie jest to potrzebne w dalszych obliczeniach, można pokazać bloki macierzy wszystkich elementów

$$K11_1 = \begin{pmatrix} 240.1 & 0 & -120.05 \\ 0 & 49000 & 0 \\ -120.05 & 0 & 80.033 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$K11_5 = \begin{pmatrix} 14000 & 0 & 0 \\ 0 & 5.6 & 14 \\ 0 & 14 & 46.667 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$K12_1 = \begin{pmatrix} -240.1 & 0 & -120.05 \\ 0 & -49000 & 0 \\ 120.05 & 0 & 40.017 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$K12_5 = \begin{pmatrix} -14000 & 0 & 0 \\ 0 & -5.6 & 14 \\ 0 & -14 & 23.333 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$K22_1 = \begin{pmatrix} 240.1 & 0 & 120.05 \\ 0 & 49000 & 0 \\ 120.05 & 0 & 80.033 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$K22_5 = \begin{pmatrix} 14000 & 0 & 0 \\ 0 & 5.6 & -14 \\ 0 & -14 & 46.667 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$G11_1 = \begin{pmatrix} -1.2 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & -0.133 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$G12_1 = \begin{pmatrix} 1.2 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & 0.033 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$G22_1 = \begin{pmatrix} -1.2 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.1 & 0 & -0.133 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$G11_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$G12_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

$$G22_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{kN}{m}$$

Agregacja, czyli dodawanie bloków macierzy sztywności elementów do macierzy globalnej

$n_e := Lss \cdot Wp_e - 2$ $k_e := Lss \cdot Wk_e - 2$ *<--- numery stopni swobody węzłów początkowych (n_e) i końcowych (k_e)*

$n^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \end{pmatrix}$ $k^T = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 & 13 & 16 \end{pmatrix}$

$$K := \sum_e \left[\left(LBM\left(Ko, K11_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, K22_e, k_e, k_e\right)\right) + LBM\left(Ko, K12_e, n_e, k_e\right) + LBM\left(Ko, {K12_e}^T, k_e, n_e\right)\right]$$

$$G := \sum_e \left[\left(LBM\left(Ko, G11_e, n_e, n_e\right) + LBM\left(Ko, G22_e, k_e, k_e\right)\right) + LBM\left(Ko, G12_e, n_e, k_e\right) + LBM\left(Ko, {G12_e}^T, k_e, n_e\right)\right]$$

K =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	240.1	0.0	-120.1	-240.1	0.0	-120.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	49000.0	0.0	0.0	-49000.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	-120.1	0.0	80.0	120.1	0.0	40.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	-240.1	0.0	120.1	480.2	0.0	0.0	-240.1	0.0	-120.1	0.0	0.0	0.0
5	0.0	-49000.0	0.0	0.0	98000.0	0.0	0.0	-49000.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6	-120.1	0.0	40.0	0.0	0.0	160.1	120.1	0.0	40.0	0.0	0.0	0.0
7	0.0	0.0	0.0	-240.1	0.0	120.1	480.2	0.0	0.0	-240.1	0.0	-120.1
8	0.0	0.0	0.0	0.0	-49000.0	0.0	0.0	98000.0	0.0	0.0	-49000.0	0.0
9	0.0	0.0	0.0	-120.1	0.0	40.0	0.0	0.0	160.1	120.1	0.0	40.0
10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-240.1	0.0	120.1	480.2	0.0	0.0
11	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-49000.0	0.0	0.0	98000.0	0.0
12	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-120.1	0.0	40.0	0.0	0.0	160.1
13	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-240.1	0.0	120.1
14	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-49000.0	0.0
15	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-120.1	0.0	40.0
16	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	...

$\cdot \frac{kN}{m}$

$$G = \begin{array}{c|cccccccccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ \hline 1 & -1.2 & 0.0 & 0.1 & 1.2 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 2 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 3 & 0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 4 & 1.2 & 0.0 & -0.1 & -2.4 & 0.0 & 0.0 & 1.2 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 5 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 6 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.3 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 7 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.2 & 0.0 & -0.1 & -2.4 & 0.0 & 0.0 & 1.2 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 9 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.3 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 10 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.2 & 0.0 & -0.1 & -2.4 & 0.0 & 0.0 & 1.2 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 11 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 12 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.3 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 13 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.2 & 0.0 & -0.1 & -1.2 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 14 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 15 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.1 & 0.0 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 16 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 17 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 18 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{array} \cdot \frac{kN}{m}$$

Globalna macierz sztywności **K** *i macierz geometryczna* **G** *bez uwzględnienia warunków brzegowych jest osobliwa tzn.* $|\mathbf{K}|=0$, $|\mathbf{G}|=0$

$$\left|K\cdot\frac{1m}{kN}\right| = 0.000\times10^{0}$$

Aby obliczyć wyznacznik macierzy, której elementy nie są liczbami bezwymiarowymi musimy macierz pomnożyć przez odwrotność jednostek aby doprowadzić elementy do postaci bezwymiarowej - to jest wymóg MatCada.

$$\left|G\cdot\frac{1m}{kN}\right| = 0.000\times10^{0}$$

Zamiast zera wyznacznik może być "bardzo małą" liczbą ze względu na niedostateczną dokładność wyrazów macierzy sztywności.

Kopiowanie Macierzy **K** *przed modyfikacją uwzględniającą warunki brzegowe*

$Ko := K$ $\qquad$ $Go := G$

Uwzględnienie warunków brzegowych

$Lwb := 5$ *- liczba warunków brzegowych*

$$s := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 16 \\ 17 \end{pmatrix}$$ *- globalne numery przemieszczeń węzłów blokowanych na podporach*

$i := 1 .. Lr$ $\qquad$ $j := 1 .. Lwb$

$Ko_{s_j, i} := 0$ $\qquad$ $Go_{s_j, i} := 0$ *zerowanie wierszy*

$Ko_{i, s_j} := 0$ $\qquad$ $Go_{i, s_j} := 0$ *zerowanie kolumn*

$Ko_{s_j, s_j} := 1 \frac{kN}{m}$ *wstawianie jedności na przekątną macierzy sztywności*

$\left| Ko \cdot 1 \frac{m}{kN} \right| = 5.882 \times 10^{39}$ *- wyznacznik macierzy* $\mathbf{K}_o$ *jest zawsze większy od zera,* $|\mathbf{K}_o| > 0$

$\left| Go \cdot 1 \frac{m}{kN} \right| = 0.000 \times 10^{0}$ *- wyznacznik macierzy* $\mathbf{G}_o$ *może być równy zeru*

Ko =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	480.2	0	0	-240.1	0	-120.1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	98000	0	0	-49000	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	160.1	120.1	0	40	0	0	0	0
7	0	0	0	-240.1	0	120.1	480.2	0	0	-240.1	0	-120.1	0
8	0	0	0	0	-49000	0	0	98000	0	0	-49000	0	0
9	0	0	0	-120.1	0	40	0	0	160.1	120.1	0	40	0
10	0	0	0	0	0	0	-240.1	0	120.1	480.2	0	0	-240.1
11	0	0	0	0	0	0	0	-49000	0	0	98000	0	0
12	0	0	0	0	0	0	-120.1	0	40	0	0	160.1	120.1
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-240.1	0	120.1	14240.1
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-49000	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-120.1	0	40	...

$\cdot\frac{kN}{m}$

Go =

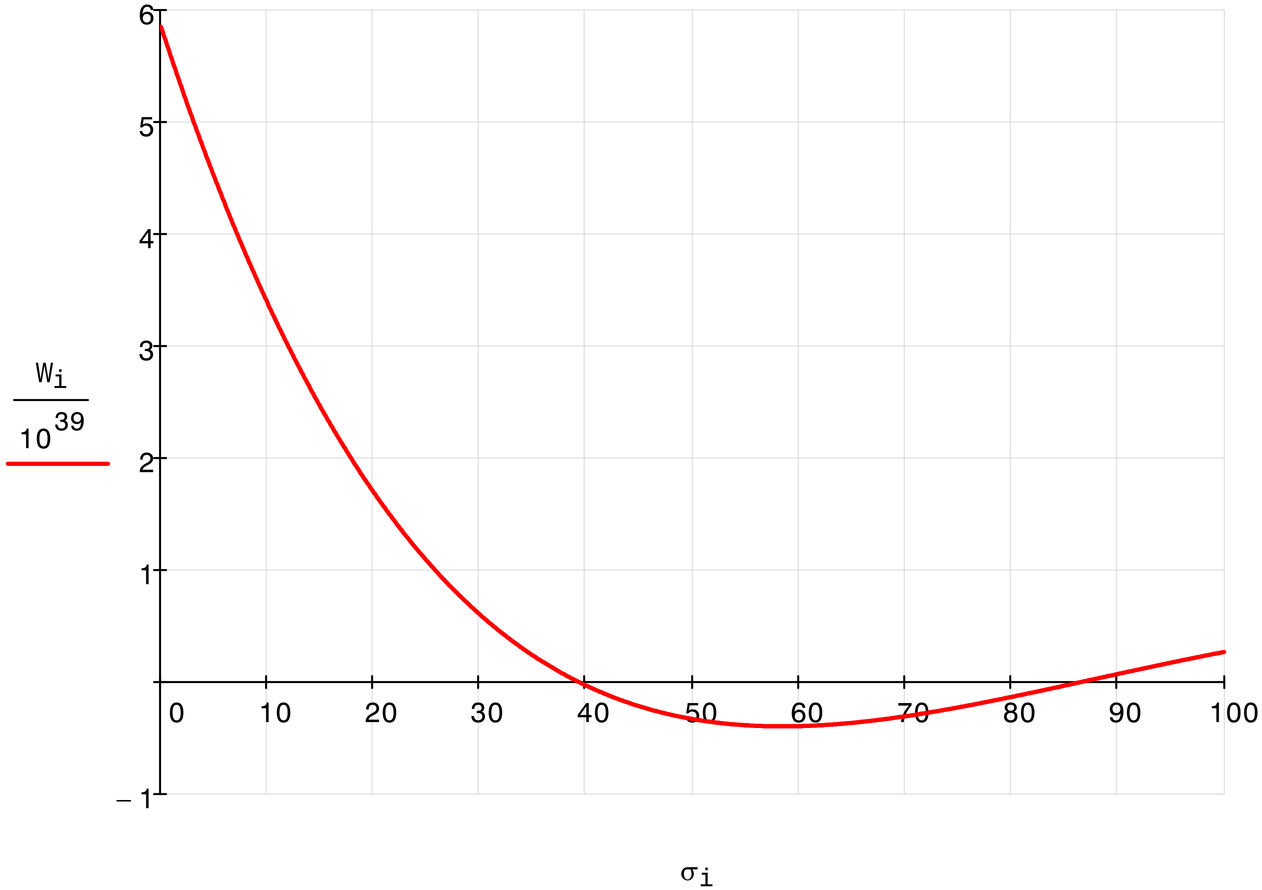
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	-2.4	0	0	1.2	0	0.1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	-0.267	-0.1	0	0.033	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	1.2	0	-0.1	-2.4	0	0	1.2	0	0.1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0.1	0	0.033	0	0	-0.267	-0.1	0	0.033	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	1.2	0	-0.1	-2.4	0	0	1.2	0	0.1
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0.1	0	0.033	0	0	-0.267	-0.1	0	0.033
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.2	0	-0.1	-1.2	0	-0.1
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...

$\cdot\frac{kN}{m}$

$|Ko + \sigma \cdot Go| = 0$ *- warunek niejednoznacznosci przemieszczeń, czyli mozliwość utraty stateczności*

$$KG(\sigma) := (Ko + \sigma \cdot Go) \cdot \frac{m}{kN}$$

$N := 1000 \qquad i := 1 .. N \qquad \sigma_i := i \cdot 0.1 \qquad W_i := |KG(\sigma_i)|$



Oszacowanie wartości siły krytycznej
"z góry" i "z dołu"

$$P1 := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_1}{(0.5 \cdot Y_5)^2}$$

$$P2 := \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_1}{(0.699 \cdot Y_5)^2}$$

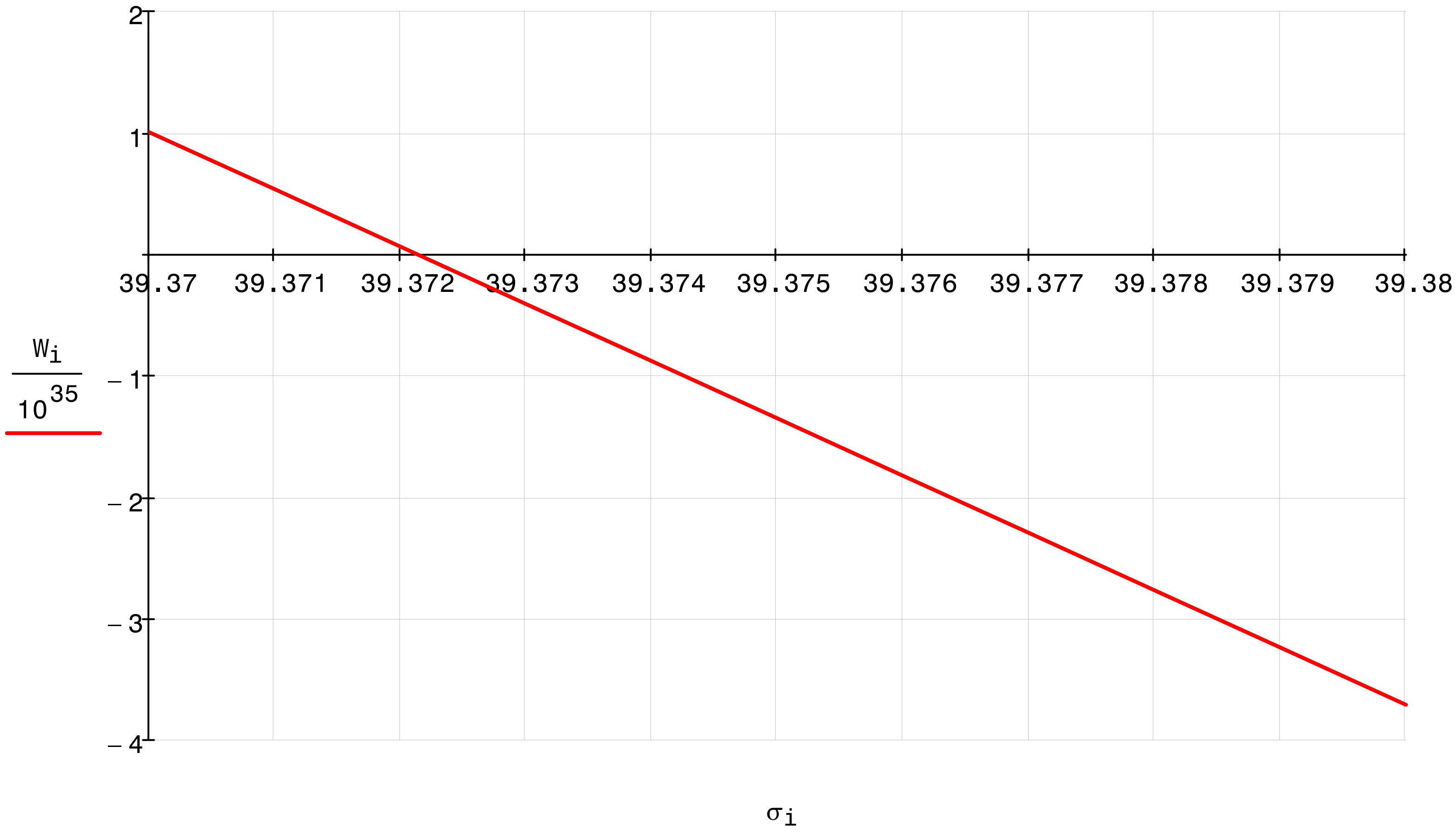
$P1 = 49.369 \cdot kN$

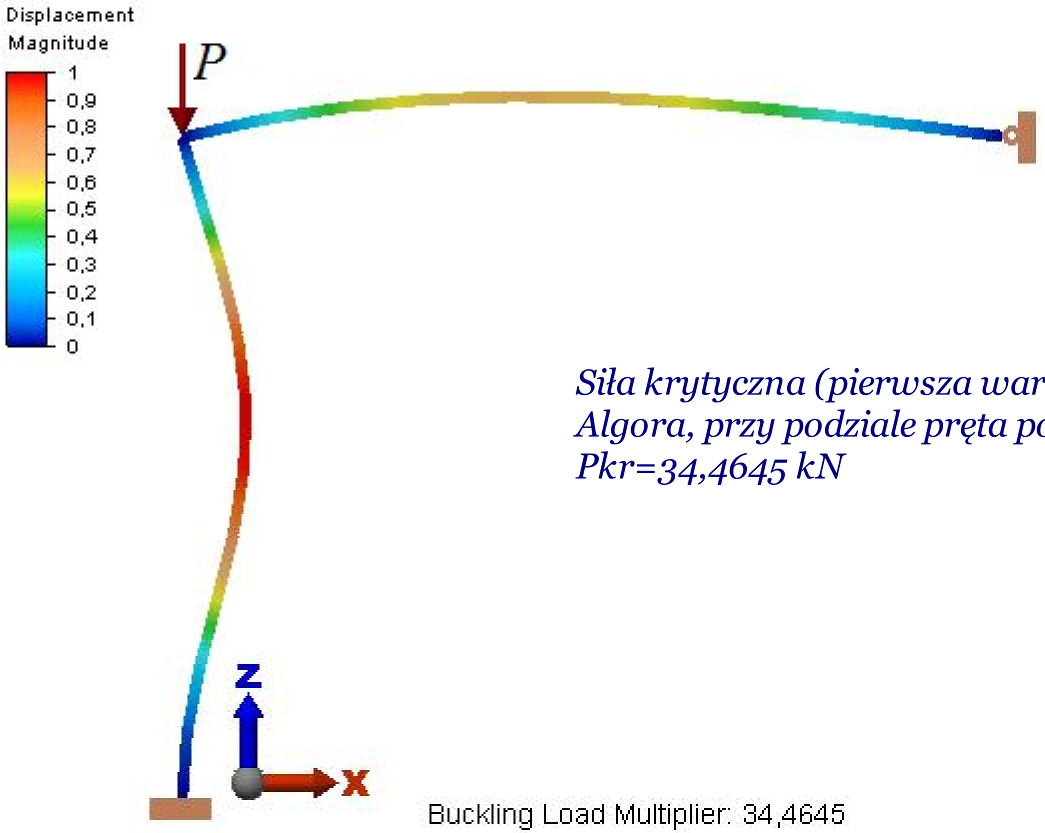
$P2 = 25.260 \cdot kN$

$N1 := 39370 \qquad N2 := 39380$

$i := N1 .. N2 \qquad \sigma_i := i \cdot 0.001 \qquad W_i := \left|KG(\sigma_i)\right|$

Siła krytyczna (pierwsza wartość własna) ma przybliżoną wartość
Pkr=39,372 kN



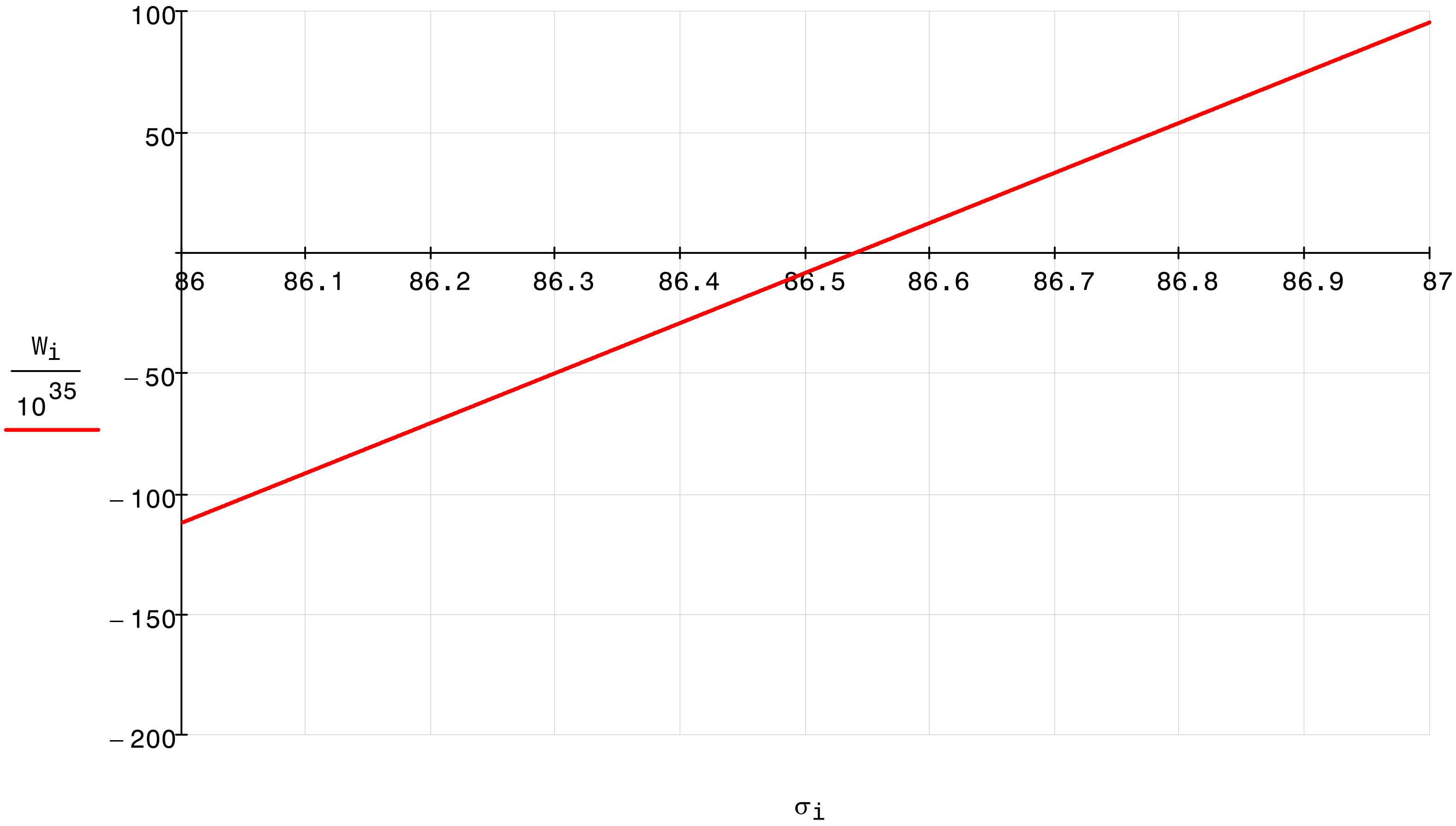


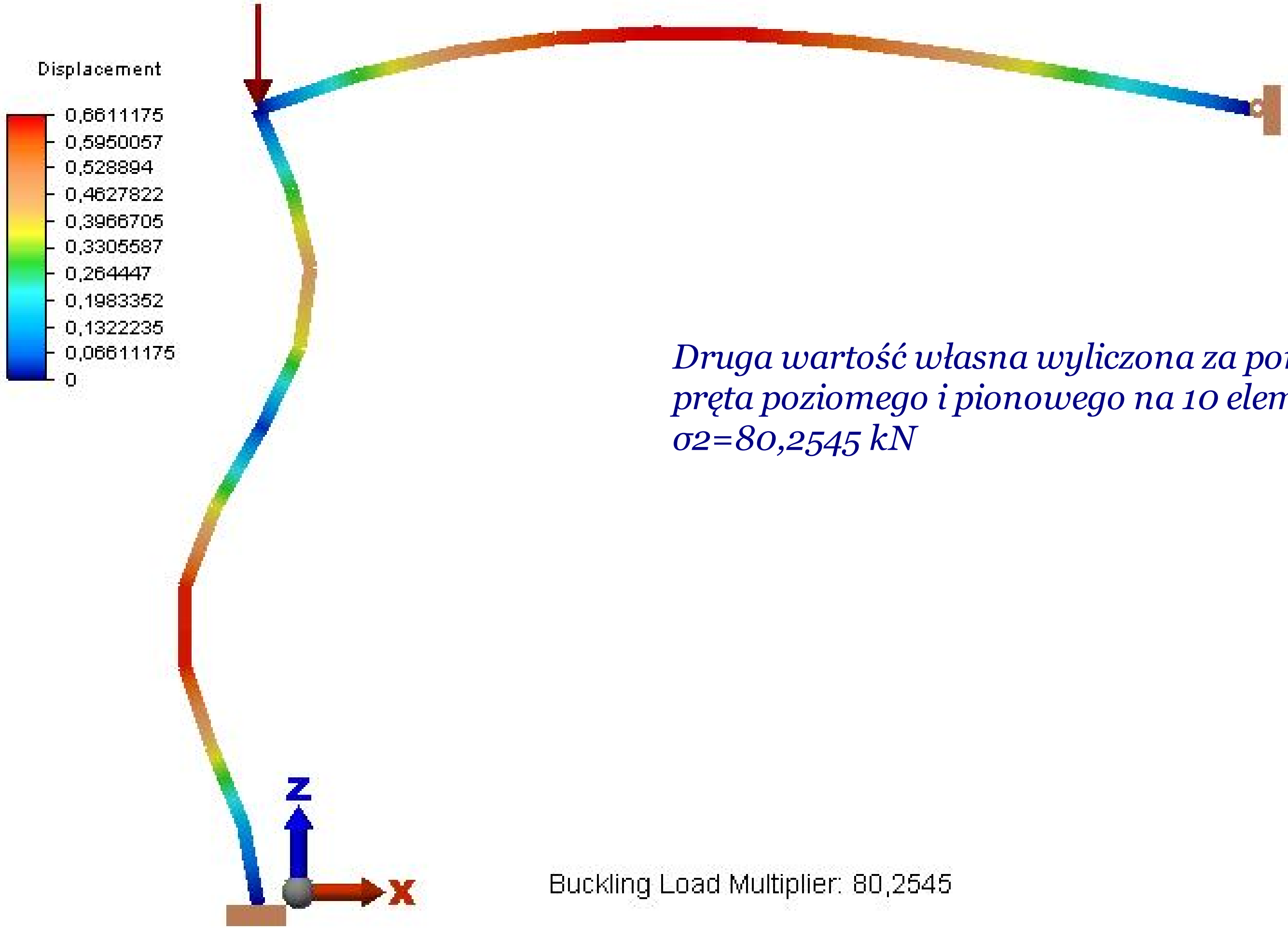
Siła krytyczna (pierwsza wartość własna) wyliczona za pomocą Algora, przy podziale pręta poziomego i pionowego na 10 elementów
Pkr=34,4645 kN

$N1 := 86000$ $N2 := 87000$

$i := N1 .. N2$ $\sigma_i := i \cdot 0.001$ $W_i := \left|KG(\sigma_i)\right|$

Druga wartość własna ma przybliżoną wartość
σ2=86,55 kN





Druga wartość własna wyliczona za pomocą Algora, przy podziale pręta poziomego i pionowego na 10 elementów
σ2=80,2545 kN